第25卷第4期 数学研究与评论 Vol.25, No.4
2005年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2005

文章编号: 1000-341X(2005)04-0734-05 文献标识码: A

相通连续 Domain 的若干特征定理

尚 云[1], 赵 彬[2]
(1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100080;
2. 陕西师范大学数学与信息科学学院, 陕西 西安 710062)
(E-mail: shangyun602@163.com)

摘 要: 首先引入了相通连续 Domain 的概念, 利用主理想及连通闭集刻画了相通连续 Domain; 其次考察了相通完备偏序集的定向完备化, 得到了一些好的结果.

关键词: 相通连续 Domain; 连通闭集; 定向完备化.
MSC(2000): 06B35
中图分类: O153.1

1 引言及预备知识

连续格理论 [1] 以及更广泛的连续偏序集理论 [2] 集序结构, 拓扑结构的研究于一体, 取得了丰硕的成果, 并对计算机科学产生了重要影响. 但是, 最基本且结构最丰富的实数集 R 及自然数集 N 却不能作为连续偏续集, 这在很大程度上限制了连续偏续集理论的使用范围. 文 [3] 利用定向集引入相容偏续集的概念, 在一定程度上解决了这个问题. 本文则利用连通集引入相通连续 Domain 的概念, 在更广的范围内得到了与文 [3] 类似的结论.

定义 1.1 设 A 为偏续集, $\emptyset \neq B \subseteq A$. 若 $\forall x, y \in B, \exists x = x_1, x_2, \cdots, x_n = y$, 使得 $x_i \in B$ 且 x_i, x_{i+1} 可比较, 则称 B 是连通的. x 与 y 称为在 B 中连通.

定义 1.2 设 A 为偏续集, $\mathcal{B} = \{D_i \subseteq A$ 且 D_i 连通, $i \in I\}$. 若 $\forall D_i, D_j, i, j \in I, \exists D_i = D_1, D_2, \cdots, D_n = D_j$ 使得 $D_k \in \mathcal{B}, k = 1, 2, \cdots, n$ 且 $D_k \cap D_{k+1} \neq \emptyset$, 则称 $\mathcal{B}$ 为 A 中的连通集族. 显然 $\mathcal{B} = \cup_{i \in I} D_i$ 仍是 A 中的连通集.

例 1.3 (1) 显然, 定向集为连通集.

(2) 连通集在单调映射下的像仍为连通集.

定义 1.4 设 A 为偏序集, $\emptyset \neq D \subseteq A$, 如果满足:

(1) D 是连通的;

(2) 存在 $p \in A$ 使得 $D \subseteq \downarrow p = \{x \in A : x \leq p\}$, 则称 D 为 A 中相通集. A 中相通集的全体记为 $C(A)$.

定义 1.5 设 A 是偏序集, 如果对于 A 中的每一个相通集 D, D 在 A 中的最小上界 $\sup D$ 存在, 则称 A 为相通完备偏序集.

定义 1.6 设 A 是相通完备偏序集. 定义 A 上的 Way-below 关系 $\ll_c$ 如下: 对任意 $x, y \in A$, 如果对 A 中相通集 D, 当 $y \leq \sup D$ 时, 存在 $d \in D$ 使得 $x \leq d$, 则称 x 在 y 方向相容小于或等于 y, 记为 $x \ll_c y$. 如果 $x \ll_c x$ 成立, 则 x 称为 A 的相容紧元. A 的全体相容紧元之集用

收稿日期: 2003-03-10
基金项目: 国家自然科学基金 (10471083), 高等院校优秀青年教师教学与科研奖励计划 (教人司 [2000]26 号).

$k_c(A)$ 表示. 符号 $\Uparrow_c x$ 表示集合 $\{t \in A : x \ll_c t\}$, 符号 $\Downarrow_c x$ 表示集合 $\{u \in A : u \ll_c x\}$, 分别称为 Way-below 上集和下集.

命题 1.7 对于相通完备偏序集 A 上的上述关系 $\ll_c$, 有如下简单结果:

(1) $x \ll_c y \Rightarrow x \le y$;

(2) $u \le x \ll_c y \le z \Rightarrow u \ll_c z$;

(3) A 有一个最小元 0, 则对任意 $x \in A$, 有 $0 \ll_c x$.

定义 1.8 设 A 是一个相通完备偏序集, A 满足如下两个条件:

(1) $\forall x \in A$, 集合 $\Downarrow_c x$(相应的，集合 $k_c(A) \cap (\Downarrow_c x)$) 是 A 中相通集;

(2) $\forall x \in A, x = \sup \Downarrow_c x$(相应的，$x = \sup(k_c(A) \cap (\Downarrow_c x))$),

则称 A 是一个相通连续 Domain(相应的，相通代数 Domain).

例 1.9 实数集 R 是相通连续 Domain. 自然数集 N 是一个相通代数 Domain.

定理 1.10 如果 A 是一个相通连续 Domain, 则插入性质在 A 中成立，即 $x \ll_c y \Rightarrow \exists z \in A, x \ll_c z \ll_c y$.

证明 设 $x \ll_c y$, 令 $S = \{b | \exists a \in A, b \ll_c a \ll_c y\}$. 因 A 是一个相通连续 Domain, 则 $\Downarrow_c y$ 是相通集, 所以是非空的. 所以存在 $a \ll_c y$. 同理存在 $b \ll_c a$, 所以 $b \in S$, 即 S 是非空的. 下证 S 为连通的. $\forall s_1, s_2 \in S$, 则分别存在 $a', a'' \in A, a', a'' \ll_c y$, 使得 $s_1 \in \Downarrow_c a', s_2 \in \Downarrow_c a''$, 因 A 为相通连续 Domain, 则 $\Downarrow_c y$ 为连通的. 所以存在有限个 a_i, 使得 $a_0 = a', \cdots, a_n = a''$ 且 $a_i \le a_{i+1}$ 或 $a_{i+1} \le a_i$. 很明显有 $\Downarrow_c a', \cdots, \Downarrow_c a''$ 之间或 $\Downarrow_c a_i \subseteq \Downarrow_c a_{i+1}$ 或 $\Downarrow_c a_{i+1} \subseteq \Downarrow_c a_i$, 即构成了连通集族， 所以 s_1, s_2 可用有限个 s_i 连接, 其中存在 j 使得 $s_i \in \Downarrow a_j$, 又因为 $a_j \ll_c y$, 所以 $s_i \in S$, 即 S 为连通的. 易证 $\vee S = y \gg_c x$, 所以存在 $b \in S, x \le b$, 所以存在 $z \in A, x \le b \ll_c z \ll_c y$, 即 $x \ll_c z \ll_c y$.

命题 1.11 如果 A 是相通连续 Domain(相应的，相通代数 Domain), 则 A 的任一主理想都是相通连续 Domain(相应的，相通代数 Domain) 且 $\forall x \in A, \forall u \in \downarrow x, u$ 在主理想 $\varphi = \downarrow x$ 中的 Waybelow 下集 $\Downarrow_{\varphi_c}$ 与 u 在 A 中的 Waybelow 下集 $\Downarrow_c u$ 相同，即 $\Downarrow_{\varphi_c} u = \Downarrow_c u$.

证明 只须证明 $\forall x \in A, \forall u \in \downarrow x, \Downarrow_{\varphi_c} u = \Downarrow_c u$ 成立. 事实上 $\Downarrow_{\varphi_c} u \supseteq \Downarrow_c u$, 显然. 又若 $y \ll_{\varphi_c} u$, 由 $\Downarrow_c u (\subseteq \Downarrow_{\varphi_c} u \subseteq \downarrow x)$ 相通且逼近 u 得存在 $v \in \Downarrow_c u$ 使 $y \le v \ll_c u$. 于是 $y \ll_c u$ 成立，从而 $\Downarrow_{\varphi_c} u = \Downarrow_c u$ 相通且逼近 $u, \downarrow x$ 相通连续. 又由此知，当 $k \in \downarrow x$ 时， k 为 $\downarrow x$ 的相容紧元当且仅当 k 是 A 的相容紧元. 于是 A 是相通代数 Domain 时， $\downarrow x$ 是相通代数 Domain.

命题 1.12 若 A 是相通完备偏序集，且 $\forall x \in A, \varphi = \downarrow x$ 都是相通连续 Domain (相应的，相通代数 Domain), 则 A 是相通连续 Domain(相应的，相通代数 Domain).

证明 对于任意 $x \in A$, 只要证 $\Downarrow_c x = \Downarrow_{\varphi_c} x$, 便可由 $\varphi = \downarrow x$ 连续得 $\Downarrow_c x$ 是连通的且逼近 x. 显然 $\Downarrow_c x \subseteq \Downarrow_{\varphi_c} x$. 又设 $y \ll_{\varphi_c} x$, 但 y 不相容小于 x, 则存在一个相通集 D 使 $\sup D = z \ge x$, 而 $\forall d \in D, y \not\le d$. 由于 $\downarrow z$ 是连续的，由命题 1.11 知， $\downarrow x$ 作为 $\downarrow z$ 的主理想也是连续的，且 x 在 $\rho = \downarrow z$ 中的 Waybelow 下集 $\Downarrow_{\rho_c} x = \Downarrow_{\varphi_c} x$. 故由 $y \ll_{\varphi_c} x \le z$ 得 $y \ll_{\rho_c} x$. 又由 $\sup D = z \ge x$ 得 $\exists d \in D$ 使 $y \le d$ 成立. 这与上面的假设矛盾. 从而 $y \ll_c x$, 进而有 $\Downarrow_c x = \Downarrow_{\varphi_c} x$.

注 1.13 A 是相通完备的条件不能少，如将单位区间 [0,1] 的最大元 1 分裂为两个不可比较的元但都大于 [0,1] 中的元，则得不相通完备，从而不相通连续的偏序集，但其中每一主理想都是理想格 (此处连通集取为定向集).

综合上述两个命题，可得如下相通连续 Domain 的刻画定理.

定理 1.14 设 A 是相通完备偏序集, A 是相通连续 Domain(相应的, 相通代数 Domain) 当且仅当 A 的任一主理想为相通连续 Domain(相应的, 相通代数 Domain).

2 闭集格

定义 2.1 设 A 是一个相通完备偏序集, $F \subseteq A$ 称作连通闭集, 若它满足下列条件 (1) 与 (2):

(1) $F = \downarrow F$;

(2) 对 A 的任意相通集 $D, D \subseteq F$, 则 $\vee D \in F$.

记 $C_c(A) = \{F \subseteq A : F$ 是 A 的连通闭集 $\}$. 显然 $C_c(A)$ 是完备格.

注 2.1 (1) 当连通集取为定向集时, 则连通闭集恰为 Scott 闭集. (2) 对相通完备偏序集 A 的任一个子集 B, 存在包含 B 的最小的连通闭集, 称为 B 的连通闭包, 记为 $c(B)$, 即 $c(B) = \cap\{F \in C_c(A) : B \subseteq F\}$.

引理 2.3[4] 设 X 是 A 的一个下集, 对每个序数 n, 归纳的定义 A 的子集 X^n 如下

$$X^0 = X, X^{n+1} = \{x \in A : \exists D \in C(A), D \subseteq X^n \text{ 使 } x \leq \vee D\};$$

若 m 是一个极限序数, 定义

$$X^m = \cup_{n<m} X^n,$$

则存在一个序数 α 使 $X^{\alpha+1} = X^\alpha$, 进一步有 $c(X) = X^\alpha$(其中 $c(X)$ 表示 X 的连通闭包).

设 L 是一个完备格, L 上的强 Waybelow 关系 $\lhd$ 定义为: $\forall a, b \in L, a \lhd b$ 当且仅当 $\forall B \subseteq L, b \leq \vee B \Rightarrow \exists x \in B$ 使 $a \leq x$. 记 $\beta(a) = \{x \in L : x \lhd a\}$. Raney 证明了 L 是完全分配格当且仅当 $\forall a \in L, a = \vee\beta(a)$.

引理 2.4 设 A 上的 Waybelow 关系 $\ll_c$ 满足插入性质, 则 $a \ll_c b$ 在 A 中成立当且仅当 $\downarrow a \lhd \downarrow b$ 在 $Cc(A)$ 中成立.

设 A 是一个相通完备偏序集, 若 $\forall X \subseteq A$, 有 $c(X) = X^1$, 即 $y \in c(X)$ 当且仅当存在 $D \in C(A), D \subseteq \downarrow X$ 使 $y \leq \vee D$, 则称 A 有一步闭包.

引理 2.5 每个相通连续 Domain 有一步闭包.

证明 设 A 是相通连续 Domain, X 是 A 的任一下集, 为证 $c(X) = X^1$, 只须证 $X^1 \in C_c(A)$. 设 $D \subseteq X^1, D \in C(A)$. 记 $a = \vee D$, 则 $\forall d \in D$. 由 A 是相通连续的知 $d = \vee \Downarrow_c d$. 由于 $d \in D$, 则 $\exists C \in C(A), C \subseteq X$ 使 $d \leq \vee C$, 因此 $\Downarrow_c d \subseteq \downarrow C \subseteq X$. 令 $M = \cup_{d\in D} \Downarrow_c d$, 则

$$M \subseteq X. \vee M = \vee_{d\in D}(\vee \Downarrow_c d) = \vee D = a.$$

另一方面, 由于映射 $\Downarrow_c: A \to C(A)$ 是保序的, 则

$$D \in C(A), \Downarrow_c (D) \in C(C(A)).$$

又连通集的连通并是连通的, 则

$$M = \cup_{d\in D} \Downarrow_c d \in C(A).$$

所以 $\vee D \in X^1$, 故 X^1 是连通闭集, 即 $X^1 \in Cc(A)$.

定理 2.6 设 A 是相通完备偏续集，则 A 是相通连续的当且仅当下列条件成立：

(1) $C_c(A)$ 是完全分配格；

(2) A 有一步闭包.

证明 *必要性*. 由引理 2.5 知 (2) 成立. 由引理 2.4 知 $\forall a \in A, \beta(\downarrow a) \supseteq \{\downarrow x : x \ll_c a\}$. 由于 $\{x : x \ll_c a\} \in C(A)$ 且 $a = \vee\{x : x \ll_c a\}$, 则在 $C_c(A)$ 中有 $\downarrow a = \vee\{\downarrow x : x \ll_c a\}$. 因此 $\downarrow a = \vee\beta(\downarrow a)$. $\forall E \in C_c(A), E = \vee\{\downarrow x : x \in E\}E$, 则 $\vee\beta(E) \geq \vee(\cup_{x\in E}\beta(\downarrow x)) = E$. 由此得 $E = \vee\beta(E)$. 所以 $C_c(A)$ 是完全分配格.

充分性. $\forall a \in A, \downarrow a = \vee\beta(\downarrow a).\forall x, y \in A$, 由 $\downarrow x \lhd \downarrow y$ 知 $x \ll_c y$. 而 $\downarrow a = \vee\beta(\downarrow a) = c(\{x :\downarrow x \lhd \downarrow a\})$. 因为 $\{x :\downarrow x \lhd \downarrow a\}$ 是下集且 A 有一步闭包，则存在相通集 $M \subseteq \{x :\downarrow x \lhd \downarrow a\}$ 使 $a \leq \vee M$. 显然 $\vee M \leq a$. 所以 $a = \vee M$. 由于 $M \subseteq \{x : x \ll_c a\}$ 且 $M \in C(A)$, 则

$$\downarrow M = \{x : x \ll_c a\}.$$

所以 A 是相通连续的.

定理 2.7 设 A 是相通连续 Domain, $\downarrow x$ 是 A 中的主理想，则

$$C_c(\downarrow x) = C_c(A)|\downarrow x = \{F\cap \downarrow x : F \in C_c(A)\}.$$

证明 设 $F^* \in C_c(\downarrow x)$, 则 $F^* \subseteq\downarrow x$. 对任意相通集 $D \subseteq F^* \subseteq\downarrow x$. 由 $F^* \in C_c(\downarrow x)$ 及 $D \subseteq\downarrow x$, 知 $\sup D \in F^*$. 这说明 $F^* \in C_c(A)$. 于是

$$F^* = F^*\cap \downarrow x \in \{F\cap \downarrow x : F \in C_c(A)\},\ C_c(\downarrow x) \subseteq \{F\cap \downarrow x : F \in C_c(A)\}.$$

又若 $F \in C_c(A)$, 令 $F^* = F\cap \downarrow x$. 下证 $F^* \in C_c(\downarrow x)$. 设 D 相通， $D \subseteq F^* \subseteq\downarrow x$, 则 $\sup D$ 存在且有 $\sup D \leq x$, 又 $F \in C_c(A)$, 则 $\sup D \in F$. 于是

$$\sup D \in F^* = F\cap \downarrow x.$$

这说明 $F^* \in C_c(x)$.

3 相通完备偏序集的定向完备化

定义 3.1 设 A 为相通完备偏序集， $F \in C_c(A)$, 如果 $F \neq \emptyset$ 且对任意连通闭集 F_1, F_2, 当 $F \subseteq F_1 \cup F_2$ 时，必有 $F \subseteq F_1$ 或 $F \subseteq F_2$, 则称 F 为 A 的广义既约闭集. 当连通集取为定向集时，则为文 [5] 中的既约闭集.

定理 3.2 设 A 是相通完备偏序集， $C_c(A)$ 是 A 的连通闭集格. 设 $\overline{D}$ 是 A 中广义既约闭集的定向集族， 则 $\overline{D}$ 在 $C_c(A)$ 中的上确界 $\sup\overline{D} = c(\cup\overline{D})$ 仍是 A 中的广义既约闭集.

证明 设 $\overline{D}$ 在 $C_c(A)$ 中的上确界为 $F = \sup\overline{D} = c(\cup\overline{D})$, 则因 $C_c(A)$ 为完备格，所以 F 是 A 中的连通闭集. 下证 F 是广义既约的. 设 F_1, F_2 为 A 的两个连通闭集，且 $F \subseteq F_1 \cup F_2$, 则 $\forall \bar{a} \in \overline{D}$, 有

$$\bar{a} \subseteq F \subseteq F_1 \cup F_2.$$

由于 $\bar{a}$ 是广义既约的，必有 $\bar{a} \subseteq F_1$ 或 $\bar{a} \subseteq F_2$. 令 $\overline{D}_1 = \{\bar{a} \in \overline{D} : \bar{a} \not\subseteq F_1\}, \overline{D}_2 = \{\bar{a} \in \overline{D} : \bar{a} \not\subseteq F_2\}$. 若 $\overline{D}_1 \neq \emptyset \neq \overline{D}_2$, 则存在 $\bar{u}_1 \in \overline{D}_1, \bar{u}_2 \in \overline{D}_2$ 使 $\bar{u}_1 \not\subseteq F_1, \bar{u}_2 \not\subseteq F_2$. 由于 $\overline{D}$ 是定向的，存在

$\bar{u}_3 \supseteq \bar{u}_1, \bar{u}_2$, 显然 $\bar{u}_3 \not\subseteq F_1, \bar{u}_3 \not\subseteq F_2$ 与 $\bar{u}_3$ 为广义既约闭集矛盾. 故 $\overline{D}_1 = \emptyset$ 或 $\overline{D}_2 = \emptyset$, 从而 $F \subseteq F_1$ 或 $F \subseteq F_2$. 于是 F 是广义既约闭集.

推论 3.3 设 A 是相通完备偏序集. $B \in C_c(A)$ 且 B 是定向集, 则 B 为广义既约闭集.

证明 显然 $B = \sup\{\downarrow x : x \in B\}$ 为广义既约闭集的定向并, 从而由定理 3.2 知 B 为 A 的广义既约闭集.

设 A 是相通完备偏序集. 令 $\mathrm{gr}(A)(\subseteq C_c(A))$ 为 A 的广义既约闭集之族, 则 $\mathrm{gr}(A)$ 依集合包含序形成一个定向完备偏序集, 称为 A 的定向完备化.

例 3.4 若连通集取为定向集, 则 R 的定向完备化为 $(0, +\infty] \cong (0, 1]$; N 的定向完备化为 $N \cup \{+\infty\}$.

参考文献:

[1] GIERZ G, HOFFMANN K, KEIMEL K. et al. *A Compendium of Continuous Lattice* [M]. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

[2] ABRAMSKY S, JUNG A. *Domain Theory* [M]. Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 3, 1–168, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1994.

[3] 徐罗山. 相容连续偏序集及其定向完备化 [J]. 扬州大学学报 (自), 2000, **3**: 1–10.
XU Luo-shan. *Consistently continuous posets and their directed completions* [J]. J. Yangzhou Univ. Nat. Sci., 2000, **3**: 1–10. (in Chinese)

[4] 赵东升, 赵彬. Lawson-Hoffmann 对偶定理的推广 [J]. 数学学报, 1998, **41**(6): 1325–1332.
ZHAO Dong-sheng, ZHAO Bin. *Generalization of Lawson-Hoffmann duality* [J]. Acta Math. Sinica, 1998, **41**(6): 1325–1332. (in Chinese)

[5] LAWSON J. *The duality of continuous posets* [J]. Houston J. Math., 1979, **5**(3): 357–386.

Some Characteristic Theorems on Consistently Connected Continuous Domains

SHANG Yun[1], *ZHAO Bin*[2]

(1. Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: In this paper, we introduce the concepts of consistently connected continuous domains, and obtain some properties of consistently connected continuous domains by using of the principal ideals and the lattice of connected closed sets. Moreover, we give some good properties of directed completions of consistently connected complete posets.

Key words: consistently connected continuous domains; connected closed sets; directed completions.