

## 一类反应扩散方程波前解的存在性

张建明

(浙江理工大学信息与计算科学系, 浙江 杭州 310018)

(E-mail: jmzhang48@hotmail.com)

**摘 要:** 本文讨论一类反应扩散方程满足各种条件的单调波前解及振荡波前解的存在性; 得到了一系列保证波前解存在的充分条件.

**关键词:** 反应扩散方程; 行波解; 波前解的存在性.

**MSC(2000):** 35K57

**中图分类号:** O175.12

### 1 引言

本文研究以下反应扩散方程

$$\left(\frac{u^m}{m}\right)_t = u_{xx} + k(u^n)_x + u^l f(u), \quad (1)$$

其中  $m, n, l$  为不小于 3 的正整数, 且  $m < n$ . 我们恒假定以下条件 (A) 成立:

(A)  $f: [0, 1] \rightarrow R$  解析,  $f(0) < 0, f(1) = 0, f'(1) < 0$ ; 存在  $a \in (0, 1)$ , 使得当  $u \in (0, a)$  时,  $f(u) < 0$ ; 当  $u \in (a, 1)$  时,  $f(u) > 0$ .

方程 (1) 是与扩散, 反应, 对流等有关的物理化学问题中有广泛的应用的数学模型. 它可以描述依赖于温度的热能的源和汇, 热对流, 热传导等. 在流体力学, 燃烧理论及化学反应中均有广泛应用. 当 (1) 中的传导项为零 (即  $k=0$ ) 时, 王明新<sup>[1]</sup> 曾研究了系统的单调递增波前解的存在与唯一性. M.A.Herrero 与 J.L.Vazquez<sup>[2]</sup> 研究了方程

$$u_t = a(u^m)_{xx} - bu^n, \quad a > 0, b > 0 \quad (2)$$

的有限行波解. A.de Pablo 与 A.Sanchez<sup>[3]</sup> 曾研究了方程

$$u_t = a(u^m)_{xx} + b(u^n)_x + ku^p, \quad x \in R, t > 0 \quad (3)$$

的全局行波解. 本文研究比 (2), (3) 更为一般的方程 (1). 考虑在  $Q = \{(x, t) \mid -\infty < x < +\infty, t > 0\}$  内方程 (1) 具有形式  $u(x, t) = q(x + ct) = q(\xi)$  的全局行波解, 其中  $c$  为行波的波速. 对  $f(u)$  在  $(-\delta, 0)$  内作适当解析延拓, 我们可确定其行波系统的奇点  $O(0, 0)$  的不同类型. 在各种可能

收稿日期: 2003-08-20

基金项目: 浙江省自然科学基金 (Y604359)

情况下, 本文得到了方程 (1) 的单调递增及递减波前解存在和唯一的各种充分条件. 并且我们还研究了非单调波前解的存在性.

## 2 行波方程组的奇点性质

将  $u(x, t) = q(x + ct) = q(\xi)$  代入 (1) 得

$$cq^{m-1}q' = q'' + knq^{n-1}q' + q^l f(q), \quad (4)$$

其中“ $\prime$ ”是关于  $\xi$  进行求导.

令  $q' = p$ , (4) 化为以下确定 (1) 的行波解的方程组

$$\begin{cases} q' = p, \\ p' = cq^{m-1}p - knq^{n-1}p - q^l f(q). \end{cases} \quad (5)$$

显然, 当条件 (A) 成立时,  $O(0, 0)$ ,  $A(a, 0)$ ,  $B(1, 0)$  均为 (5) 的奇点.

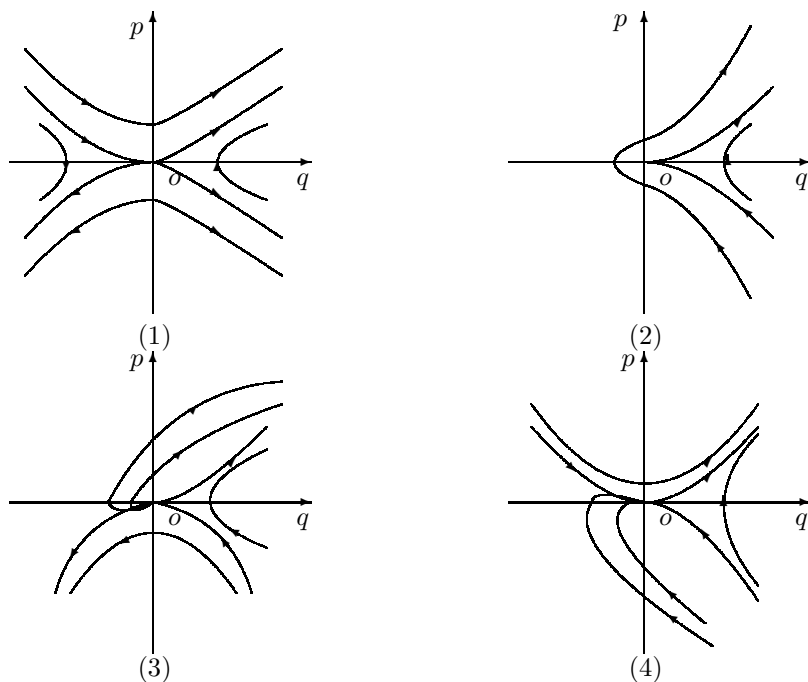


图 2.1 行波方程组 (5) 在原点邻域的相图

(I) 在点  $O(0, 0)$ (5) 的线性化系统的系数矩阵为二阶幂零矩阵, 因此该矩阵有两个零特征值.

对  $f(q)$  在  $O(0, 0)$  的某一左邻域做解析延拓

$$f_1(q) = \begin{cases} f(q), & q \in [0, 1] \\ f(0) + f'(0)q + \frac{f''(0)}{2!}q^2 + \dots, & q \in (-\delta, 0), \delta > 0. \end{cases}$$

此时, (5) 可化为

$$\begin{cases} q' = p, \\ p' = -f_1(0)q^l \left(1 - \frac{f_1'(\theta q)}{f_1(0)}q\right) + cq^{m-1}p \left(1 - \frac{kn}{c}q^{n-m}\right), \quad 0 < \theta < 1. \end{cases} \quad (6)$$

由于  $-f_1(0) = -f(0) > 0$ , 因此

(i) 当  $l = 2N + 1$  ( $N \geq 1$  为整数) 时,  $O(0, 0)$  为鞍点 (图 2.1(1)), 并且在第一, 四象限分别有一条不稳定流形和一条稳定流形. 事实上, 作变换  $(F_0): q = q, p = \eta_1 q$ , (6) 可化为

$$\begin{cases} q' = \eta_1 q, \\ \eta_1' = -\eta_1^2 - f_1(0)q^{l-1} \left(1 - \frac{f_1'(\theta q)}{f_1(0)}q\right) + cq^{m-1}\eta_1 \left(1 - \frac{kn}{c}q^{n-m}\right). \end{cases} \quad (A_1)$$

再作变换  $(F_1): q = q, \eta_1 = \eta_2 q, d\tau_1 = qd\xi$ . 为使符号简单起见, 仍将  $\tau_1$  记为  $\xi$ ,  $(A_1)$  就化为

$$\begin{cases} q' = \eta_2 q, \\ \eta_2' = -2\eta_2^2 - f_1(0)q^{l-3} \left(1 - \frac{f_1'(\theta q)}{f_1(0)}q\right) + cq^{m-2}\eta_2 \left(1 - \frac{kn}{c}q^{n-m}\right). \end{cases} \quad (A_2)$$

如此继续下去, 作变换  $(F_0), (F_1), \dots, (F_r): q = q, \eta_{r-1} = \eta_r q, d\tau_{r-1} = qd\tau_{r-2}$ . 为使符号简单, 仍将  $\tau_{r-1}$  记为  $\xi$ , (6) 便化为

$$\begin{cases} q' = \eta_r q, \\ \eta_r' = -r\eta_r^2 - f_1(0)q^{l-2r+1} \left(1 - \frac{f_1'(\theta q)}{f_1(0)}q\right) + cq^{m-r}\eta_r \left(1 - \frac{kn}{c}q^{n-m}\right). \end{cases} \quad (A_r)$$

(a) 当  $c = 0$  或  $c \neq 0$  且  $m - 1 > N$  时, 取  $r = N$ , 由  $(A_r)$  可得

$$\begin{cases} q' = \eta_N q, \\ \eta_{N+1}' = -N\eta_N^2 - f_1(0)q^2 \left(1 - \frac{f_1'(\theta q)}{f_1(0)}q\right) + cq^{m-N}\eta_N \left(1 - \frac{kn}{c}q^{n-m}\right). \end{cases} \quad (A_N)$$

系统  $(A_N)$  的示性方程为  $G(\theta) = \cos \theta[-f_1(0) \cos^2 \theta - (N + 1) \sin \theta] = 0$ . 由于  $f_1(0) < 0$ , 因此  $(A_N)$  的轨道只可能沿六个方向进入奇点  $O$ , 即

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \arctan \sqrt{\frac{f_1(0)}{N+1}}, \arctan \sqrt{\frac{-f_1(0)}{N+1}} + \pi, \arctan \left(-\sqrt{\frac{-f_1(0)}{N+1}}\right), \arctan \left(-\sqrt{\frac{-f_1(0)}{N+1}}\right) + \pi.$$

又因为  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  是  $G(\theta) = 0$  的单根且

$$G' \left(\frac{\pi}{2}\right) H \left(\frac{\pi}{2}\right) = G' \left(\frac{3\pi}{2}\right) H \left(\frac{3\pi}{2}\right) = -m(m+1) < 0.$$

(其中  $H(\theta)$  的定义参见文 [4]) 由文 [4] 定理 3.7 知, 沿着  $\theta = \frac{\pi}{2}$  和  $\frac{3\pi}{2}$ , 各有唯一轨线进入奇点  $O$ , 它们就是  $x = 0, \eta_N > 0$  和  $x = 0, \eta_N < 0$ .

为了研究其它特殊方向, 再考虑系统  $(A_{N+1})$ ,

$$\begin{cases} q' = \eta_{N+1} q, \\ \eta_{N+1}' = -(N+1)\eta_{N+1}^2 - f_1(0) \left(1 - \frac{f_1'(\theta q)}{f_1(0)}q\right) + cq^{m-N-1}\eta_{N+1} \left(1 - \frac{kn}{c}q^{n-m}\right). \end{cases} \quad (A_{N+1})$$

于是系统  $(A_{N+1})$  在  $\eta_{N+1}$  轴上有两个奇点  $O_1(0, k_1)$  和  $O_2(0, k_2)$  其中  $k_1 = \sqrt{\frac{-f_1(0)}{N+1}}, k_1 = -k_2$ . 系统  $(A_{N+1})$  在奇点  $O_i (i = 1, 2)$  的线性化系统的系数矩阵为

$$M_i(0, k_i) = \begin{pmatrix} K_i & 0 \\ E_i & -(N+1)K_i \end{pmatrix},$$

其中  $E_i$  为确定的常数. 由于  $\det M_i = 2f_1(0) < 0 (i = 1, 2)$ .  $O_1$  和  $O_2$  均为系统  $(A_{N+1})$  的简单鞍点. 它们的两条分界线与  $\eta_{N+1}$  轴重合, 另两条分界线沿着直线  $\eta_{N+1} = \frac{E_i}{k_i + 2(N+1)k_i} q$  离开 ( $i = 1$ ) 或进入 ( $i = 2$ )  $O_i$ .

由变换  $(F_r)(r = 0, 1, \dots, N+1)$  的性质及文 [4] 引理 7.1 可知, 系统 (5) 的奇点  $O$ , 当  $c = 0$  或  $c \neq 0$  和  $m-1 > N$  时在第一四象限分别有一条不稳定流形和一条稳定流形.

(b) 当  $c \neq 0$  且  $m-1 < N$  时, 取  $r = m-1$ , 由  $(A_r)$  得

$$\begin{cases} q' = \eta_{m-1}q, \\ \eta'_{m-1} = -(m-1)\eta_{m-1}^2 + cq\eta_{m-1}\left(1 - \frac{kn}{c}q^{n-m}\right) - \\ f_1(0)q^{2N-2(m-1)+2}\left(1 - \frac{f'_1(\theta q)}{f_1(0)}q\right). \end{cases} \quad (A_{m-1})$$

显然  $2N - 2(m-1) + 2 \geq 4$ , 因此系统  $(A_{m-1})$  的示性方程为

$$G(\theta) = -\cos\theta \sin\theta [m \sin\theta - c \cos\theta] = 0.$$

所以系统  $(A_{m-1})$  的六个特殊方向为

$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \arctan \frac{c}{m}, \pi + \arctan \frac{c}{m}.$$

因  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  是  $G(\theta) = 0$  的单根且

$$G' \left( \frac{\pi}{2} \right) H \left( \frac{\pi}{2} \right) = G' \left( \frac{3\pi}{2} \right) H \left( \frac{3\pi}{2} \right) = m(m-1).$$

由文 [4] 引理 3.7 知, 沿着  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  各有唯一轨线进入奇点  $O_{m-1}$  ( $O_{m-1}$  为平面  $(q, \eta_{m-1})$  的原点). 它们是  $x = 0, \eta > 0$  和  $x = 0, \eta_{m-1} < 0$ .

为了研究其它特殊方向, 再考虑系统  $(A_m)$

$$\begin{cases} q' = \eta_m q, \\ \eta'_m = c\eta_m \left(1 - \frac{kn}{c}q^{n-m}\right) - m\eta_m^2 - f_1(0)q^{2N-2(m-1)} \left(1 - \frac{f'_1(\theta q)}{f_1(0)}q\right). \end{cases} \quad (A_m)$$

显然系统  $(A_m)$  有两个奇点  $\widetilde{O}_1(0, 0), \widetilde{O}_2(0, \frac{c}{m})$ . 该系统在点  $\widetilde{O}_2$  的线性化系统的系数矩阵为

$$\widetilde{M}_2 \left(0, \frac{c}{m}\right) = \begin{pmatrix} \frac{c}{m} & 0 \\ E_2 & -c \end{pmatrix}.$$

其中  $E_2$  为确定的常数. 由于  $\det \widetilde{M}_2 = -\frac{c^2}{m} < 0$ , 所以  $\widetilde{O}_2$  为系统  $(A_m)$  的简单鞍点. 系统  $(A_m)$  在点  $\widetilde{O}_1$  的线性化系统的系数矩阵为

$$\widetilde{M}_1(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

显然  $\widetilde{M}_1$  存在一零特征值. 再作变换  $\tau = c\xi$ , 仍记  $\tau$  为  $\xi$ , 系统  $(A_m)$  可化为

$$\begin{cases} q' = \frac{\eta_m}{c}q, \\ \eta'_m = \eta_m \left(1 - \frac{kn}{c}q^{n-m}\right) - \frac{m}{c}\eta_m^2 - \frac{f_1(0)}{c}q^{2N-2(m-1)} \left(1 - \frac{f'_1(\theta q)}{f_1(0)}q\right). \end{cases} \quad (\widetilde{A}_m)$$

令系统  $(\widetilde{A}_m)$  中第二个方程右侧为零解出  $\eta_m = \varphi(q)$ . 它的展开式的第一项为  $\frac{f_1(0)}{c}q^{2N-2(m-1)}$ . 将  $\eta_m = \varphi(q)$  代入系统  $(\widetilde{A}_m)$  的第一个方程的右侧, 其展开式的第一项为  $\frac{f_1(0)}{c^2}q^{2N-2(m-1)+1}$ . 由文 [4] 定理 7.1 得, 系统  $(\widetilde{A}_m)$  的奇点  $\widehat{O}_m$  (平面  $(q, \eta_m)$  的原点) 为鞍点. 显然系统  $(A_m)$  的奇点  $\widehat{O}_1$  也为鞍点. 因此系统 (5) 的奇点  $O$  在第一, 四象限分别有一条不稳定流形和一条稳定流形.

(c) 当  $c \neq 0$  且  $m-1 = N$  时, 令  $r = N = m-1$ , 则  $(A_r)$  有如下形式

$$\begin{cases} q' = \eta_N q, \\ \eta'_N = -N\eta_N^2 - f_1(0)q^2 \left(1 - \frac{f_1'(\theta q)}{f_1(0)}q\right) + cq\eta_N \left(1 - \frac{kn}{c}q^{n-m}\right). \end{cases} \quad (A_N)$$

其示性方程为  $G(\theta) = \cos\theta[(N+1)\sin^2\theta - c\sin\theta\cos\theta + f_1(0)\cos^2\theta] = 0$ , 由于  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  是  $G(\theta) = 0$  的单根, 且

$$G'\left(\frac{\pi}{2}\right)H\left(\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)H\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -N(N-1) < 0.$$

由文 [4] 定理 3.7 得, 沿着  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  各有唯一轨线进入奇点  $O_N$  ( $O_N$  为平面  $(q, \eta_N)$  的原点), 它们就是  $x = 0, \eta_N < 0$  和  $x = 0, \eta_N > 0$ .

兹记  $\lambda = c^2 - 4(N+1)f_1(0)$ , 显然  $(A_N)$  最多有六个特殊方向.

再作变换  $(F_N)$ , 将  $(A_N)$  化成以下形式

$$\begin{cases} q' = \eta_{N+1}q, \\ \eta'_{N+1} = -f_1(0)\left(1 - \frac{f_1'(\theta q)}{f_1(0)}q\right) - (N+1)\eta_{N+1}^2 + c\eta_{N+1}\left(1 - \frac{kn}{c}q^{n-m}\right). \end{cases} \quad (A_{N+1})$$

于是系统  $(A_{N+1})$  在  $\eta_{N+1}$  轴上有两个奇点  $\widehat{O}_1(0, \widehat{k}_1)$  和  $\widehat{O}_2(0, \widehat{k}_2)$ . 其中

$$\widehat{k}_1 = \frac{c + \sqrt{\lambda}}{2(N+1)}, \widehat{k}_2 = \frac{c - \sqrt{\lambda}}{2(N+1)}.$$

系统  $(A_{N+1})$  在奇点  $\widehat{O}_i$  的线性化系统的系数矩阵为

$$\widehat{M}_i = \begin{pmatrix} \widehat{k}_i & 0 \\ E_3 & -2(N+1)\widehat{k}_i + c \end{pmatrix},$$

其中  $E_3$  为确定的常数. 由于  $f_1(0) < 0$ , 因此  $\sqrt{\lambda} > |c|$ , 故  $\det \widehat{M}_i < 0 (i = 1, 2)$ . 因此奇点  $\widehat{O}_1, \widehat{O}_2$  均为鞍点. 同 (a) 可得, 当  $c \neq 0$  且  $m-1 = N$  时, 系统 (5) 的奇点  $O$  在第一, 四象限分别有一条不稳定流形和一条稳定流形.

综上所述, 当  $l = 2N+1$  时, 系统 (5) 在第一, 四象限总分别存在一条不稳定流形和一条稳定流形. 类似 (i) 的讨论, 我们可得到如下结论

(ii) 当  $l = 2N (N \geq 1$  为整数) 时, 若  $c = 0$  或  $c \neq 0$  且  $m-1 \geq N$ , 则  $O(0,0)$  为退化鞍点 (图 2.1(2)), 且在第一, 四象限分别有一条不稳定流形和一条稳定流形.

(iii) 当  $l = 2N (N \geq 1$  为整数) 时, 若  $c \neq 0$  且  $m-1 < N$ , 则  $O(0,0)$  为鞍结点 (图 2.1(3) 或 (4)), 且在第一, 四象限分别有一条不稳定流形和一条稳定流形.

(II) 在点  $A(a, 0)$  系统 (5) 的线性化系统的系数矩阵为

$$M(a, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^l f'(a) & ca^{m-1} - kna^{n-1} \end{pmatrix}.$$

显然,  $\det(M(a, 0)) = a^l f'(a) > 0$ ,  $\text{trace}M(a, 0) = ca^{m-1} - kna^{n-1}$ . 由平面动力系统理论可知,

- (i) 当  $c > 2\sqrt{a^{l-2m+2}f'(a)} + kna^{n-m}$  时,  $A(a, 0)$  为 (5) 的不稳定结点.
- (ii) 当  $kna^{n-m} < c < 2\sqrt{a^{l-2m+2}f'(a)} + kna^{n-m}$  时,  $A(a, 0)$  为 (5) 的不稳定焦点.
- (iii) 当  $-2\sqrt{a^{l-2m+2}f'(a)} + kna^{n-m} < c < kna^{n-m}$  时,  $A(a, 0)$  时为 (5) 的稳定焦点.
- (iv) 当  $c < -2\sqrt{a^{l-2m+2}f'(a)} + kna^{n-m}$  时,  $A(a, 0)$  为 (5) 的稳定结点.

当  $A(a, 0)$  为结点时, 系统 (5) 进入奇点的轨线的两切线方程为  $p = \lambda_i q$  (其中  $\lambda_i$  为矩阵  $M(a, 0)$  的两特征值 ( $i = 1, 2$ )).

(III) 在点  $B(1, 0)$  系统 (5) 的线性化系统的系数矩阵为

$$M(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(1) & c - kn \end{pmatrix}$$

于是,  $\det M(1, 0) = f'(1)$ , 由于  $f'(1) < 0$ , 所以  $B(1, 0)$  为 (5) 的鞍点. 由于线性化系统系数矩阵对应的两个特征根为

$$\lambda_{1,2}(c) = \frac{c - kn \pm \sqrt{(c - kn)^2 - 4f'(1)}}{2}.$$

对任意的  $c \in R$ , 在区域  $\Omega = \{(q, p) \mid 0 < q < 1, p > 0\}$  中有一条进入  $B(1, 0)$  的稳定流形  $\Gamma_c^+$ :  $p = p(q)$  且在点  $B(1, 0)$  的切线斜率为  $\tan \theta_c^+ = \lambda_2(c) < 0$ . 注意到

$$\frac{\partial(\tan \theta_c^+)}{\partial c} = \frac{1}{2} - \frac{c - kn}{2\sqrt{(c - kn)^2 - 4f'(1)}} > 0.$$

于是  $\tan(\theta_c^+)$  关于  $c$  单调增加, 从而根据微分方程的比较定理, 对任意  $c_1, c_2 \in R$ , 当  $c_1 > c_2$  时,  $\Gamma_{c_2}^+$  位于  $\Gamma_{c_1}^+$ .

### 3 单调波前解的存在性

众所周知, 函数  $q(\xi) = (\xi = x + ct)$  称为 (1) 的波前解, 倘若  $q(\xi)$  连续并且  $q(-\infty) = \alpha$ ,  $q(+\infty) = \beta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , 即在相平面上对应于两奇点间的连结轨道. 本节首先研究 (1) 的单调递减波前解的存在性, 然后指出单调递减波前解的存在性.

**命题 3.1** 当  $c > m_1$  时, 方程 (1) 存在满足条件  $q(-\infty) = 0$ ,  $q(+\infty) = a$  的单调递增的波前解, 其中  $m_1$  由以下的 (10) 式确定.

**证明** 由  $O(0, 0)$  的奇点性质知, 在  $\Omega = \{(q, p) \mid 0 < q < 1, p > 0\}$  中有一条负向进入它的不稳定流形  $\Gamma_c^-$ . 由于 (5) 在相平面  $(p, q)$  的条形区域  $0 < q < a$  内无奇点, 由微分方程定性理论知,  $\Gamma_c^-$  一定不与  $q$  轴在  $(0, a)$  内相交. 由于  $q$  关于时间在第一象限单调增加, 因此也一定不与  $p$  轴相交.

以下考虑直线  $L_1: p = u_0(q - a)$ , 其中斜率  $u_0 < 0$  待定, 使得在  $L_1$  上系统 (5) 定义的方向场满足

$$\frac{dp}{dq} = cq^{m-1} - knq^{n-1} - \frac{q^l f(q)}{u_0(q - a)} < u_0. \quad (7)$$

即

$$(q - a)u_0 - (q - a)(cq^{m-1} - knq^{n-1})u_0 + q^l f(q) > 0. \quad (8)$$

显然, 对于 (8) 式左边所定义的关于的二次三项式, 倘若

$$\begin{cases} (q-a)(cq^{m-1} - knq^{n-1}) < 0, \\ (q-a)^2(cq^{m-1} - knq^{n-1})^2 - 4(q-a)q^l f(q) > 0. \end{cases} \quad (9)$$

成立, 则 (8) 式左边存在一个负实根. 就取此负实根作为我们需要的  $u_0$  值. 对于此  $u_0$  一定存在  $\epsilon > 0$  使得  $\Gamma_c^-$  在  $U(O(0,0), \epsilon)$  内不与  $L_1$  相交. 显然, 如果不等式

$$c > 2\sqrt{\frac{q^{l-2m+2}f(q)}{q-a}} + knq^{n-m}$$

满足, 则 (9) 式必成立. 兹记

$$m_1 = \max_{\epsilon < q < a} \left( 2\sqrt{\frac{q^{l-2m+2}f(q)}{q-a}} + knq^{n-m} \right). \quad (10)$$

于是, 当  $c > m_1$  时, 由  $\Gamma_c^-$ ,  $L$  和  $q$  轴所围成的三角形区域为行波方程组 (5) 的一个正向不变区域. 因此既不可能与直线  $L_1$  相交, 也不可能与三角形的两直角边 ( $p$  轴与  $q$  轴上一线段) 相交. 换言之,  $\Gamma_c^-$  必正向进入稳定结点  $A(a, 0)$ . 这就证明了联结  $O(0, 0)$  与  $A(a, 0)$  的连结轨道的存在性.

**命题 3.2** 当  $c > m_2$  时, 方程 (1) 存在满足条件  $q(-\infty) = a, q(+\infty) = 1$  的单调递增的波前解, 其中  $m_2$  由以下的 (14) 式确定.

**证明** 由于  $B(1, 0)$  为鞍点并且在  $\Omega$  中有一条进入它的稳定流形  $\Gamma_c^+$ , 由于行波方程组 (5) 在相平面  $(q, p)$  的条形区域  $a < q < 1$  内无奇点, 同样由常微分方程定性理论知识知,  $\Gamma_c^+$  一定不与  $q$  轴在  $AB$  内相交,  $\Gamma_c^+$  也不可能与  $BC$  ( $BC$  为过点  $B$  且垂直于  $q$  轴的一条线段) 相交.

以下考虑直线  $L_2: p = u_1(q - a)$ , 其中斜率  $u_1 > 0$  待定, 使得在  $L_2$  上, 系统 (5) 定义的方向场满足

$$\frac{dp}{dq} = cq^{m-1} - knq^{n-1} - \frac{q^l f(q)}{u_1(q-a)} > u_1, \quad (11)$$

即

$$u_1^2(q-a) - (cq^{m-1} - knq^{n-1})(q-a)u_1 + q^l f(q) < 0. \quad (12)$$

对于 (12) 式左边所定义的关于  $u_1$  的二次三项式, 倘若

$$\begin{cases} (cq^{m-1} - knq^{n-1})(q-a) > 0, \\ (q-a)^2(cq^{m-1} - knq^{n-1})^2 - 4(q-a)q^l f(q) > 0. \end{cases} \quad (13)$$

成立, 则 (12) 式的左边存在一个正实根, 就取此正实根作为我们需要的  $u_1$  值.

显然, 如果不等式

$$c > 2\sqrt{\frac{q^{l-2m+2}f(q)}{q-a}} + knq^{n-m}$$

满足, 则 (12) 式必成立. 兹记

$$m_2 = \max_{a < q < 1} \left( 2\sqrt{\frac{q^{l-2m+2}f(q)}{q-a}} + knq^{n-m} \right). \quad (14)$$

于是, 当  $c > m_2$  时, 由直线  $L_2$ ,  $AB$  和过  $B$  垂直  $q$  轴的直线所围成的三角形区域为行波方程组 (5) 的一个负向不变区域. 因此  $\Gamma_c^+$  既不可能与直线  $L_2$  相交, 也不可能与三角形的两直角边相交. 换言之,  $\Gamma_c^+$  必负向进入不稳定结点  $A(a, 0)$ . 这样就证明了联结  $A(a, 0)$  与  $B(1, 0)$  的连结轨道的存在性.

**引理 3.3** 存在  $c > 0$ , 使得系统 (5) 在点  $B$  的稳定流形  $\Gamma_c^+$  在  $[0, a]$  内与  $q$  轴相交.

**证明** 当  $k < 0$  时, 欲使 (12) 成立, 则只需

$$u_1^2(q-a) - cq^{m-1}(q-a)u_1 + q^l f(q) < 0. \quad (15)$$

成立. 注意到当  $c > 2\sqrt{\frac{q^{l-2m+2}f(q)}{q-a}}$  时, (15) 的左边有一个正实根. 兹记

$$S = \sup_{a < q < 1} 2\sqrt{\frac{q^{l-2m+2}f(q)}{q-a}}.$$

因此, 只要取  $c > S$  时, 命题 3.2 成立. 当  $k > 0$  时, 欲使 (12) 成立, 则只需

$$u_1^2(q-a) - (c-kn)q^{m-1}(q-a)u_1 + q^l f(q) < 0. \quad (16)$$

注意到当  $c > 2\sqrt{\frac{q^{l-2m+2}f(q)}{q-a}} + kn$  时, (16) 的左边有一个正实根. 因此, 只需取  $c > S + kn$  时, 命题 3.2 成立.

综上所述, 当  $c > S + \frac{kn+|kn|}{2}$  时, 一定有联结  $A(a, 0)$  与  $B(1, 0)$  的连结轨道.

兹记  $I = \inf_{a < q < 1} 2\sqrt{\frac{q^{l-2m+2}f(q)}{q-a}}$ ,  $W = \{c \mid \text{使得 } \Gamma_c^+ \text{ 负向进入 } A(a, 0)\}$ .

由前述可知, 当  $c < I + \frac{kn+|kn|}{2}$  时,  $\Gamma_c^+$  不会从负向进入  $A(a, 0)$ . 因此  $W$  有下界. 从而  $W_* = \inf W$  存在.

显然  $W_* \in W$  且  $W_* \geq I + \frac{kn+|kn|}{2} > 0$ . 因此, 当  $c > 0$  且  $0 < W_* - c \ll 1$  时,  $\Gamma_c^+$  一定与  $q$  轴在  $[0, a]$  内相交.

事实上, 若  $\Gamma_c^+$  不与  $q$  轴在  $[0, a]$  内相交. 由轨线关于参数的连续依赖性知  $\frac{dq}{dt}$  至少有两个零点  $q_1, q_2$ . 即

$$0 = cq_i^{m-1} - knq_i^{n-1} - \frac{q_i^l f(q)}{p(q_i)}, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

由 (17) 得

$$(cq_i^{m-1} - knq_i^{n-1})p(q_i) = p_i^l f(q_i). \quad (18)$$

因此, 当  $i = 1$  时, 由 (18) 可得

$$k > \frac{c}{n} q_1^{m-n}. \quad (19)$$

当  $i = 2$  时, 由 (18) 可得

$$k < \frac{c}{n} q_2^{m-n}. \quad (20)$$

由 (19), (20) 得  $\frac{c}{n} q_1^{m-n} < \frac{c}{n} q_2^{m-n}$ . 产生矛盾, 所以命题成立.

**引理 3.4** 当  $c < 0$ ,  $|c| \gg 1$  时, 系统 (5) 在点  $B$  的稳定流形  $\Gamma_c^+$  在  $(0, a]$  内不与  $q$  轴相交.



**证明** 设  $c < 0$ , 如果  $q \geq a$ , 则  $\frac{dp}{dq} \leq cq^{m-1} - knq^{n-1}$ . 两边积分得

$$p(1) - p(q) \leq \frac{c}{m}(1 - q^m) - kn(1 - q^n),$$

即

$$p(q) \geq -\frac{c}{m}(1 - q^m) + kn(1 - q^n) > 0.$$

特别地  $p(a) \geq -\frac{c}{m}(1 - a^m) + kn(1 - a^n) > 0$ . 因此,  $\Gamma_c^+$  在  $[a, 1)$  内不与  $q$  轴相交.

以下考虑直线  $L_3: p = u_2q$ , 其中斜率  $b > 0$  待定, 使得在  $L_3$  上, 系统 (5) 定义的方向场满足

$$\frac{dp}{dq} = cq^{m-1} - knq^{n-1} - \frac{q^l f(q)}{u_2q} < u_2, \quad (21)$$

即

$$qu_2^2 - (cq^m - knq^n)u_2 + q^l f(q) > 0.$$

由于  $q > 0$ , 因此, 对于  $c < 0, |c| \gg 1$ , 总存在  $b > 0$  使得 (21) 成立. 同时有

$$u_2a < -\frac{c}{m}(1 - a^m) + kn(1 - a^n),$$

即在点  $A$  处  $\Gamma_c^+$  严格位于  $L_3$  的上方. 所以, 当  $c < 0$  且  $|c| \gg 1$  时,  $\Gamma_c^+$  在  $(0, a]$  内不与  $q$  轴相交.

**定理 3.5** 当且仅当  $c = c_*$  时, 方程 (1) 存在唯一满足  $q(-\infty) = 0, q(+\infty) = 1$  的单调递增波前解 (其中  $c = c_*$  在以下证明中给出).

**证明** 兹记  $\bar{c} = \{c \mid \Gamma_c^+ \text{ 在 } [0, a] \text{ 内与 } q \text{ 轴相交}\}$ . 由引理 3.3 知,  $\bar{c}$  非空. 由引理 3.4 知

(1) 若对某个  $c < 0$  且  $|c| \gg 1$ ,  $\Gamma_c^+$  过  $O(0, 0)$  点, 则存在性成立.

(2) 若对所有的  $c < 0$  且  $|c| \gg 1$ , 所对应的  $\Gamma_c^+$  都不过点  $O(0, 0)$ , 则  $\bar{c}$  有下界. 兹记  $c_* = \inf \bar{c}$ . 由于  $n > m \geq 3, l \geq 2$ , 由轨线关于参数的连续依赖性知,  $c_* \in \bar{c}$ . 于是  $\Gamma_{c_*}^+$  在  $[0, a]$  内不与  $q$  轴相交. 若  $\Gamma_{c_*}^+$  不负向进入  $O(0, 0)$ , 则利用命题 3.2 中同样的方法可证, 存在  $c$ , 当  $0 < c_* - c \ll 1$  时,  $\Gamma_c^+$  一定与  $q$  轴在  $[0, a]$  内相交. 此与  $c_*$  的定义矛盾. 所以  $\Gamma_{c_*}^+$  一定负向进入  $O(0, 0)$ .

下证唯一性.

兹记  $\hat{c} = \{c \mid \text{使得 } \Gamma_c^+ \text{ 在 } [0, a] \text{ 内不与 } q \text{ 轴相交}\}$ . 由引理 3.4 知,  $\hat{c}$  不空. 由引理 3.3 知  $\hat{c}$  有上界. 记  $c^* = \sup \hat{c}$ . 由于  $\Gamma_c^+$  关于  $c$  单调下降, 则  $c^* \leq c_*$ . 若  $c^* < c_*$ , 则对于任意的  $c: c^* < c < c_*$ , 由  $c^*$  的定义知  $\Gamma_c^+$  在  $(0, a]$  内与  $q$  轴相交. 由  $c_*$  的定义知  $\Gamma_c^+$  在  $[0, a]$  内不与  $q$  轴相交. 产生矛盾, 因此一定有  $c^* = c_*$ . 所以唯一性显然成立.

用类似的方法我们可讨论单调递减波前解的存在性, 由于所有结论都可用上面的方法推出, 因此只给出相应结果.

**命题 3.1\*** 当  $c < m'_1$  时, 方程 (1) 存在满足条件  $q(+\infty) = 0, q(-\infty) = a$  的单调递减的波前解. 其中  $m'_1 = \inf_{\epsilon' < q < a} (-2\sqrt{\frac{q^{l-2m+2}f(q)}{q-a}} + knq^{n-m})$  ( $\epsilon'$  的意义同命题 3.1 中的  $\epsilon$ ).

**命题 3.2\*** 当  $c < m'_2$  时, 方程 (1) 存在满足条件  $q(+\infty) = a, q(-\infty) = 1$  的单调递减的波前解. 其中  $m'_2 = \inf_{a < q < 1} (-2\sqrt{\frac{q^{l-2m+2}f(q)}{q-a}} + knq^{n-m})$ .

**引理 3.3\*** 存在  $c < 0$  使得系统 (5) 的奇点  $B$  的不稳定流形  $\Gamma_c^-$  在  $[0, a]$  内与  $q$  轴相交.

**引理 3.4\*** 当  $c \gg 1$  时, 系统 (5) 的奇点  $B$  的不稳定流形  $\Gamma_c^-$  在  $(0, a]$  内不与  $q$  轴相交.

**定理 3.5\*** 当且仅当  $c = c'_*$  时, 方程 (1) 存在唯一满足条件  $q(-\infty) = 1, q(+\infty) = 0$  的单调递减的波前解. 其中  $c'_* = \sup \{c \mid \Gamma_c^- \text{ 在 } [0, a] \text{ 内与 } q \text{ 轴相交} \}$ .

#### 4 振荡波前解的存在性

**命题 4.1** 存在  $c > 0$ , 使得方程 (1) 存在满足条件  $q(-\infty) = a, q(+\infty) = 1$  的振荡波前解.

**证明** 由引理 3.3 知, 存在  $c_0 > 0$  且  $c_0 < W_*$  使得  $\Gamma_{c_0}^+$  与  $q$  轴在  $[0, a]$  内相交,  $\Gamma_{c_0}^-$  ( $\Gamma_{c_0}^-$  为点  $B$  的不稳定流形) 有三种可能:

(i) 不与  $q$  轴在  $(0, a)$  内相交.

(ii) 与  $q$  在  $(0, a)$  内相交, 且与  $q$  轴的最小交点大于  $\Gamma_{c_0}^+$  与  $q$  轴的最小交点.

(iii) 与  $q$  轴在  $(0, a)$  内相交, 且与  $q$  轴的最小交点小于  $\Gamma_{c_0}^+$  与轴的最小交点.

若为 (i), (iii) 两种情况, 则  $\Gamma_{c_0}^+$  必然盘旋趋于点  $A(a, 0)(t \rightarrow -\infty)$ . 此时命题成立. 若为情况 (ii), 由于  $\Gamma_c^+, \Gamma_c^-$  均关于参数  $c$  单调下降. 由轨道关于参数的连续依赖性及引理 3.4\* 知, 一定存在  $c > c_0$ , 使得 (i) 出现. 所以命题成立.

同理可得如下命题:

**命题 4.2** 存在  $c > 0$ , 使得方程 (1) 存在满足条件  $q(+\infty) = a, q(-\infty) = 1$  的振荡波前解.

**命题 4.3** 存在  $c < 0$ , 使得方程 (1) 存在满足条件  $q(+\infty) = a, q(-\infty) = 0$  的振荡波前解.

**命题 4.4** 存在  $c < 0$ , 使得方程 (1) 存在满足条件  $q(-\infty) = a, q(+\infty) = 0$  的振荡波前解.

#### 参考文献:

- [1] 王明新. 退化抛物型方程的行波解 [J]. 数学年刊 (A 辑), 1991, **12**(5): 627–635.  
WANG Ming-xin. *Traveling wave solutions to degenerate parabolic equations* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 1991, **12**(5): 627–635. (in Chinese)
- [2] HERRERO M A, VÁQUEZ J L. *Thermal waves in absorbing media* [J]. J. Differential Equations, 1988, **74**: 218–233.
- [3] de Pablo A, SÁNCHEZ A. *Global travelling waves in reaction-convection-diffusion equations* [J]. J. Differential Equations, 2000, **165**: 377–413.
- [4] 张芷芬. 等. 微分方程定性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1985.  
ZHANG Zhi-fen. et al. *Qualitative Theory in Differential Equations* [M]. Beijing: Science Press, 1985. (in Chinese).

### Existence of Front Waves in a Reaction-Diffusion Equation

ZHANG Jian-ming

(Dept. of Math., Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** In the paper, we study the monotone and oscillatory front wave solutions in a set of reaction-diffusion equations and obtain some sufficient conditions which guarantee the existence of the front wave solutions.

**Key words:** reaction-diffusion equations; travelling wave solutions; the existence of front wave solutions.