第26卷第2期 数学研究与评论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0311-06 **文献标识码**: **A**

F- 调和映照的不存在性定理

刘建成 [1], 廖蔡生 [2]
(1. 西北师范大学数学与信息科学学院, 甘肃 兰州 730070; 2. 华东师范大学数学系, 上海 200062)
(E-mail: liujc@nwnu.edu.cn)

摘　要: 本文主要讨论一类 F- 调和映照的不存在性问题, 从而得到相应的 Liouville 型定理.

关键词: F- 调和映照; F- 能量慢发散; F- 应力 - 能量张量.
MSC(2000): 58E20
中图分类: O186.16

1 引言及主要结果

令 $F:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是 C^2- 函数, 满足对任意 $t\in(0,\infty)$, $F'(t)>0$. 设 (M,g) 是 m 维完备非紧无边界黎曼流形, (N,h) 是 n 维完备黎曼流形. $u:M\to N$ 是一光滑映照. 对任何紧致区域 $D\subseteq M$, 在 [1] 中, M. Ara 定义了 u 在 D 上的 F - 能量 (泛函) 为:

$$E_F(u)=\int\limits_D F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\,v_g,$$

其中 $|\mathrm{d}u|$ 是微分 $\mathrm{d}u\in\Gamma(T^*M\otimes u^{-1}TN)$ 关于度量 g 和 h 的 Hilbert-Schmidt 模, v_g 是 M 的黎曼体积元. 称光滑映照 u 为 F- 调和映照, 如果对任何紧致区域 $D\subseteq M$, u 都是 F- 能量泛函 $E_F(u)$ 的临界点.

当分别取 $F(t)=t,\ (2t)^{p/2}/p,(1+2t)^\alpha(\alpha>1,\ m=2)$ 和 e^t 时, F- 能量分别是熟知的能量, p- 能量, α- 能量 [2] 和指数能量. 由此可见, F- 调和映照是对调和映照, p- 调和映照和指数调和映照的统一和推广. 作为一类新的变分问题, 同时又将数学家和物理学家所关心的诸调和映照统一在其中, 因此, 研究 F- 调和映照的重要意义将是明显的.

文 [1] 对 F- 调和映照的几何理论进行了系统的研究, 关于其稳定性和非稳定性的研究可参考文 [1], [3], [4] 及 [5]. 本文主要讨论 F- 调和映照的不存在性问题.

当 $F(t)=t$, 即调和映照情形时, Sampson 猜测: 不存在从完备单连通黎曼流形 M ($\dim M\geq 3$) 到任何黎曼流形的能量有限的非常值调和映照. Sealey[6] 证明了: 当 M 是欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 和双曲空间 $\mathbf{H}^m$ 时, 结论成立. 胡和生 [7] 将能量有限的条件减弱为能量慢发散, 证明了同样的结论. 忻元龙 [8,9] 在能量慢发散的假定下, 证明了更一般的结果, 即当 M 的截面曲率变化不大时, 结论成立. 后来, 张希 [10] 将忻元龙的结果推广到 p- 调和映照 (此时 $F(t)=(2t)^{p/2}/p$) 的情形, 得到了类似的结果. 本文主要讨论 F- 调和映照的类似问题. 应用 [1] 中发展出来的 F- 应力 - 能量张量和黎曼几何中的 Hessian 比较定理以及丁青在 [11] 中得到的 Laplace 比较定理, 证明了下面关于 F- 调和映照的 Liouville 型定理. 得到

收稿日期: 2004-03-28
基金项目: 国家自然科学基金 (10571129), 数学天元基金 (A0324662) 和西北师范大学青年教师科研基金.

定理 A 设 M 是完备，单连通具非正截曲率 K_M 的 $m(m>1)$ 维黎曼流形，它的截曲率 K_M 满足 $-a^2 \le K_M \le -b^2, a, b$ 是正常数， N 是任何光滑黎曼流形. 若 $u: M \to N$ 是 F- 能量慢发散的 F- 调和映照，则当 $(m-1)bF(t)-2taF'(t) \ge 0$ 时， u 必为常值映照.

事实上，当分别取 $F(t)=t$ 和 $F(t)=(2t)^{p/2}/p$ 时，即调和映照和 p- 调和映照情形时，定理 A 中条件 $(m-1)bF(t)-2taF'(t) \ge 0$ 分别等价于 [9] 中条件 $\frac{m-1}{2}b-a \ge 0$ 和 [10] 中条件 $\frac{m-1}{p}b-a \ge 0$. 可见，定理 A 是对 [9], [10] 中结果的推广和统一.

定理 B 设 (M,g) 是 m 维黎曼流形, 它的截曲率 K_M 满足 $-a^2 \le K_M \le 0 (a>0)$, Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}_M \le -b^2 (b>0)$. 设 u 是从 M 到任何黎曼流形 (N,h) 的 F- 调和映照，且 F- 能量慢发散. 那末，当 $bF(t)-2taF'(t) \ge 0$ 时， u 必是常值映照.

当 $F(t)=t$ 时, 这里的条件 $bF(t)-2taF'(t) \ge 0$ 等价于 [9] 中条件 $b \ge 2a$. 同样, 定理 B 是对 [9] 中结果的重要推广.

映照 u 称为具有 F- 能量慢发散 (它是对能量有限条件的减弱), 即存在 M 上满足

$$\int_{R_1}^{\infty} \frac{1}{r\psi(r)}\,\mathrm{d}r=+\infty, \quad (R_1>0)$$

的正函数 $\psi(r)$, 使成立 $\lim_{R\to\infty}\int_{B_R(O)} \frac{F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})}{\psi(r(x))}\,v_g < +\infty$, 其中 $r(x)$ 是到某固定点 $O \in M$ 的距离函数， $B_R(O)$ 是 M 中以 O 为中心， R 为半径的测地球.

2 两个引理

记 M 和 N 上的 Levi-Civita 联络分别为 ∇ 和 ${}^N\nabla$, $u^{-1}TN$ 上的诱导联络记为 $\widetilde{\nabla}$, 即对 M 上的光滑切向量场 X 及 $u^{-1}TN$ 的截面 W, $\widetilde{\nabla}_X W={}^N\nabla_{u_* X}W$. 选取 M 上的局部幺正标架场 $\{e_i\}_{i=1}^m$, 定义映照 $u:(M,g)\to(N,h)$ 的 F- 张力场 [1] $\tau_F(u)$ 为:

$$\begin{aligned}\tau_F(u)&=\sum_{i=1}^m\{\widetilde{\nabla}_{e_i}(F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})u_*e_i)-F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})u_*\nabla_{e_i}e_i\}\\&=F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\tau(u)+u_*\{\mathrm{grad}(F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}))\},\end{aligned}$$

其中 $\tau(u)=\sum_{i=1}^m(\widetilde{\nabla}_{e_i}u_*e_i-u_*\nabla_{e_i}e_i)$ 是 u 的张力场. 熟知，u 是 F- 调和映照当且仅当 $\tau_F(u)\equiv 0$[1].

对光滑映照 $u:(M^m,g)\to(N^n,h)$, M. Ara 在 [1] 中定义了 u 的相应于 F- 能量泛函的 F- 应力 - 能量张量为

$$S_F(u)=F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\cdot g-F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\cdot u^*h,$$

它是 M 上的二阶对称张量. 它与 F- 张力场 $\tau_F(u)$ 之间存在如下关系.

引理 1[1] 对 M 上的任何光滑向量场 X, 都有

$$(\mathrm{div}S_F(u))(X)=-h(\tau_F(u),u_*X).$$

引理 2 设 $D\subseteq M$ 是一紧致区域，它的边界 ∂D 是 M 中光滑超曲面，则对 C^2- 映照 $u:$

$(M,g)\to(N,h)$ 及 M 上的任一光滑向量场 X, 都有

$$\int_{\partial D}F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})g(X,\mathbf{n})\ \sigma_g=\int_{\partial D}F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})h(u_*X,u_*\mathbf{n})\ \sigma_g+\int_D(\mathrm{div}S_F(u))(X)\ v_g+\int_D\langle S_F(u),\nabla X\rangle v_g,\tag{1}$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 ∂D 的单位法向量， σ_g 是边界区域 ∂D 的体积元.

证明 设 $\{e_i\}_{i=1}^m$ 是 M 上局部幺正法标架场，且定义 $\nabla X(e_i,e_j)=\langle\nabla_{e_i}X,e_j\rangle$, 则

$$\begin{aligned}\nabla_XF(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})&=F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\nabla_X(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\\&=F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\{\mathrm{div}(h(u_*X,u_*e_i)e_i)-h(u_*X,\tau(u))-\langle\nabla X,u^*h\rangle\}\\&=\mathrm{div}(F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})h(u_*X,u_*e_i)e_i)-h(u_*X,\tau_F(u))-\langle\nabla X,F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\cdot u^*h\rangle.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})X)&=(\nabla_{e_i}F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}))g(X,e_i)+F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})g(\nabla_{e_i}X,e_i)\\&=\nabla_XF(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})+F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\langle\nabla X,g\rangle\\&=\mathrm{div}(F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})h(u_*X,u_*e_i)e_i)-h(u_*X,\tau_F(u))+\langle\nabla X,S_F(u)\rangle.\end{aligned}\tag{2}$$

现在，对 M 中紧致区域 D, 沿 ∂D 取 M 的局部幺正法标架场 $\{e_i\}$, 使得 $e_1,\cdots,e_{m-1}\in\Gamma(T\partial D)$, 而 e_m 是 ∂D 的单位法向量 $\mathbf{n}$. 将 (2) 式在 D 上积分，并利用 Green 定理即完成引理 2 的证明.

3 定理的证明

定理 A 的证明 令 $D=B_R(x_0)$ 是 M 中以 $x_0\in M$ 为中心， R 为半径的测地球. 再令 $X=r\frac{\partial}{\partial r}\in T_{x_0}M$ ($\frac{\partial}{\partial r}$ 表示单位径向向量场， $r=r(x)$ 为到 x_0 的距离函数). 取局部幺正法标架场 $\{e_1,\cdots,e_{m-1},\frac{\partial}{\partial r}\}$, 将 $D=B_R(x_0)$ 及 $X=r\frac{\partial}{\partial r}$ 应用到公式 (1) 中，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{B_R(x_0)}(\mathrm{div}S_F(u))(X)\ v_g+\int_{B_R(x_0)}\langle S_F(u),\nabla X\rangle\ v_g\\&=\int_{\partial B_R(x_0)}F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})g(X,\mathbf{n})\ \sigma_g-\int_{\partial B_R(x_0)}F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})h(u_*X,u_*n)\ \sigma_g\\&=R\int_{\partial B_R(x_0)}F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\ \sigma_g-R\int_{\partial B_R(x_0)}F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})h(u_*\frac{\partial}{\partial r},u_*\frac{\partial}{\partial r})\ \sigma_g\\&\le R\int_{\partial B_R(x_0)}F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\ \sigma_g.\end{aligned}\tag{3}$$

我们来计算 (3) 式左端第二项的被积函数 $\langle S_F(u),\nabla X\rangle$. 为此，利用 M 上的局部幺正标架场 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m=\{e_1,\cdots,e_{m-1},\frac{\partial}{\partial r}\}$ 直接计算，我们得到

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X=\frac{\partial}{\partial r},\quad \nabla_{e_i}X=r\nabla_{e_i}\frac{\partial}{\partial r}=r\mathrm{Hess}(r)(e_i,e_j)e_j,$$

$$\mathrm{div}X = 1 + r\mathrm{Hess}(r)(e_i, e_i), \quad 1 \le i \le m-1,$$

这里 Hess(·) 表示 Hessian 算子，即 $\mathrm{Hess}(r)(e_i, e_j) = \nabla_{e_j}\nabla_{e_i} r - (\nabla_{e_j} e_i) r$. 所以

$$\begin{aligned} & F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) h(u_* e_\alpha, u_* e_\beta) \cdot g(\nabla_{e_\alpha} X, e_\beta) \\ & = F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) \{ r\mathrm{Hess}(e_i, e_j) h(u_* e_i, u_* e_j) + h(u_* \tfrac{\partial}{\partial r}, u_* \tfrac{\partial}{\partial r}) \}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \langle S_F(u), \nabla X\rangle = & F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) \{ \mathrm{div}X - h(u_* e_\alpha, u_* e_\beta) \cdot g(\nabla_{e_\alpha} X, e_\beta) \} \\ = & F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) (1 + r\mathrm{Hess}(r)(e_i, e_j)) - \\ & F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) \{ |u_* \tfrac{\partial}{\partial r}|^2 + r\mathrm{Hess}(r)(e_i, e_j) h(u_* e_i, u_* e_j) \}. \end{aligned}$$

若 M 的截曲率 K_M 满足定理 A 中条件，应用 Hessian 比较定理 [9], 得到

$$\begin{aligned} \langle S_F(u), \nabla X\rangle \ge & F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) \{ 1 + (m-1)(br)\coth(br) \} - \\ & F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) \{ |u_* \tfrac{\partial}{\partial r}|^2 + (ar)\coth(ar) h(u_* e_i, u_* e_i) \} \\ \ge & F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) \{ 1 + (m-1)(br)\coth(br) \} - \\ & F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) \{ (ar)\coth(ar) |u_* \tfrac{\partial}{\partial r}|^2 + (ar)\coth(ar) h(u_* e_i, u_* e_i) \} \\ = & F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) \{ 1 + (m-1)(br)\coth(br) \} - F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) (ar)\coth(ar) |\mathrm{d}u|^2 \\ \ge & F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) + r \cdot \coth(br) \{ (m-1)b \cdot F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) - a|\mathrm{d}u|^2 F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}) \}. \end{aligned} \tag{4}$$

于是，当 $(m-1)bF(t) - 2taF'(t) \ge 0$ 时，由 (4) 式成立

$$\langle S_F(u), \nabla X\rangle \ge F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}). \tag{5}$$

由 (3) 和 (5) 及引理 1, 对 F- 调和映照 u, 有

$$R\int_{\partial B_R(x_0)} F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\ \sigma_g \ge \int_{B_R(x_0)} F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\ v_g. \tag{6}$$

反设 $u: (M^m, g) \to (N^n, h)$ 是一非常值 F- 调和映照，即 $|\mathrm{d}u|^2$ 不恒为 0, 则存在 $R_0 > 0$, 使当 $R > R_0$ 时,

$$\int_{B_R(x_0)} F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\ v_g \ge C_0,$$

这里 C_0 是一正常数. 则由 (6) 式得到

$$\int_{\partial B_R(x_0)} F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\ \sigma_g \ge \frac{C_0}{R}. \tag{7}$$

现在，如果 u 的 F- 能量慢发散，那么，(7) 式将意味着

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{B_R(x_0)}\frac{F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})(x)}{\psi(r(x))}\,v_g &= \int_0^\infty\frac{dR}{\psi(R)}\int_{\partial B_R(x_0)}F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\,\sigma_g\\ &\geq C_0\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}R}{R\psi(R)}\geq C_0\int_{R_0}^\infty\frac{\mathrm{d}R}{R\psi(R)}=\infty.\end{aligned}$$

这与 u 的 F- 能量慢发散的假设相矛盾，所以 u 一定是常值映照. □

定理 B 的证明　继续沿用定理 A 的证明中的记号，只是对 $X=r\frac{\partial}{\partial r}$ 运用其散度的另一种形式，即

$$\mathrm{div}X=1+r\Delta r.$$

由于 M 的 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}_M\leq -b^2$, 利用 Laplace 比较定理 [11], 知

$$\Delta r\geq b\cdot\coth(br),$$

于是

$$\begin{aligned}\langle S_F(u),\nabla X\rangle\geq&F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\{1+(br)\coth(br)\}-\\ &F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\{|u_*\tfrac{\partial}{\partial r}|^2+(ar)\coth(ar)h(u_*e_i,u_*e_i)\}\\ \geq&F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\{1+(br)\coth(br)\}-\\ &F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\{(ar)\coth(ar)|u_*\tfrac{\partial}{\partial r}|^2+(ar)\coth(ar)h(u_*e_i,u_*e_i)\}\\ =&F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\{1+(br)\coth(br)\}-F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})(ar)\coth(ar)|\mathrm{d}u|^2\\ \geq&F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})+r\cdot\coth(br)\{b\cdot F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})-a|\mathrm{d}u|^2F'(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2})\}.\end{aligned}\tag{8}$$

于是，当 $bF(t)-2taF'(t)\geq 0$ 时，由 (8) 式成立

$$\langle S_F(u),\nabla X\rangle\geq F(\frac{|\mathrm{d}u|^2}{2}).\tag{9}$$

由于 u 是 F- 调和映照，根据引理 1 知 $\mathrm{div}S_F(u)=0$. 将 $D=B_R(x_0)$ 及 $X=r\frac{\partial}{\partial r}$ 应用到公式 (1) 中，结合 (9) 式，与定理 A 的证明类似地我们得到 u 为常值映照. □

致谢　对导师沈纯理教授和虞言林教授的悉心指导和严格要求，谨表谢意.

参考文献:

[1] ARA M. *Geometry of F-harmonic maps* [J]. Kodai Math. J., 1999, **22**: 243–263.

[2] SACKS J, UHLENBECK K. *The existence of minimal immersions of 2-spheres* [J]. Ann. Math., 1981, **113**: 1–24.

[3] ARA M. *Stability of F-Harmonic maps into pinched manifolds* [J]. Hiroshima Math. J., 2000, **31**: 171–181.

[4] ARA M. *Instability and nonexistence theorems for F-Harmonic maps* [J]. Illinois J. Math., 2001, **45**(2): 657–680.

[5] 李锦堂. 正拼挤流形的 F- 调和映照 [J], 数学学报, 2003, **46**(4): 811–814.
LI Jin-tang. *F-Harmonic maps for positively curved manifolds* [J]. Acta Math. Sinica, 2003, **46**(4): 811–814. (in Chinese)
[6] SEALEY H C J. *Some conditions ensuring the vanishing of harmonic differential forms with applications to harmonic maps and Yang-Mills theory* [J]. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1982, **91**: 441–452.
[7] HU He-sheng. *A nonexistence theorem for harmonic maps with slowly divergent energy* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. B, 1984, **5**(4): 737–740.
[8] XIN Yuan-long. *Liouville Type Theorems and Regularity of Harmonic Maps* [M]. Lecture Notes in Math., 1255, Springer, Berlin, 1987.
[9] 忻元龙. 调和映照 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1995.
XIN Yuan-long. *Harmonic Maps* [M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 1995. (in Chinese)
[10] 张希. 关于 P- 调和映照的 Liouville 型定理 [J]. 数学年刊 (A 辑), 2000, **21**(1): 95–98.
ZHANG Xi. *Liouville theorems for p-Harmonic maps* [J]. Chinese Ann. Math., Ser. A, 2000, **21**(1): 95–98. (in Chinese)
[11] DING Qing. *The Dirichlet problem at infinity for manifolds of nonpositive curvature* [C]. Differential geometry (Shanghai, 1991), 49–58, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1993.

Nonexistence Theorems for F-Harmonic Maps

LIU Jian-cheng[1], *LIAO Cai-sheng*[2]
(1. College of Math. & Info. Sci., Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;
2. Dept. of Math., East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: We discuss the nonexistence problems for a large class of F -harmonic maps, and obtain the corresponding Liouville theorems.

Key words: F-harmonic maps; slowly divergent F-energy; F-stress-energy tensor.