文章编号：1000-341X(2006)02-0317-08　　**文献标识码：A**

重根牛顿变换的Julia集*

王兴元，　刘 威
（大连理工大学电子与信息工程学院，辽宁 大连　116024）

(E-mail: wangxy@dlut.edu.cn)

摘　要：作者分析了重根牛顿变换的 Julia 集理论，并利用迭代法构造了标准牛顿变换、松弛牛顿变换和重根牛顿变换的 Julia 集．采用实验数学方法，作者得出如下结论：(1) 函数 $f(z)=z^{\alpha}(z^{\beta}-1)$ 的三种牛顿变换 Julia 集的中心为原点且具有 β 倍的旋转对称性；(2) 三种牛顿变换 Julia 集的重根吸引域对 α 具有敏感的依赖性；(3) 由于 $f(z)$ 的零点 z^* 是松弛牛顿变换 $F(z)$ 的中性或斥性不动点，故松弛牛顿变换的 Julia 集中不存在单根吸引域；(4) 由于 ∞ 点不是重根牛顿变换 $F(z)$ 的不动点，故重根牛顿变换的 Julia 集中多为重根和单根吸引域；(5) 重根牛顿法受计算误差影响最小，松弛牛顿法次之，标准牛顿法最大．

关键词：标准牛顿变换；松弛牛顿变换；重根牛顿变换；Julia 集；不动点；吸引域．

MSC(2000): 28A80, 37F50

中图分类：O174.12, TP301.5

0　引言

分形这个术语是数学家Mandelbrot为描述所有尺度上复杂结构的不规则、破碎形状而创造的．他在 1975 年后相继用法文和英文出版的三本书，特别是《分形：形、机遇和维数》以及《自然界中的分形几何学》，把许多人引进了分形百花园[1,2]．目前，分形理论发展极其迅速，新成果层出不穷，用计算机绘制分形的理论与算法也日新月异，并已成为一个独立的研究方向[2--4]．牛顿变换的Julia集是分形学中一个十分诱人的问题，为揭示这种分形集的更深刻的内容，Peitgen、Wegner、Walter和Chen等人曾先后采用了迭代法和逃逸时间算法构造并研究了标准牛顿变换的Julia集[5--10]；Gilbert又从理论上分析了双根方程牛顿变换的动力学行为[11]．本文中，作者推广了Peitgen和Gilbert等人的研究工作，利用迭代法构造并研究了重根方程牛顿变换的Julia集．

1　理论与方法

1.1　标准牛顿变换

在数值分析中，求实系数方程的根可采用牛顿法．而在复平面上应用牛顿法，同样也可求出复系数方程的数值解：设 $f:C\to C$ 是复系数多项式，定义有理函数 $F:C\to C$

$$F(z)=z-f(z)/f'(z) \tag{1}$$

称 $F(z)$ 为相应于函数 $f(z)$ 的标准牛顿变换．与实系数的情形类似，如果 $f'(z)\neq 0$，则 z^* 是方程 $f(z)=0$ 的根的充分必要条件是 $F(z^*)=z^*$，即 z^* 是相应的牛顿变换函数的不动点．

收稿日期：2004-06-22
基金项目：国家自然科学基金(69974008), 辽宁省教育厅高等学校科学技术研究项目(20040081)

作为一种求根方法，标准牛顿法有一定的缺陷，当方程存在重根时标准牛顿法的收敛速度退化到线性状态．为此人们提出了松弛牛顿法和重根牛顿法，这两种方法可使在方程存在重根的情况下仍能得到至少二阶收敛的迭代性能[12].

1.2 松弛牛顿变换

当 z^* 为方程 $f(z)=0$ 的 k 重根时，标准牛顿法仅是一阶线性收敛的，为此可将式(1)修正为

$$F(z)=z-kf(z)/f'(z) \tag{2}$$

可以证明松弛牛顿法至少是二阶收敛的[12]．这种方法有着与标准牛顿法相同的优越性．同时，它也有一定
的局限性，因为一般方程根的重数在求解之前通常是不知道的．

1.3 重根牛顿变换

考虑函数

$$u(z)=f(z)/f'(z)$$

可以证明若 z^* 是方程 $f(z)=0$ 的 k 重根，则 z^* 是方程 $u(z)=0$ 的单根[12]. 这样我们对方程 $u(z)=0$ 应用牛顿迭代公式，可得

$$F(z)=z-u(z)/u'(z)=z-f(z)f'(z)\Big/\{[f'(z)]^2-f''(z)f(z)\} \tag{3}$$

重根牛顿迭代(3)也至少是二阶收敛的，而且无需事先知道方程根的重数，所以更具有普遍性意义．但是这种方法需要求 $f(z)$ 的二阶导数，相对来说增加了计算量．

1.4 重根牛顿变换的 Julia 集理论

令 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^m\,(m\geq 2)$，若 $f(\omega)=\omega$，则称ω为 f 的不动点；若存在大于 1 的最小整数 p，使 $f^p(\omega)=\omega$，则称ω是 f 的周期为 p 的周期点．令复变微商 $(f^p)'(\omega)=\lambda$，若$\lambda=0$，则称点ω为超吸引的；若 $0\leq|\lambda|<1$，则称点ω为吸引的；若$|\lambda|=1$，则称点ω为中性的；若$|\lambda|>1$，则称点ω为斥性的．

由式(1)得

$$F'(z)=f(z)f''(z)/[f'(z)]^2$$

可知对于 $f(z)=0$ 的根 z^*，若 $f'(z^*)\neq 0$，则 z^* 是 $F(z)$ 的超吸引不动点；而对 $\infty\in\hat{C}$，当 $|z|$ 较大时

$$F(z)\approx z(1-\frac{1}{m})$$

故可知∞点是 F 的不动点，又对于较大的 $|z|$

$$|F'(z)|\approx\frac{m(m-1)}{m^2}=1-\frac{1}{m}<1$$

所以∞是 F 的吸引不动点．

若 $f'(z)\neq 0$，则 z^* 是方程 $f(z)=0$ 的根的充要条件为 z^* 是松弛牛顿变换(2)的不动点．由式(2)得

$$F'(z)=1-k+kf(z)f''(z)/[f'(z)]^2$$

可知对于 $f(z)=0$ 的根 z^*，如果 $f'(z^*)\neq 0$，考虑到重根数 $k\geq 2$，则 $|F'(z)|\geq 1$，故 z^* 是 $F(z)$ 的中性或斥性不动点；而对 $\infty\in\hat{C}$，当 $|z|$ 较大时

$$F(z)\approx z(1-\frac{k}{m})$$

故可知∞点是 F 的不动点，考虑到 $k<m$，故对于较大的 $|z|$

$$|F'(z)|\approx 1-k+\frac{km(m-1)}{m^2}=1-\frac{k}{m}<1$$

所以∞是 F 的吸引不动点.

若 $f'(z)\neq 0$，则 z^* 是方程 $f(z)=0$ 的根的充要条件为 z^* 是重根牛顿变换(3)的不动点．由式(3)得

$$F'(z)=\{2[f(z)f''(z)]^2-f(z)[f'(z)]^2f''(z)-[f(z)]^2f'(z)f'''(z)\}/\{[f'(z)]^2-f(z)f''(z)\}^2$$

可知对于 $f(z)=0$ 的根 z^*，如果 $f'(z^*)\neq 0$，则 z^* 是 $F(z)$ 的超吸引不动点；而对 $\infty\in\hat{C}$，当 $|z|$ 较大时

$$F(z)\approx z(1-\frac{m}{m})=\text{有限值}$$

故可知∞点不是 F 的不动点.

记

$$A(z^*)=\{z:F^n(z)\to z^*,(n\to\infty)\}$$

表示 $f(z)$ 的零点 z^* 的吸引域，即在上述三种牛顿变换迭代下收敛于 z^* 的点集．因为 z^* 是标准牛顿变换或重根牛顿变换 F 的超吸引不动点，所以吸引域 $A(z^*)$ 是包含 z^* 的开区域.

考虑有理函数 $F(z)$ 的 Julia 集，上述多项式函数的 Julia 集理论依然成立，主要区别是，若 F 是有理函数，它的 Julia 集 J_F 不一定有界（但肯定是闭的）．但对于每一个吸引不动点 ω，J_F 都是 $A(\omega)$ 的边界，所以分析牛顿法的根的吸引域，J_F 当然是一个重要的对象．对于阶数大于 2 的高阶多项式 $f(z)$，如果 f 的零点是 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，且 $f'(\omega_i)\neq 0$，则牛顿变换 F 的 Julia 集应当是每个零点的吸引域的边界

$$J_F=\partial A(\omega_1)=\cdots=\partial A(\omega_n)$$

一个在任何一个吸引域边界上的点，也一定在其它所有吸引域的边界上，而且由于 Julia 集 J_F 是不可数的，所以这样的多重边界点是非常之多．乍看起来，这是很难想象，实际上也是相当奇异的.

定理 1[13]　Julia集 J_F 为多项式F的斥性周期点的闭包，它是不含孤立点的不可数紧子集，如果 $z\in J_F$，则 J_F 是 $\bigcup_{k=1}^{\infty}F^{-k}(z)$ 的闭包．Julia集是F的包含无穷远点在内的每一吸引不动点的吸引域的边界，而且F在 J_F 上的作用是混沌的.

1.5　构造重根牛顿变换 Julia 集的方法

构造 $f(z)$ 相应的牛顿变换Julia集的迭代法为：①将式(1)、式(2)和式(3)统一改写为

$z_{n+1}=F(z_n)$．②设定视窗$W(W\subset Z)$，$\forall z_0\in W$，计算$z_n(n=0,1,\cdots,N)$．③若$\left|F^n(z_0)\right|\le EOF$（$EOF$为误差范围，本文取$EOF=0.001$），则认为$z_{n+1}=F^n(z_0)$的值为方程$f(z)=0$的根，并根据轨道$\{F^n(z_0)\}$的收敛情况赋予$z_0$点相应的颜色：白色表示多重根的吸引域，不同彩色表示相异单根的吸引域；若$\left|F^n(z_0)\right|>EOF$，则赋予$z_0$点为黑色．④重复过程②、③，直到穷尽视窗$W$内所有的点，即可获得上述三种牛顿变换的Julia集．由定理 1 可知：有理函数的Julia集是与所有不动点相关的稳定区的边界，因此上述Julia集是按该方法所构造分形图中与各彩色区域相关的边界．本文绘图的坐标范围为：左上角(–2.0, 1.5)、右下角(2.0, –1.5)．

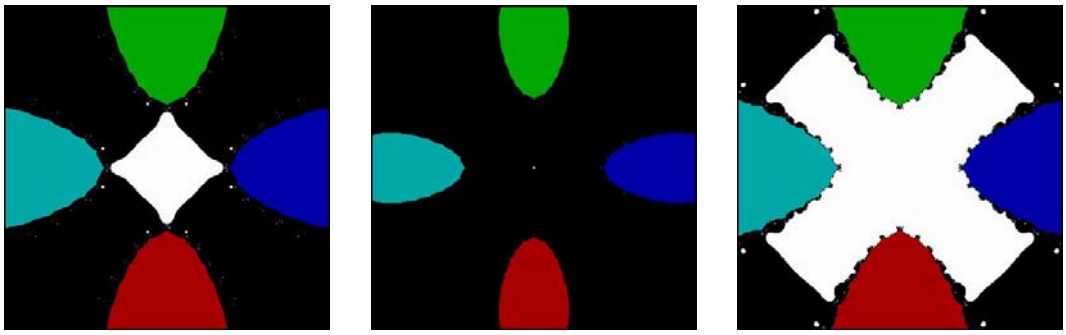
2 实验与结果

不失一般性，作者选取

$$f(z)=z^{\alpha}(z^{\beta}-1) \tag{4}$$

作为研究对象．可知方程$f(z)=0$含有α个重根和β个不同单根，重根为$\omega=0$，β个不同单根为$\omega_k=e^{i2k\pi/\beta}(k=0,1,\cdots,\beta-1)$．

2.1 三种牛顿变换的 Julia 集



(a) $\alpha=2$，$\beta=4$，$N=10$　(b) $\alpha=4$，$\beta=4$，$N=10$　(c) $\alpha=2$，$\beta=4$，$N=15$

图 1　标准牛顿变换的 Julia 集

图 1 为式(4)的标准牛顿变换的 Julia 集．图 1(b)与图 1(a)和图 1(c)比较，可见β和N不变，α值从 2 增到 4，即重根数增加，白色重根吸引域的尺寸显著缩小，几乎变成了一个点；图 1 (a)和图 1 (c)的α和β相同，而最大迭代次数N值略有不同，此时白色重根吸引域的尺寸却差别较大；图 1(a)与图 1(c)比较，可见α和β不变时，随N的变化彩色单根吸引域变化不明显；图 1(a)与图 1(b)比较，可见β和N不变时，随α的变化彩色单根吸引域变化较大．上述观察表明：重根吸引域对重根数α和最大迭代次数N具有敏感的依赖性，单根吸引域对α和β具有较敏感的依赖性．另外，由重根和单根的坐标可知，白色重根吸引域的中心位于原点处，彩色单根吸引域的中心位于相角为$2k\pi/\beta(k=0,1,\cdots,\beta-1)$的单位圆周上（图 1）．

定理 2　由迭代法构造复函数(4)的标准牛顿变换的 Julia 集，有

$$\left|F^k(z)\right|=\left|F^k(ze^{i\frac{2\pi j}{\beta}})\right| \quad (k=1,2,\cdots,N;\ j=0,1,\cdots,\beta-1)$$

证明：由式(4)可知，相应的标准牛顿变换为 $F(z)=\dfrac{(\alpha+\beta-1)z^{\beta+1}-(\alpha-1)z}{(\alpha+\beta)z^{\beta}-\alpha}$.

利用数学归纳法：

$$\because F^1(ze^{i\frac{2\pi j}{\beta}})=\frac{(\alpha+\beta-1)(ze^{i\frac{2\pi j}{\beta}})^{\beta+1}-(\alpha-1)(ze^{i\frac{2\pi j}{\beta}})}{(\alpha+\beta)(ze^{i\frac{2\pi j}{\beta}})^{\beta}-\alpha}=\frac{(\alpha+\beta-1)z^{\beta+1}-(\alpha-1)z}{(\alpha+\beta)z^{\beta}-\alpha}e^{i\frac{2\pi j}{\beta}}.$$

故有 $\left|F^1(z)\right|=\left|F^1(ze^{i\frac{2\pi j}{\beta}})\right|$. 设 $\left|F^{k-1}(z)\right|=\left|F^{k-1}(ze^{i\frac{2\pi j}{\beta}})\right|$ 成立.

$\because F^k(ze^{i\frac{2\pi j}{\beta}})=F^{k-1}[F(ze^{i\frac{2\pi j}{\beta}})]=F^{k-1}[e^{i\frac{2\pi j}{\beta}}(\dfrac{(\alpha+\beta-1)z^{\beta+1}-(\alpha-1)z}{(\alpha+\beta)z^{\beta}-\alpha})]$，令

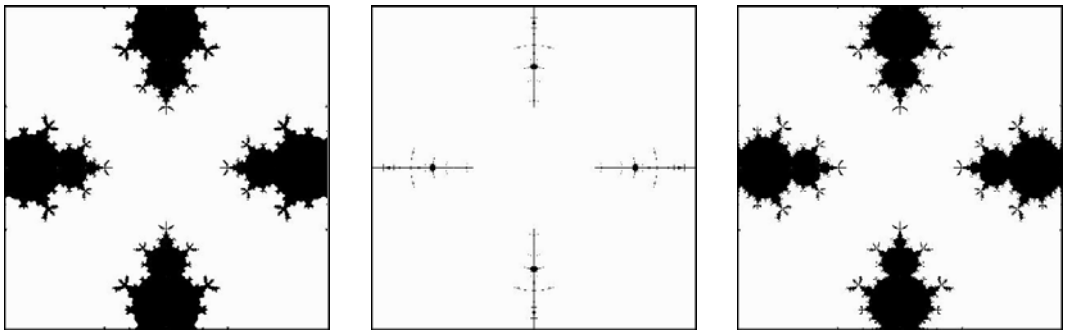
$F^1(z)=\dfrac{(\alpha+\beta-1)z^{\beta+1}-(\alpha-1)z}{(\alpha+\beta)z^{\beta}-\alpha}=z'$，则 $F^k(ze^{i\frac{2\pi j}{\beta}})=F^{k-1}(z'e^{i\frac{2\pi j}{\beta}})$.

而 $F^k(z)=F^{k-1}[F^1(z)]=F^{k-1}(z')$，又

$\because \left|F^{k-1}(z')\right|=\left|F^{k-1}(z'e^{i\frac{2\pi j}{\beta}})\right|$，$\therefore \left|f^k(z)\right|=\left|f^k(ze^{i\frac{2\pi j}{\beta}})\right|$. 故命题真.

定理 2 说明标准牛顿变换的 Julia 集具有 β 倍的旋转对称性且其中心为原点（图 1）. 同理可证松弛牛顿变换和重根牛顿变换的 Julia 集也具有 β 倍的旋转对称性（图 2、图 3）.

松弛牛顿变换的Julia集（图 2）不同与标准牛顿变换的Julia集，其只有黑白两种颜色，也就是说：$\forall\, z_0\in W$，$\exists F^n(z_0)\to 0$或∞. 这是因为方程 $f(z)=0$ 的零点 z^* 是松弛牛顿变换函数 $F(z)$ 的中性或斥性不动点，所以此时不存在彩色单根吸引域. 另外，图 2(b)与图 2(a)和图 2(c)比较，可见 β 不变时随着重根数 α 的变化，白色重根吸引域变化明显；图 2(a)与图 2(c)比较，可见 α 和 β 不变时白色重根吸引域或黑色发散区对最大迭代次数N的变化不明显.

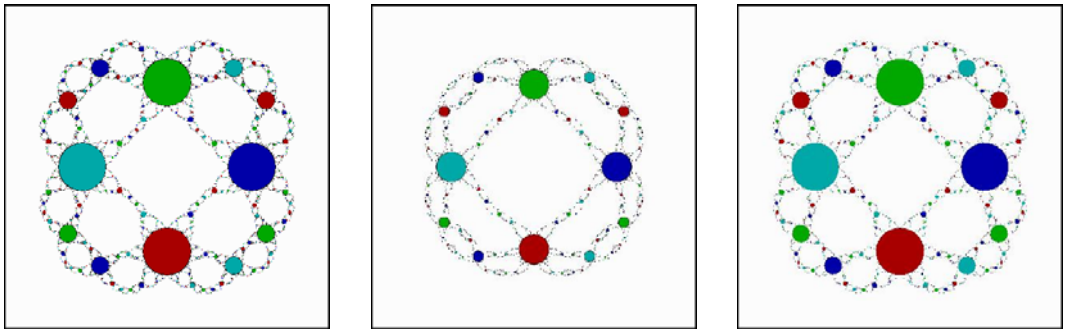


(a) $\alpha=2$, $\beta=4$, $N=10$　(b) $\alpha=4$, $\beta=4$, $N=10$　(c) $\alpha=2$, $\beta=4$, $N=15$

图 2　松弛牛顿变换的 Julia 集

观察图 3 给出的重根牛顿变换的Julia集，可见图中多为白色和彩色区域，这表明：对大多数$z_0\in W$，$\exists F^n(z_0)\to 0$. 这是因为∞点不是重根牛顿变换 $F(z)$ 的不动点. 可见重根牛顿迭代法具有较高

的收敛阶次，即使选定的初始点z_0与根的距离较大也能很快地收敛到要求的精度以内，这反映出重根牛顿迭代法求根的优越性．同时，也可观察到白色重根吸引域对α具有敏感的依赖性（图 3(b)与图 3(a)和图 3(c)比较）；彩色单根吸引域对最大迭代次数N的变化不明显（图 3(a)与图 3(c)比较）．



(a) $\alpha=2$，$\beta=4$，$N=10$　(b) $\alpha=4$，$\beta=4$，$N=10$　(c) $\alpha=2$，$\beta=4$，$N=15$

图 3　重根牛顿变换的 Julia 集

2.2　计算误差对三种牛顿迭代求根的影响

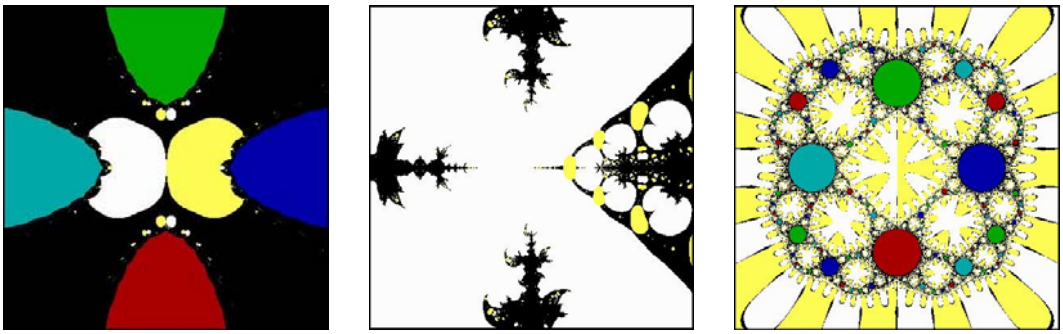
在利用牛顿法求方程 $f(z)=0$ 的根时，可能会把距离很近的两根误认为重根．为此，作者构造了函数

$$f(z)=z^3(z-0.005)(z^4-1) \tag{5}$$

所对应的上述三种牛顿变换的 Julia 集（图 4）．由式(5)可知，方程 $f(z)=0$ 的有三个重根 $\omega=0$，五个不同单根 $\omega_k=e^{i2k\pi/4}(k=0,1,2,3)$、$\omega_4=0.005$，其中重根 ω 与单根 ω_4 距离很近．图 4 的颜色设置与前述相同，需说明的是此时黄色区域对应单根 ω_4 的吸引域．下面考察计算误差对三种牛顿迭代求根的影响．

图 4(a)中白色重根 $\omega=0$ 的吸引域与黄色单根 ω_4 的吸引域是非常接近的（由于精度限制，图 4(a)中白、黄色区域似乎是连通的）；图 4(b)中少部分黄色区域与白色区域是连通的，大多数黄色区域与白色区域是不连通的（被黑色发散区隔开）；图 4(c)中白色和黄色区域是不连通的，中间被黑色发散区隔开，且黄色区域的面积远大与图 4(a)和图 4(b)中的．这说明重根牛顿法受计算误差影响很小，基本上求解过程中舍入误差不会影响到求根结果，能够非常准确地求解出方程的根；松弛牛顿法受计算误差影响要大些；标准牛顿法受计算误差影响最大．

另外，图 4 的单根 $\omega_k(k=0,1,2,3)$ 的吸引域的中心位于相角为 $2k\pi/4(k=0,1,2,3)$ 的单位圆周上，单根 ω_4 的吸引域的中心位于 $z=0.005$ 处，重根吸引域的中心位于原点；由于式(5)不同与式(4)，故此时 Julia 集不具有旋转对称性．



(a) 标准牛顿变换　　(b) 松弛牛顿变换　　(c) 重根牛顿变换

图 4　式(5)所对应的三种牛顿变换的 Julia 集

3　结论

本文推广了 Peitgen 和 Gilbert 等人的研究工作，分析了重根牛顿变换的 Julia 集理论，并利用迭代法构造了标准牛顿变换、松弛牛顿变换和重根牛顿变换的 Julia 集．研究发现：(1) 函数 $f(z)=z^{\alpha}(z^{\beta}-1)$ 的三种牛顿变换 Julia 集的中心为原点且具有 β 倍的旋转对称性；(2) 三种牛顿变换 Julia 集的重根吸引域对重根数 α 具有敏感的依赖性；(3) 由于 $f(z)$ 的零点 z^* 是松弛牛顿变换 $F(z)$ 的中性或斥性不动点，所以松弛牛顿变换的 Julia 集中不存在单根吸引域，只有重根吸引域和发散区；(4) 由于 ∞ 点不是重根牛顿变换 $F(z)$ 的不动点，所以重根牛顿变换的 Julia 集中多为重根吸引域和单根吸引域，只有少量的发散区；(5)重根牛顿法受计算误差影响最小，松弛牛顿法受计算误差影响次之，标准牛顿法受计算误差影响最大．

参考文献：

[1] MANDELBROT B B. *The Fractal Geometry of Nature* [M]. San Fransisco: Freeman W H, 1982, 5--47.

[2] 王兴元．广义 M-J 集的分形机理 [M]．大连：大连理工大学出版社，2002, 1--58.
WANG Xing-yuan. *Fractal Mechanism of the Generalized M-J Set* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2002, 1--58. (in Chinese)

[3] PEITGEN H O, SAUPE D. *The Science of Fractal Images* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988, 137--218.

[4] PICKOVER C A. *Computers, Pattern, Chaos and Beauty* [M]. New York: St. Martin's Press, 1990, 43--105.

[5] PEITGEN H O, SAUPE D, HAESELER F V. *Cayley's problem and Julia sets* [J]. Math. Intelligencer, 1984, **6**: 11--20.

[6] HAESELER F V, PEITGEN H O. *Newton's method and complex dynamics systems* [J]. Acta Appl. Math., 1988, **13**: 3--58.

[7] WEGNER T, PETERSON M. *Fractal Creations* [M]. Mill Valley: The Waite Group Press, 1991. 168--231.

[8] WALTER D J. *Computer art representing the behavior of the Newton-raphson method* [J]. Computers & Graphics, 1993, **17**(4): 487--488.

[9] WALTER D J. *Systemised serendipity for producing computer art* [J]. Computers & Graphics, 1993, **17**(6): 699--700.

[10] CHEN Ning, ZHU X L, CHUNG K W. *M and J sets from Newton's transformation of the transcendental mapping* $F(z)=e^{z^{w}+c}$ *with vcps* [J]. Computers & Graphics, 2002, **26**(3): 371--383.

[11] GILBERT W J. *The complex dynamics of Newton's method for a double root* [J]. Computers & Mathematics with Applications, 1991, **22**: 115--119.

[12] RALSTON A, RABINOWITZ P. *A First Course in Numerical Analysis* [M]. New York: McGraw-Hill, 1978, 73--122.

[13] BLANCHAREL P. *Complex analytic dynamics on the Riemann sphere* [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1984, **11**: 88--144.

Julia Sets of Newton Method for Multiple Roots

WANG Xing-yuan, LIU Wei

(School of Electronic & Information Engineering, Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China)

Abstract: In this paper we analyze the theory of Julia sets of Newton method for multiple roots, construct the standard, relax and multiple root's Julia sets. Utilizing the method of experimental mathematics, the authors obtain the following conclusion: (1) The Julia sets of above methods for $f(z)=z^{\alpha}(z^{\beta}-1)$ has β rotational symmetry and its center is the origin; (2) The multiple root attraction region of these kinds of Julia sets are sensitive to α; (3) There is not simple root attraction region in the relax method, because z^{*}, the root of $f(z)$, is neutral or repelling fixed point of the relax Newton transform $F(z)$; (4) ∞ is not the fixed point of multiple roots Newton transform $F(z)$, so multiple root's Julia set is multiple and simple roots attraction region; (5) The experimental errors and truncation of coefficients cause the minimal effect to the multiple root method, the more to the relax and the maximal to the standard Newton' method.

Key words: standard Newton method; relax Newton method; multiple roots Newton method; Julia set; fixed point; attraction region.