第26卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0325-09 **文献标识码**: **A**

非阶化 Virasoro 代数和 Virasoro 超代数及其中间序列模

朱 琳 [1]， 苏育才 [2]

(1. 上海交通大学数学系，上海 200240; 2. 中国科学技术大学数学系，安徽 合肥 230026)

(E-mail: linzhu@sjtu.edu.cn)

摘 要: 介绍非阶化 Virasoro(超) 代数的概念，给出非阶化 Virasoro(超) 代数的中间序列模，并对非阶化 Virasoro 代数的子代数 (秩为 1 的非阶化 Witt 代数) 的中间序列模进行分类.

关键词: 非阶化 Virasoro 代数；中间序列模.

MSC(2000): 17B68, 17B70, 17B65

中图分类: O153

1 引 言

Virasoro 代数 [1] 在数学物理上有重要的应用，它是线性微分算子 $\langle t^{i+1}\frac{d}{dt}\,|\,i\in\mathbf{Z}\rangle$ 组成的无限维复 Lie 代数的普遍中心扩张. 文献 [2, 4] 介绍了高秩 Virasoro 代数和超代数. 近来，文献 [8] 又介绍了广义 Virasoro(超) 代数的概念. 这些代数 L 是 (有限) 阶化 Lie 代数 (即 $L=\oplus_{\alpha\in M}L_\alpha$, 其中 M 是某一 Abel 群，且 $[L_\alpha,L_\beta]\subset L_{\alpha+\beta}$ 以及每个 L_α 是有限维的). 非阶化的无限维 Lie 代数 [7,9,12] 在 Hamiltonian 算子理论，顶点代数理论等相关领域中起着重要的作用.

类似于 [10], 可将非阶化 Virasoro 代数看作非阶化秩为 1 的 Witt 代数的中心扩张：设 M 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的非零加法子群，非阶化 Virasoro 代数 $NVir[M]$ 是作用在群代数 $\mathbf{C}[M\times\mathbf{Z}]=\langle x^\alpha t^i\,|\,\alpha\in M,i\in\mathbf{Z}\rangle$ 上的线性微分算子 $\langle x^\alpha t^i(x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})\,|\,\alpha\in M,i\in\mathbf{Z}\rangle$ 全体构成的无限维复 Lie 代数的中心扩张. 设 $L_{\alpha,i}=x^\alpha t^i(x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})$, 则 $NVir[M]$ 是一个 Lie 代数，具有基 $\{L_{\alpha,i},c\,|\,\alpha\in M,i\in\mathbf{Z}\}$, c 是中心元，且对 $\alpha,\beta\in M,i,j\in\mathbf{Z}$, 有

$$\begin{aligned}&[L_{\alpha,i},L_{\beta,j}]=(\beta-\alpha)L_{\alpha+\beta,i+j}+(j-i)L_{\alpha+\beta,i+j-1}+\\&\frac{1}{12}\delta_{\alpha+\beta,0}(\delta_{i+j,-1}\,\alpha^3+3i\delta_{i+j,0}\,\alpha^2+3i(i-1)\delta_{i+j,1}\,\alpha+i(i-1)(i-2)\delta_{i+j,2})c.\end{aligned}\tag{1.1}$$

根据上述定义，无中心的非阶化 Virasoro 代数，记作 $W[M]$, 是 (广义)Witt 型单 Lie 代数. 注意到， $\langle L_{0,i},c\,|\,i\in\mathbf{Z}\rangle$ 是 (典型)Virasoro 代数 Vir, $\langle L_{\alpha,0}\,|\,\alpha\in M\rangle$ 是无中心的广义 Virasoro 代数 [10], 记作 $W^0[M]$. 同样可看到， $\langle L_{\alpha,i}\,|\,\alpha\in M,i\in\mathbf{Z}_+\rangle$ 是非阶化 Witt 型单 Lie 代数，记作 $W^+[M]$. 注意到， $L_{0,0}=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}$ 在 $W^+[M]$ 上的伴随作用是局部有限的 [12].

有不少文章是关于阶化 Virasoro 代数 (秩为 1 或高秩或超代数) 的模的 [3−5]. 然而，关于非阶化 Lie 代数的表示却很少. 这里，我们讨论一些非阶化 Virasoro 代数，更精确地说，是秩为 1 的非阶化 Witt 代数的表示. 由于非阶化 Cartan 型 Lie 代数 [12] 都含有秩为 1 的 Witt 代数作为子代数，这里的结果有希望被推广到非阶化 Cartan 型 Lie 代数的表示上，如 [11]. 这也是本文的目的.

收稿日期: 2004-02-20

由于没有权 $NVir[M]$- 模的概念，我们研究所谓的中间序列模．我们在第二节对非阶化 Lie 代数 $W^+[M]$ 的中间序列模进行分类 (定理为 2.2)．在第三节，我们给出非阶化 Virasoro 代数的中间序列模，指出其单性．在第四节，通过观察所有可能的非阶化 Virasoro 代数的超扩张，我们给出非阶化 Virasoro 超代数的定义．最后给出 Virasoro 超代数上的中间序列模.

2 Witt 型非阶化 Lie 代数的表示

考虑 Lie 代数 $W^+[M]=\langle L_{\alpha,i}\,|\,\alpha\in M, i\in\mathbf{Z}_+\rangle$．注意， $L_0=L_{0,0}$ 在 $W^+[M]$ 的伴随作用是局部有限的．这里，线性空间 V 上的线性变换 T 称为局部有限的，如果对所有的 $u\in V$, 有

$$\dim(\langle T^n(u)\,|\,n\in\mathbf{Z}_+\rangle)<\infty. \tag{2.1}$$

考虑 $W^+[M]$- 模 V, 使得 L_0 在 V 上的作用局部有限．对于这样的一个模 V, 有

$$V=\bigoplus_{\alpha\in\mathbf{C}}V_\alpha,\quad V_\alpha=\{v\in V\,|\,(L_0-\alpha)^m(v)=0,\ \ 对某一个\ \ m\in\mathbf{Z}_+\}. \tag{2.2}$$

对 $\alpha\in\mathbf{C}$, 设

$$V_\alpha^{(0)}=\{v\in V_\alpha\,|\,L_0v=\alpha v\},\quad V_\alpha^{(i)}=\{v\in V_\alpha\,|\,(L_0-\alpha)v\in V_\alpha^{(i-1)}\},\quad i\geq 1, \tag{2.3}$$

再设

$$\overline{V}_\alpha^{(0)}=V_\alpha^{(0)},\quad \overline{V}_\alpha^{(i)}=V_\alpha^{(i)}/V_\alpha^{(i-1)},\quad i\geq 1. \tag{2.4}$$

显然,

$$V_\alpha\neq\{0\}\ \Leftrightarrow\ V_\alpha^{(0)}\neq\{0\} \tag{2.5}$$

令

$$V^{(i)}=\bigoplus_{\alpha\in\mathbf{C}}V_\alpha^{(i)},\quad \overline{V}^{(i)}=\bigoplus_{\alpha\in\mathbf{C}}\overline{V}_\alpha^{(i)},\quad i\geq 0. \tag{2.6}$$

定义 2.1 $W^+[M]$ 上的模 V 称为广义权模，如果 V 满足 (2.2) 式．对 $\alpha\in\mathbf{C}$, 如 $V_\alpha\neq\{0\}$, 则 V_α 称为权为 α 的广义权空间， $V_\alpha^{(0)}$ 称为权为 α 的权空间． $W^+[M]$ 上的不可分解广义权模 V 称为中间序列模，如果对 $\alpha\in\mathbf{C}$, $\dim V_\alpha^{(0)}\leq 1$ (因此，对 $\alpha\in\mathbf{C}, i\in\mathbf{Z}_+$, $\dim\overline{V}_\alpha^{(i)}\leq 1$).

本节的目的就是将 $W^+[M]$ 上的所有中间序列模进行分类．我们有下面的定理.

定理 2.2 (1) $W^+[M]$ 上的中间序列模 V 都是 $A_{a,b}$ 的一个商子模 (其中 $a,b\in\mathbf{C}$)．这里 $A_{a,b}$ 是一个模，具有基 $\{v_{\alpha,i}\,|\,\alpha\in M, i\in\mathbf{Z}_+\}$ 满足

$$L_{\alpha,i}v_{\beta,j}=(a+\beta+\alpha b)v_{\alpha+\beta,i+j}+(j+ib)v_{\alpha+\beta,i+j-1},\ 对\ \ \alpha,\beta\in M, i,j\in\mathbf{Z}_+, \tag{2.7}$$

其中，如果 $i+j-1<0$, 则 $i=j=0$, 从而有 $j+ib=0$, 因而上式右边的第二项为零.

(2) $A_{a,b}$ 是单的 $\Leftrightarrow$ $a\notin M$ 或 $b\neq 0$.

(3) $A_{0,0}$ 有两个复合因子：平凡子模 $\mathbf{C}v_{0,0}$ 和单商模 $A'_{0,0}=A_{0,0}/\mathbf{C}v_{0,0}\cong A_{0,1}$.

证明 首先我们注意到：不同于 Virasoro 代数的情况，这里没有型如 $A(a'),B(a')$ 的模 (见下面的 (3.1)–(3.4)); 同时，一个有趣现象是： $A_{0,0}/\mathbf{C}v_{0,0}\cong A_{0,1}$.

对 $a\in\mathbf{C}$, 设 $V(a)=\oplus_{\alpha\in M}V_{a+\alpha}$．显然， $V(a)$ 是 V 的子模， V 是这些不同的 $V(a)$ 的直和．因为 V 是不可分解的，所以存在 $a\in\mathbf{C}$, 使 $V=V(a)$.

分两种情况来证明这个定理.

情形 1. $a\notin M$. 则 $W^0[M]=\langle L_{\alpha,0}\,|\,\alpha\in M\rangle$ 是无中心的广义 Virasoro 代数 [8]. 注意到, $V^{(0)}=\oplus_{\alpha\in M}V^{(0)}_{a+\alpha}$ 是 V 的 $W^0[M]$- 子模. 由 [8], 存在 $b\in\mathbf{C}$ 使 $V^{(0)}$ 是一个 $A_{a,b}$ 型中间序列单 $W^0[M]$- 模. 即存在 $V^{(0)}$ 的基 $\{v_{\alpha,0}\,|\,\alpha\in M\}$ 使得对 $\alpha,\beta\in M$, $L_{\alpha,0}\,v_{\beta,0}=(a+\beta+b\alpha)v_{\alpha+\beta,0}$. 归纳假设，设对 $n\geq 0$, 已选取 $\{v_{\alpha,i}\in V^{(i)}_{a+\alpha}\backslash V^{(i-1)}_{a+\alpha}\,|\,\alpha\in M,i\leq n\}$, 使得对于 $\alpha,\beta\in M$, $i,j\in\mathbf{Z}_+$ 且 $i,j,i+j\leq n$, (2.7) 式都成立. 则对任意 $\alpha\in M$, 设 $u_{\alpha,n+1}=L_{0,1}\,v_{\alpha,n}$, 将 L_0 作用上去，利用 $[L_0,L_{0,1}]=L_0$ (见 (1.1)), 得到 $(L_0-(a+\alpha))u_{\alpha,n+1}=(n+1)(a+\alpha)v_{\alpha,n}+n(n+b)v_{\alpha,n-1}\in V^{(n)}_{a+\alpha}\backslash V^{(n-1)}_{a+\alpha}$. 因此由定义 (2.3) 知， $u_{\alpha,n+1}\in V^{(n+1)}_{a+\alpha}\backslash V^{(n)}_{a+\alpha}$. 令 $v_{\alpha,n+1}=(a+\alpha)^{-1}(u_{\alpha,n+1}-(n+b)v_{\alpha,n})$, 由此得到，对 $\alpha\in M$,

$$L_{0,1}\,v_{\alpha,n}=(a+\alpha)v_{\alpha,n+1}+(n+b)v_{\alpha,n},\quad L_0v_{\alpha,n+1}=(a+\alpha)v_{\alpha,n+1}+(n+1)v_{\alpha,n}.\tag{2.8}$$

由于 $\overline{V}^{(n+1)}$ 也是一个 $A_{a,b'}$ 型中间序列单 $W^0[M]$- 模 (对某个 $b'\in\mathbf{C}$), 因此存在 $b_\alpha\in\mathbf{C}\backslash\{0\},\alpha\in M$, 使得对于 $w_{\alpha,n+1}=b_\alpha v_{\alpha,n+1}$, 有

$$L_{\alpha,0}\,w_{\beta,n+1}=(a+\beta+b'\alpha)w_{\alpha+\beta,n+1}+\sum_{p=0}^{n}c^{(p)}_{\alpha,\beta}v_{\alpha+\beta,p},\ 对\alpha,\beta\in M,\tag{2.9}$$

其中 $c^{(p)}_{\alpha,\beta}\in\mathbf{C}$. 由 (2.8) 的第二个等式知 $c^{(n)}_{0,\beta}=(n+1)b_\beta$.

计算 $[L_0,L_{\alpha,0}]w_{\beta,n+1}=\alpha L_{\alpha,0}\,w_{\beta,n+1}$ 中 $v_{\alpha+\beta,n}$ 的系数，由 (2.9) 式，对所有 $\alpha,\beta\in M$, 有

$$(a+\beta+b'\alpha)(n+1)b_{\alpha+\beta}+c^{(n)}_{\alpha,\beta}(a+\alpha+\beta)-(a+\beta)c^{(n)}_{\alpha,\beta}-(n+1)b_\beta(a+\beta+b\alpha)=\alpha c^{(n)}_{\alpha,\beta},\tag{2.10}$$

从而

$$(a+\beta+b'\alpha)b_{\alpha+\beta}=(a+\beta+b\alpha)b_\beta.\tag{2.11}$$

令 $\alpha=-\beta$ 得到，对 $\beta\in M$, $(a+(1-b)\beta)b_\beta=(a+(1-b')\beta)b_0$. 在 (2.11) 中代入此式，注意到 $b_0\neq 0$, 则对 $\alpha,\beta\in M$, 有

$$(a+\beta+b'\alpha)(a+(1-b)\beta)(a+(1-b')(\alpha+\beta))-(a+(1-b)(\alpha+\beta))(a+\beta+b\alpha)(a+(1-b')\beta)=0.\tag{2.12}$$

由此，通过 (2.11), 我们得到 $b'=b$, 且 b_α 是一个常数. 重新调整 $w_{\alpha,n+1}$, 使得对 $\alpha\in M$, $b_\alpha=1$. 现在计算 $[L_{\alpha,0},L_{\beta,0}]w_{\gamma,n+1}=(\beta-\alpha)L_{\alpha+\beta,0}\,w_{\gamma,n+1}$ 中 $v_{\alpha+\beta+\gamma,n}$ 的系数，利用 (2.9) 式，对 $\alpha,\beta,\gamma\in M$, 有

$$(a+\gamma+b\beta)c^{(n)}_{\alpha,\beta+\gamma}+c^{(n)}_{\beta,\gamma}(a+\beta+\gamma+b\alpha)-(a+\gamma+b\alpha)c^{(n)}_{\beta,\alpha+\gamma}-c^{(n)}_{\alpha,\gamma}(a+\alpha+\gamma+b\beta)=(\beta-\alpha)c^{(n)}_{\alpha+\beta,\gamma}.\tag{2.13}$$

将 (2.8), (2.9) 代入 $[L_{\alpha,0},L_{0,1}]v_{\beta,n}=(-\alpha L_{\alpha,1}+L_{\alpha,0})v_{\beta,n}$, 得

$$\begin{aligned}\alpha L_{\alpha,1}\,v_{\beta,n}=&\alpha(a+\beta+b\alpha)v_{\alpha+\beta,n+1}+((a+\beta)(n+1-c^{(n)}_{\alpha,\beta})+\\&(n+b)\alpha)v_{\alpha+\beta,n}-(a+\beta)\sum_{p=0}^{n-1}c^{(p)}_{\alpha,\beta}v_{\alpha+\beta,p}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

记 (2.14) 式的右边为 $\sum_{p=0}^{n+1}d^{(p)}_{\alpha,\beta}v_{\alpha+\beta,p}$, 计算 $L_{2\alpha,0}\,v_{\beta,n}=[L_{\alpha,0},L_{\alpha,1}]v_{\beta,n}$ 中 $v_{2\alpha+\beta,n}$ 的系数，得到

$$a+\beta+2b\alpha=(a+\beta+b\alpha)c^{(n)}_{\alpha,\alpha+\beta}+(a+\alpha+\beta+b\alpha)d^{(n)}_{\alpha,\beta}-(a+\beta+b\alpha)d^{(n)}_{\alpha,\alpha+\beta}-n(a+\alpha+\beta+b\alpha),\tag{2.15}$$

即

$$\begin{aligned}&(a+\beta+b\alpha)(a+2\alpha+\beta)c^{(n)}_{\alpha,\alpha+\beta}-(a+\beta)(a+\alpha+\beta+b\alpha)c^{(n)}_{\alpha,\beta}\\&\quad=(n+1)\alpha(a+\beta+2b\alpha).\end{aligned}\tag{2.16}$$

结合 (2.13)(在 (2.13) 中设 $\beta=-\alpha$), 则唯一地给出了 $c^{(n)}_{\alpha,\beta}=n+1$, 从而 $d^{(n)}_{\alpha,\beta}=(n+b)\alpha$. 类似于上述办法可以证出：如果 $p\le n-1$, 则 $c^{(p)}_{\alpha,\beta}=0$. 因此 (2.9), (2.14) 表明，对 $\alpha,\beta\in M$, $i,j\in\mathbf{Z}_+$, 且 $i+j\le n+1$, $i=0,1$, (2.7) 式都成立. 因为 $W^+[M]$ 是由 $\{L_{\alpha,i}\,|\,\alpha\in M, i=0,1\}$ 生成的，因此对 $\alpha,\beta\in M$, $i,j\in\mathbf{Z}_+$ 且 $i,j,i+j\le n+1$, (2.7) 式都成立. 所以，由归纳法，我们实际上证明了对所有的 $\alpha,\beta\in M$, $i,j\in\mathbf{Z}_+$, (2.7) 式都成立.

情形 2. $a\in M$. 则 $V(a)=V(0)$, 因此可设 $a=0$. 首先设 $V=V_0$, 则对 $\alpha\in M\backslash\{0\}$, $L_{\alpha,i}V=0$, 从而 $W^+[M]V=0$; 但 V 不可分解，故 $V=\mathbf{C}v_{0,0}$ 是 $A_{0,0}$ 的平凡子模. 因此假设存在 $\alpha\in M\backslash\{0\}$, 使得 $V_\alpha\neq\{0\}$. 则由 [8], 对所有的 $\alpha\in M\backslash\{0\}$, $V_\alpha\neq\{0\}$. 设 $V_0=\{0\}$, 则 $V^{(0)}=\oplus_{\alpha\in M\backslash\{0\}}V^{(0)}_\alpha\cong A'_{0,0}$ ($A_{0,0}$ 的单商模), 且对所有的 $\alpha\in M$,

$$-\alpha v_{\alpha,0}=L_{2\alpha,0}\,v_{-\alpha,0}=L_{\alpha,0}(L_{\alpha,1}\,v_{-\alpha,0})-L_{\alpha,1}(L_{\alpha,0}\,v_{-\alpha,0})=0,\tag{2.17}$$

这是个矛盾. 所以 $V_0\neq\{0\}$. 如果 $V^{(0)}$ 是 $A_{0,b}$ 型的中间序列 $W^0[M]$- 模 (对某个 $b\in\mathbf{C}\backslash\{0,1\}$), 则与情形 1 一样 (唯一的不同点是：固定一个 $\alpha_0\in M\backslash\{0\}$, 定义 $v_{0,n+1}$, 使其满足 $L_{-\alpha_0,1}\,v_{\alpha_0,n}=\alpha_0(1-b)v_{0,n+1}+(n+b)v_{0,n}$, 见 (2.8) 的第一个等式), 可以证出 $a=0$ 时 (2.7) 式成立. 剩下来要讨论 $V^{(0)}$ 是下列三种情形之一： $A(a'),B(a'),A'_{0,0}\oplus\mathbf{C}v_{0,0}$ (记 $A_{0,0}=B(0), A_{0,1}=A(0)$, 见 (3.1)-(3.4)). 如上定义 $v_{\alpha,i}$, 则如同情形 1 进行证明, 可以看到对 $\alpha,\beta\in M$ 且 $\beta,\alpha+\beta\neq 0$ 时，(2.7) 式成立. 假设 $V^{(0)}=A'_{0,0}\oplus\mathbf{C}v_{0,0}$. 设 $\alpha\in M$, 则 $L_{\alpha,0}\,v_{-\alpha,0}=0$. 将 L_0 作用到 $v'_0=L_{\alpha,1}\,v_{-\alpha,0}$ 上，可以看到 $v'_0\in V^{(0)}_0$, 则 $L_{\alpha,0}\,v'_0=0$. 从而由 (2.17), 又得到一个矛盾. 所以 $V^{(0)}=A'_{0,0}\oplus\mathbf{C}v_{0,0}$ 是不可能的. 假设 $V^{(0)}=A(a')$. 利用 $(-\alpha L_{\alpha,1}+L_{\alpha,0})v_{-\alpha,0}=[L_{\alpha,0},L_{0,1}]v_{-\alpha,0}$, $L_{0,1}\,v_{0,0}=cv_{0,0}$ (将 $\mathrm{ad}\,L_0$ 作用到 $L_{0,1}\,v_{0,0}$ 上，可以看到这是在 $V^{(0)}_0$ 中的，其中 c 为某个复数), 得

$$-\alpha L_{\alpha,1}\,v_{-\alpha,0}-\alpha(\alpha+1)a'v_{0,0}=-\alpha L_{\alpha,0}\,v_{-\alpha,1}-c\alpha(\alpha+1)a'v_{0,0},\ 对\alpha\in M.\tag{2.18}$$

利用 $L_{2\alpha,0}\,v_{-2\alpha,0}=[L_{\alpha,0},L_{\alpha,1}]v_{-2\alpha,0}$, 得

$$-2\alpha(2\alpha+1)a'v_{0,0}=-\alpha L_{\alpha,0}\,v_{-\alpha,1}+\alpha L_{\alpha,1}\,v_{-\alpha,0}-\alpha(\alpha+1)a'v_{0,0},\ 对\alpha\in M.\tag{2.19}$$

上两式表明 $a'=0$, 即 $V^{(0)}=A(0)=A_{0,1}$. 模仿情形 1 的证明可以得到 $V=A_{0,1}$. 类似地，如果 $V^{(0)}=B(a')$, 则 $a'=0$, $V=A_{0,0}$. 这就证明了 (1). (2) 的证明是显然的. 对于 (3), 设 $V=A_{0,0}$, 有一组基 $\{v_{\alpha,i}\,|\,\alpha\in M, i\in\mathbf{Z}_+\}$. 在商空间 $V'=A_{0,0}/\mathbf{C}v_{0,0}$ 中，对 i 归纳地定义 $v'_{\alpha,i}$ 为

$$v'_{\alpha,i}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha}(v_{\alpha,i}-iv'_{\alpha,i-1}), & 如果\ \ \alpha\neq 0,\\ \frac{1}{i+1}v_{0,i+1}, & 如果\ \ \alpha=0.\end{cases}\tag{2.20}$$

验证立即得出 $\{v'_{\alpha,i}\,|\alpha\in M, i\in\mathbf{Z}_+\}$ 是 $A_{0,1}$ 的一组基. □

3 非阶化 Virasoro 代数的表示

回忆 Virasoro 代数 Vir, 它由 $\{L_i=L_{0,i+1},c\,|\,i\in\mathbf{Z}\}$ (见 (1.1) 中 $L_{\alpha,i}$ 的记号) 张成，并有换位运算 $[L_i,L_j]=(j-i)L_{i+j}+\frac{1}{12}\delta_{i+j,0}(i^3-i)c$. 它有下列三类中间序列模： $A_{a,b},A(a'),B(a')$,

$a,b\in\mathbf{C},a'\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}$, 它们都有一组基 $\{v_i\,|\,i\in\mathbf{Z}\}$, 且对 $i,j\in\mathbf{Z}$, 满足

$$\begin{array}{ll} A_{a,b}: & L_iv_j=(a+j+bi)v_{i+j},\\ A(a'): & L_iv_j=(i+j)v_{i+j}+\delta_{j,0}\,i(i+1)a'\,v_i,\\ B(a'): & L_iv_j=jv_{i+j}-\delta_{i+j,0}\,i(i+1)a'\,v_0.\end{array} \tag{3.1}$$

这里，我们使用下面的约定.

约定 3.1 如果 ∞ 在等式的右边作为非零项的元出现，我们把 ∞ 看作 1, 把右边其它不含 ∞ 的项看作 0. 比如，在 $A(a')$ 中，如果 $a'=\infty$, 则当 $j=0$ 时，右边 $=i(i+1)v_i$.

因为 $NVir[M]$ 中不存在非零的 ad- 局部有限元素 (见 (1.1)), 我们不能象定义 2.1 那样来定义 $NVir[M]$ 上的中间序列模，所以改用下面的定义.

定义 3.2 不可分解的 $NVir[M]$- 模 V 称为中间序列模，如果对 $\alpha,\beta\in M,i\in\mathbf{Z}$, $V=\oplus_{\alpha\in M}V_\alpha$ 是 M- 阶化的且 $L_{\alpha,i}V_\beta\subset V_{\alpha+\beta}$, 并且每一个 V_α 都有如下的滤过：

$$\cdots\subset V_{\alpha,-1}\subset V_{\alpha,0}\subset V_{\alpha,1}\subset\cdots\subset V_\alpha=\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty}V_{\alpha,i},$$

满足 $L_{0,i}V_{\alpha,j}\subset V_{\alpha,i+j+1}$ 且 $\dim V_{\alpha,i}/V_{\alpha,i-1}\le 1$.

由此定义可看到，中心元 c 是平凡作用到 V 上的，因此在下面的讨论中可以将 c 忽略.

下面构造三类 $NVir[M]$ 上的中间序列模： $A_{a,a_0,b}$, $A(a'),B(a')$(其中 $a,a_0,b\in\mathbf{C},a'\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}$), 它们都有基 $\{v_{\alpha,i}\,|\,\alpha{\in}M,i{\in}\mathbf{Z}\}$, 满足对 $\alpha,\beta\in M$, $i,j\in\mathbf{Z}$, 有

$$A_{a,a_0,b}:\quad L_{\alpha,i}v_{\beta,j}=(a+\beta+\alpha b)v_{\alpha+\beta,i+j}+(a_0+j+ib)v_{\alpha+\beta,i+j-1}, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} A(a'):\quad L_{\alpha,i}v_{\beta,j}=&(\alpha+\beta)v_{\alpha+\beta,i+j}+(i+j-1)v_{\alpha+\beta,i+j-1}+\\ &\frac{a'}{2}\delta_{\beta,0}\,\delta_{j,0}(\alpha^2v_{\alpha,i+1}+2i\alpha v_{\alpha,i}+i(i-1)v_{\alpha,i-1}),\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} B(a'):\quad L_{\alpha,i}v_{\beta,j}=&\beta v_{\alpha+\beta,i+j}+jv_{\alpha+\beta,i+j-1}-\\ &\frac{a'}{2}\delta_{\alpha+\beta,0}(\delta_{i+j,-1}\,\alpha^2+2i\delta_{i+j,0}\,\alpha+i(i-1)\delta_{i+j,1})v_{0,0}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

我们说上述三类模的定义是自然的：文献 [10] 首先定义了模 $A_{a,a_0,b}$. 模 $A(a')$ 在下述意义下可看成是 $B(a')$ 的 "对偶"：定义 $A(a')\times B(a')$ 上的线性函数 $(\cdot,\cdot)$: $(v^*_{\alpha,i},v_{\beta,j})=\delta_{\alpha+\beta,0}\,\delta_{i+j,0}$, 其中 $A(a')$ 的基重新记作 $\{v^*_{\alpha,i}\,|\,\alpha\in M,i\in\mathbf{Z}\}$, 再定义 $NVir[M]$ 上的反对合 $\omega:\omega(L_{\alpha,i})=-L_{\alpha,i}$, 则对 $x\in NVir[M],u^*\in A(a'),v\in B(a')$, 有 $(xu^*,v)=(u^*,\omega(x)v)$. 我们称 $A(a')$ 为 $B(a')$ 的对偶模. 对于模 $B(a')$, 注意到在 [6] 中, 我们计算了文 [9] 中定义的一类 Weyl 型 Lie 代数的所有 2- 上循环. 特别地，我们定义了 Weyl 型 Lie 代数 $\mathcal{W}(M)=\langle x^\alpha t^i(x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})^n\,|\,\alpha\in M,i\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}_+\rangle$ 的中心扩张 $\widehat{\mathcal{W}}(M)$. 注意到在 $\widehat{\mathcal{W}}(M)$ 中， $W[M]=\langle L_{\alpha,i}=x^\alpha t^i(x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t})\,|\,\alpha\in M,i\in\mathbf{Z}\rangle$ 在商子空间 $\langle v_{\beta,j}=x^\beta t^j,c\,|\,\beta\in M,j\in\mathbf{Z}\rangle/\mathbf{C}(c+a'v_{0,0})$ 上的伴随作用就是模 $B(a')$.

由此立即可以得到下面的定理.

定理 3.3 (1) $A_{a,a_0,b}\cong A_{c,c_0,d}\ \Leftrightarrow\ a-c\in M,\,a_0-c_0\in\mathbf{Z},b=d$.

(2) $A_{a,a_0,b}$ 是单的 $\Leftrightarrow$ $a\notin M$ 或 $a_0\notin\mathbf{Z}$ 或 $b\ne 0,1$.

(3) $A_{0,-1,1}$ 或 $A(a')$ 有两个复合因子：由 $\{v_{\alpha,i}\,|\,(0,0)\ne(\alpha,i)\in M\times\mathbf{Z}\}$ 张成的单子模，记作 $A'_{0,-1,1}$ 及平凡商模 $A_{0,-1,1}/A'_{0,-1,1}$.

(4) $A_{0,0,0}$ 或 $B(a')$ 有两个复合因子：由 $v_{0,0}$ 张成的平凡子模及单商模 $A_{0,0,0}/\mathbf{C}v_{0,0}$, 记作 $A'_{0,0,0}$. □

4 非阶化 Virasoro 超代数

文献 [4,8] 定义了广义 Virasoro 超代数为广义 Virasoro 代数的非平凡 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$- 阶化扩张. 我们类似地可介绍非阶化 Virasoro 超代数的概念. 首先，对一个由 M 定义的非阶化无中心的 Virasoro 代数 $W[M]$, 我们来看如何将它扩张成 Lie 超代数. 因此, 假设 $W=W_0\oplus W_1$ 是一 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-阶化扩张，使得 $W_0=W[M]$, 且存在 $s,s_0,t\in\mathbf{C}$ 使 W_1 是一个 $A_{s,s_0,t}$ 型中间序列单 $W[M]$-模. 取 $A_{s,s_0,t}$ 的一组基 $\{G_{\mu,k}\,|\,\mu\in s+M,k\in s_0+\mathbf{Z}\}$, 则对 $\alpha\in M$, $i\in\mathbf{Z}$, $\mu\in s+M$, $k\in s_0+\mathbf{Z}$, 有

$$[L_{\alpha,i},G_{\mu,k}]=(\mu+\alpha t)G_{\alpha+\mu,i+k}+(k+it)G_{\alpha+\mu,i+k-1}. \tag{4.1}$$

对于非平凡扩张，必须有 $[W_1,W_1]\neq 0$. 假设 $W[M]$ 中存在 $[G_{\mu,k},G_{\nu,\ell}]\neq 0$, 则进一步可以得到，存在 $q\in\mathbf{Z}$, 使得对于 $\mu,\nu\in s+M,k,\ell\in s_0+\mathbf{Z}$, 有

$$[G_{\mu,k},G_{\nu,\ell}]\in\langle L_{\mu+\nu,i}\,|\,i\in\mathbf{Z},i\leq k+\ell+q\rangle. \tag{4.2}$$

这表明 $2s\in M$, $2s_0\in\mathbf{Z}$. 可以假设 q 是使 (4.2) 式成立的最小整数.

引理 4.1 对于任意一个满足 (4.1), (4.2) 的非阶化无中心 Virasoro 代数 $W[M]$ 的非平凡超扩张 $W=W_0\oplus W_1$, 存在 $s\in\frac{1}{2}M, s_0\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}$, 使得

$$W=\langle L_{\alpha,i},G_{\mu,k}\,|\,\alpha\in M,i\in\mathbf{Z},\mu\in s+M,k\in s_0+\mathbf{Z}\rangle. \tag{4.3}$$

并且对任意 $\alpha,\beta\in M,i,j\in\mathbf{Z},\mu,\nu\in s+M,k,\ell\in s_0+\mathbf{Z}$, 有换位运算:

$$\begin{aligned}
&[L_{\alpha,i},L_{\beta,j}]=(\beta-\alpha)L_{\alpha+\beta,i+j}+(j-i)L_{\alpha+\beta,i+j-1},\\
&[L_{\alpha,i},G_{\mu,k}]=(\mu-\frac{\alpha}{2})G_{\alpha+\mu,i+k}+(k-\frac{i}{2})G_{\alpha+\mu,i+k-1},\\
&[G_{\mu,k},G_{\nu,\ell}]=2L_{\mu+\nu,k+\ell}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

记这样的 Lie 超代数为 $SW[M,s,s_0]$.

证明 任给 $\mu,\nu\in s+M,k,\ell\in s_0+\mathbf{Z}$, 由 (4.2) 式，存在 $a^{(p)}_{\mu,\nu,k,\ell}\in\mathbf{C}$, 使

$$[G_{\mu,k},G_{\nu,\ell}]=\sum_{p\in I_{\mu,\nu,k,\ell}}a^{(p)}_{\mu,\nu,k,\ell}L_{\mu+\nu,k+\ell+p}, \tag{4.5}$$

其中 $I_{\mu,\nu,k,\ell}=\{p\leq q\,|\,a^{(p)}_{\mu,\nu,k,\ell}\neq 0\}$ 是 $\mathbf{Z}$ 的有限子集，使得至少有一个 $I_{\mu,\nu,k,\ell}$ 非空 (由条件 $[W_1,W_1]\neq 0$), 并且至少有一个 $I_{\mu,\nu,k,\ell}$ 中包含 q. 对 $\alpha\in M,i\in\mathbf{Z}$, 将 $\mathrm{ad}\,L_{\alpha,i}$ 作用到 (4.5) 式，利用 (4.1), 计算出对 $\alpha\in M,i\in\mathbf{Z},\mu,\nu\in s+M,k,\ell\in s_0+\mathbf{Z}$, $L_{\alpha+\mu+\nu,i+k+\ell+q}$ 的系数为

$$(\mu+\alpha t)a^{(q)}_{\alpha+\mu,\nu,i+k,\ell}+(\nu+\alpha t)a^{(q)}_{\mu,\alpha+\nu,k,i+\ell}=(\mu+\nu-\alpha)a^{(q)}_{\mu,\nu,k,\ell}. \tag{4.6}$$

类似地，将 $\mathrm{ad}\,G_{\lambda,m},\lambda\in s+M,m\in s_0+\mathbf{Z}$ 作用到 (4.5), 利用超 Jacobi 恒等式，计算出对 $\mu,\nu,\lambda\in s+M,k,\ell,m\in s_0+\mathbf{Z}$, $G_{\mu+\nu+\lambda,k+\ell+m+q}$ 的系数为

$$(\nu+(\lambda+\mu)t)a^{(q)}_{\lambda,\mu,m,k}+(\mu+(\lambda+\nu)t)a^{(q)}_{\lambda,\nu,m,\ell}=-(\lambda+(\mu+\nu)t)a^{(q)}_{\mu,\nu,k,\ell}. \tag{4.7}$$

同文 [8] 中 (5.4a) 与 (5.10) 一样, 利用 (4.6), (4.7) 式, 得到 $t=-\frac{1}{2}$, 且 $a^{(q)}_{\mu,\nu,k,\ell}$ 不依赖于 μ,ν,k,ℓ. 所以重新调整 W_1 的基后，我们可设对 $\mu,\nu\in s+M$, $k,\ell\in s_0+\mathbf{Z}$, 有

$$a^{(q)}_{\mu,\nu,k,\ell}=2. \tag{4.8}$$

利用上式及 (4.6) 式，通过计算 $L_{\alpha+\mu+\nu,i+k+\ell+q-1}$ 的系数，得到对 $\alpha\in M, i\in\mathbf{Z}, \mu,\nu\in s+M, k,\ell\in s_0+\mathbf{Z}$, 有

$$\begin{aligned}&(\mu-\frac{\alpha}{2})a^{(q-1)}_{\alpha+\mu,\nu,i+k,\ell}+(\nu-\frac{\alpha}{2})a^{(q-1)}_{\mu,\alpha+\nu,k,i+\ell}+(k-\frac{i}{2})a^{(q)}_{\alpha+\mu,\nu,i+k,\ell}+(\ell-\frac{i}{2})a^{(q)}_{\mu,\alpha+\nu,k,i+\ell}\\&\quad=(\mu+\nu-\alpha)a^{(q-1)}_{\mu,\nu,k,\ell}+(k+\ell+q-i)a^{(q)}_{\mu,\nu,k,\ell}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

设 $\alpha=i=0$, 利用 (4.8) 式，得到 $q=0$. 由此看出，(4.9) 中关于 $a^{(q-1)}_{\mu,\nu,k,\ell}$ 的方程式与 (4.6) 式 $a^{(q)}_{\mu,\nu,k,\ell}$ 的方程式是相同的. 从而如果 $a^{(q-1)}_{\mu,\nu,k,\ell}\neq 0$, 我们得到 $q-1=0$ 的矛盾. 由此，对 p 施行归纳法得到，对 $p<0$, $a^{(p)}_{\mu,\nu,k,\ell}=0$. 由此可得 (4.4) 的最后一个等式. 直接验证可知 (4.4) 定义了一个 Lie 超代数. □

Lie 超代数 $SW[M,s,s_0]$ 可以看成是无中心 Virasoro 超代数的一个非阶化推广. 从而，我们可把与 M 相连的非阶化 Virasoro 超代数 $NSVir[M,s,s_0]$ 定义为 $SW[M,s,s_0]$ 的中心扩张，使得其 “偶” 部分是非阶化 Virasoro 代数 $NVir[M]$. 因此，设 $b_{\mu,k,\ell}\in\mathbf{C}$ 满足 $b_{-\mu,k,\ell}=b_{\mu,\ell,k}$, 使

$$[G_{\mu,k},G_{\nu,\ell}]=2L_{\mu+\nu,k+\ell}+\delta_{\mu+\nu,0}\,b_{\mu,k,\ell}c, \tag{4.10}$$

其中 $\mu,\nu\in s+M, k,\ell\in s_0+\mathbf{Z}$ (比较 (4.4) 的最后一个等式).

令 $\nu=\mu, \ell=k$, 将 $\mathrm{ad}\,L_{-2\mu,i}, i\in\mathbf{Z}$ 作用到 (4.10) 式，利用 (1.1) 式以及 (4.4) 的第二个等式，由 $b_{-\mu,k,\ell}=b_{\mu,\ell,k}$ 得到，对 $\mu\in s+M, i\in\mathbf{Z}, k\in s_0+\mathbf{Z}$, 有

$$\begin{aligned}&4\mu b_{\mu,k,i+k}+2(k-\frac{i}{2})b_{\mu,k,i+k-1}\\&\quad=\frac{1}{6}(-8\delta_{i+2k,-1}\,\mu^3+12i\delta_{i+2k,0}\,\mu^2-6i(i-1)\delta_{i+2k,1}\,\mu+i(i-1)(i-2)\delta_{i+2k,2}).\end{aligned} \tag{4.11}$$

令 $i=-2k$, 则对 $\mu\in s+M, k\in s_0+\mathbf{Z}$, 有

$$\mu b_{\mu,k,-k}+kb_{\mu,k,-k-1}=-k\mu^2. \tag{4.12}$$

将 μ 替换成 $-\mu$, 将 k 替换成 $-k$, 利用 $b_{-\mu,k,\ell}=b_{\mu,\ell,k}$, 得到 $-\mu b_{\mu,k,-k}-kb_{\mu,k-1,-k}=k\mu^2$. 此式与 (4.12) 式表明，如果 $k\geq 0$, $b_{\mu,k,-k-1}=b_{\mu,0,-1}$; 如果 $k<0$, $b_{\mu,k,-k-1}=b_{\mu,-1,0}$. 在 (4.11) 中，令 $i=-2k-1$, 比较 k 的系数，可以得出 $b_{\mu,k,-k-2}=0$, $b_{\mu,k,-k-1}=-\frac{1}{3}\mu^2$. 再在 (4.11) 式中令 $i=-2k-2,-2k-3,...,$, 我们得到，如果 $k+\ell\leq -2$, 则 $b_{\mu,k,\ell}=0$. 类似地，令 $i=-2k,-2k+1,...$, 得到，如果 $k+\ell\geq 2$, 则 $b_{\mu,k,-k}=-\frac{2}{3}k\mu$, $b_{\mu,k,-k+1}=-\frac{1}{3}k(k-1)$ 且 $b_{\mu,k,\ell}=0$. 由此可以给出下面的定义.

定义 4.2 设有三元组 (M,s,s_0), 其中 M 是 $\mathbf{C}$ 的非空加法子群， $s\in\frac{1}{2}M, s_0\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}$. 与此三元组相连的非阶化 Virasoro 超代数 $NSVir[M,s,s_0]$, 是由 $\{L_{\alpha,i},G_{\mu,k},c\,|\,\alpha\in M, i\in\mathbf{Z},\mu\in s+M, k\in s_0+\mathbf{Z}\}$ 张成的 Lie 超代数，它的换位运算满足 (1.1) 以及 (4.4) 的第二个等式，且对 $\mu,\nu\in s+M, k,\ell\in s_0+\mathbf{Z}$, 有

$$[G_{\mu,k},G_{\nu,\ell}]=2L_{\mu+\nu,k+\ell}-\frac{1}{3}\delta_{\mu+\nu,0}(\delta_{k+\ell,-1}\,\mu^2+2k\delta_{k+\ell,0}\,\mu+k(k-1)\delta_{k+\ell,1})c. \tag{4.13}$$

类似于定义 3.2, 可以定义中间序列 $NSVir[M,s,s_0]$- 模. 而且, 我们可得到三类中间序列模: $SA_{a,a_0,b}$, $SA(a')$, $SB(a')$, $a,a_0,b\in\mathbf{C}, a'\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}$, 其中 $SA_{a,a_0,b}, SA(a')$ 具有基

$$\{v_{\alpha,i}\,|\,\alpha\in M, i\in\mathbf{Z}\}\cup\{w_{\mu,k}\,|\,\mu\in s+M, k\in s_0+\mathbf{Z}\}, \tag{4.14}$$

而 $SB(a')$ 具有基

$$\{v_{\mu,k}\,|\,\mu\in s+M, k\in s_0+\mathbf{Z}\}\cup\{w_{\alpha,i}\,|\,\alpha\in M, i\in\mathbf{Z}\}, \tag{4.15}$$

使得, 对 $\alpha,\beta\in M, i,j\in\mathbf{Z}, \mu,\nu\in s+M, k,\ell\in s_0+\mathbf{Z}$, 有

$$\begin{aligned}
SA_{a,a_0,b}:\quad & L_{\alpha,i}v_{\beta,j}=(a+\beta+\alpha b)v_{\alpha+\beta,i+j}+(a_0+j+ib)v_{\alpha+\beta,i+j-1},\\
& L_{\alpha,i}w_{\nu,\ell}=(a+\nu+\alpha(b-\frac{1}{2}))w_{\alpha+\nu,i+\ell}+(a_0+\ell+i(b-\frac{1}{2}))w_{\alpha+\nu,i+\ell-1},\\
& G_{\mu,k}v_{\beta,j}=w_{\mu+\beta,k+j},\\
& G_{\mu,k}w_{\nu,\ell}=(a+\nu+2\mu(b-\frac{1}{2}))v_{\mu+\nu,k+\ell}+(a_0+\ell+2k(b-\frac{1}{2}))v_{\mu+\nu,k+\ell-1},
\end{aligned}\tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
SA(a'):\quad & L_{\alpha,i}v_{\beta,j}=(\alpha+\beta)v_{\alpha+\beta,i+j}+(i+j-1)v_{\alpha+\beta,i+j-1}+\\
&\qquad\qquad \frac{a'}{2}\delta_{\beta,0}\,\delta_{j,0}(\alpha^2v_{\alpha,i+1}+2i\alpha v_{\alpha,i}+i(i-1)v_{\alpha,i-1}),\\
& L_{\alpha,i}w_{\nu,\ell}=(\nu+\frac{\alpha}{2})w_{\alpha+\nu,i+\ell}+(\ell+\frac{i}{2}-1)w_{\alpha+\nu,i+\ell-1},\\
& G_{\mu,k}v_{\beta,j}=w_{\mu+\beta,k+j}+a'\delta_{\beta,0}\,\delta_{j,0}(\mu w_{\mu,k+1}+(2k-1)w_{\mu,k}),\\
& G_{\mu,k}w_{\nu,\ell}=(\nu+\mu)v_{\mu+\nu,k+\ell}+(\ell+k-1)v_{\mu+\nu,k+\ell-1},
\end{aligned}\tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
SB(a'):\quad & L_{\alpha,i}v_{\nu,\ell}=(\nu+\frac{\alpha}{2})v_{\alpha+\nu,i+\ell}+(\ell+\frac{i}{2})v_{\alpha+\nu,i+\ell-1},\\
& L_{\alpha,i}w_{\beta,j}=\beta w_{\alpha+\beta,i+j}+jw_{\alpha+\beta,i+j-1}-\\
&\qquad\qquad \frac{a'}{2}\delta_{\alpha+\beta,0}(\delta_{i+j,-1}\,\alpha^2+2i\delta_{i+j,0}\,\alpha+i(i-1)\delta_{i+j,1})w_{0,0},\\
& G_{\mu,k}v_{\nu,\ell}=w_{\mu+\nu,k+\ell}+a'\delta_{\mu+\nu,0}(\delta_{k+\ell,-1}\,\mu+k\delta_{k+\ell,0})w_{0,0},\\
& G_{\mu,k}w_{\beta,j}=\beta v_{\mu+\beta,k+j}+jv_{\mu+\beta,k+j-1}.
\end{aligned}\tag{4.18}$$

定理 4.3 (1) $SA_{a,a_0,b}\cong SA_{c,c_0,d}\ \Leftrightarrow\ a-c\in M,\ a_0-c_0\in\mathbf{Z}, b=d.$

(2) $SA_{a,a_0,b}$ 是单的 $\Leftrightarrow(a,a_0,b)\notin M\times\mathbf{Z}\times\{1\}$ 且 $(a,a_0,b)\notin(s+M)\times(s_0+\mathbf{Z})\times\{\frac{1}{2}\}$.

(3) $SA_{0,-1,1}$ 或 $SA(a')$ 有两个复合因子: 由 $\{v_{\alpha,i},w_{\mu,k}\,|\,(0,0)\neq(\alpha,i)\in M\times\mathbf{Z},\mu\in s+M,k\in s_0+\mathbf{Z}\}$ 张成的单子模, 记作 $A'_{0,-1,1}$ 及平凡商模 $A_{0,-1,1}/A'_{0,-1,1}$.

(4) $SA_{-s,-s_0,\frac{1}{2}}$(或相应地 $SB(a')$) 有两个复合因子: 由 w_{s,s_0}(或相应地 $w_{0,0}$) 张成的平凡子模及单商模 $SA_{-s,-s_0,\frac{1}{2}}/\mathbf{C}w_{s,s_0}$(或相应地 $SB(a')/\mathbf{C}w_{0,0}$), 记作 $A'_{-s,-s_0,\frac{1}{2}}$.

参考文献:

[1] GELFAND I M, FUCHS D B. *Cohomologies of the Lie algebra of vector fields on the circle* [J]. (Russian) Funkcional. Anal. i Priložen, 1968, **2**: 92–93.

[2] PATERA J, ZASSENHAUS H. *The higher rank Virasoro algebras* [J]. Comm. Math. Phys., 1991, **136**: 1–14.

[3] MATHIEU O. *Classification of Harish-Chandra modules over the Virasoro Lie algebra* [J]. Invent. Math., 1992, **107**: 225–234.

[4] SU Yu-cai. *Harish-Chandra modules of the intermediate series over the high rank Virasoro algebras and high rank super-Virasoro algebras* [J]. J. Math. Phys., 1994, **35**: 2013–2023.
[5] SU Yu-cai. *Simple modules over the high rank Virasoro algebras* [J]. Comm. Algebra, 2001, **29**: 2067–2080.
[6] SU Yu-cai. *2-Cocycles on the Lie algebras of generalized differential operators* [J]. Comm. Algebra, 2002, **30**: 763–782.
[7] SU Yu-cai, XU Xiao-ping, ZHANG He-chun. *Derivation-simple algebras and the structures of Lie algebras of Witt type* [J]. J. Algebra, 2000, **233**: 642–662.
[8] SU Yu-cai, ZHAO Kai-ming. *Generalized Virasoro and super-Virasoro algebras and modules of the intermediate series* [J]. J. Algebra, 2002, **252**: 1–19.
[9] SU Yu-cai, ZHAO Kai-ming. *Simple algebras of Weyl types* [J]. Sci. China Ser. A, 2001, **44**: 419–426.
[10] SU Yu-cai, ZHAO Kai-ming. *Second cohomology group of generalized Witt type Lie algebras and certain representations* [J]. Comm. Algebra, 2002, **30**: 3285–3309.
[11] SU Yu-cai, ZHOU Jian-hua. *Some representations of non-graded Lie algebras of generalized Witt type* [J]. J. Algebra, 2001, **246**: 721–738.
[12] XU Xiao-ping. *New generalized simple Lie algebras of Cartan type over a field with characteristic 0* [J]. J. Algebra, 2000, **224**: 23–58.

Nongraded Virasoro and Super-Virasoro Algebras and Modules of Intermediate Series

ZHU Lin[1], *SU Yu-cai*[2]
(1. Dept. of Math., Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China;
2. Dept. of Math., University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: A notion of the nongraded (super) Virasoro algebras is introduced, and the modules of the intermediate series over the nongraded Virasoro and super-Virasoro algebras are presented, and the modules of the intermediate series over a subalgebra of the non-graded Virasoro algebra (a rank 1 non-graded Witt algebra) are classified.

Key words: non-graded Virasoro algebra; module of the intermediate series.