第26卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0334-07 **文献标识码**: **A**

广义 p-Laplace 算子相关的非线性边值问题解的存在性

魏 利[1,2], 周海云[2,3]

(1. 河北经贸大学数学与统计学学院, 河北 石家庄 050061;
2. 军械工程学院应用数学与力学研究所, 河北 石家庄 050003;
3. 河北师范大学数学与信息科学学院, 河北 石家庄 050016)
(E-mail: diandianba@yahoo.com)

摘 要: 本文首先把 p-Laplace 算子推广为广义 p-Laplace 算子, 然后利用非线性增生映射值域的扰动理论研究了与广义 p-Laplace 算子相关的具有牛曼边值的非线性椭圆问题在 $L^p(\Omega)$ 空间中解的存在性, 其中 $2 \le p < +\infty$. 本文所讨论的方程及所用的方法是对以往一些工作的补充和延续.

关键词: 增生映射; 单调算子; demi 连续映射; 严格凸空间.
MSC(2000): 47H09, 47H05, 49H05
中图分类: O177.91

1 引言及预备知识

设 X 是实 Banach 空间, 其对偶空间 X^* 严格凸. 用 (u,w) 表示 $w \in X^*$ 在 $u \in X$ 处的函数值. 对 X 中子集 G, 分别用 Int$G$ 和 ClG 表示其内部和强闭包. 映射 $T: D(T) = X \to X^*$ 称为 demi 连续的: 若 T 从 X 的强拓扑到 X^* 的弱拓扑连续. 对偶映射 $J: X \to X^*$ 定义为 $(u, Ju) = \|u\|^2$ 且 $\|Ju\| = \|u\|, \forall u \in X$. 因 X^* 严格凸, 故 J 为单值的. 设 $A: X \to 2^X$ 为一给定的映射. 称 A 是有界逆紧的: 如果对 X 中任意有界子集 G 和 G', 集合 $G \cap A^{-1}(G')$ 是 X 中的相对紧集. 称 $A: X \to 2^X$ 为增生映射: 如果对 $u_i \in D(A)$, $v_i \in Au_i$, i= 1, 2, 有 $(v_1 - v_2, J(u_1 - u_2)) \ge 0$ 成立. 增生映射 A 称为 m 增生映射: 如果对某数 $\lambda > 0$, $R(I + \lambda A) = X$. 设 $B: X \to 2^{X^*}$ 为多值映射, 其图象 $G(B)$ 定义为 $G(B) = \{[u,w], u \in D(B), w \in Bu\}$. 称 B 为单调映射: 如果 $G(B)$ 是 $X \times X^*$ 中的单调集, 即: $\forall [u_i, w_i] \in G(B)$, $i = 1$, 2 , 有 $(u_1 - u_2, w_1 - w_2) \ge 0$ 成立. 单调映射 B 称为极大单调的: 若 $G(B)$ 不真含于 $X \times X^*$ 的任何单调集中. 多值映射 $B: X \to 2^{X^*}$ 称为强迫的: 若 $\forall [x_n, x_n^*] \in G(B)$ 且 $\lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = +\infty$, 有 $\lim_{n \to +\infty} \frac{(x_n, x_n^*)}{\|x_n\|} = \infty$ 成立.

定理 1.1[1] 设 X 为实 Banach 空间, 其对偶空间 X^* 严格凸. 令 $J: X \to X^*$ 为对偶映射且满足条件 (I). 设 A, $B_1: X \to 2^X$ 均为增生映射且满足:

(i) 或者 A 和 B_1 均满足条件 (*), 或者 $D(A) \subset D(B_1)$ 且 B_1 满足条件 (*);

(ii) $A + B_1$ 是 m 增生、有界逆紧映射. 令 $B_2: X \to X$ 是有界、连续映射且对 $\forall y \in X$, 存在 $C(y)$ 满足: $(B_2(u+y), Ju) \ge -C(y), \forall u \in X$. 则 $\mathrm{Cl}[R(A) + R(B_1)] \subset \mathrm{Cl}R(A + B_1 + B_2)$ 且 $\mathrm{Int}[R(A) + R(B_1)] \subset \mathrm{Int}R(A + B_1 + B_2)$.

收稿日期: 2004-05-24
基金项目: 国家自然科学基金 (10471003)

与 p-Laplace 算子 $\triangle_p$ 相关的方程的解的存在性问题一直活跃在数学领域. 笔者也曾围绕这方面做过一些工作 [2–5]. 本文的目的是继续推进该课题的研究.

2 主要结论

设 Ω 是欧氏空间 R^N $(N \geq 1)$ 中的有界锥形区域，其边界 $\Gamma \in C^1$ 且使格林公式成立. 令 $\varphi: \Gamma \times R \to R$ 为一给定函数，对 $\forall x \in \Gamma$ 满足：

(i) $\varphi_x = \varphi(x,) : R \to R$ 是正常、凸、下半连续函数且 $\varphi_x(0) = 0$.

(ii) $\beta_x = \partial\varphi_x($ φ_x 的次微分$)$ 是 R 上的极大单调映射，$0 \in \beta_x(0)$，且对 $\forall t \in R$ 及 $\forall \lambda > 0$, 函数 $x \in \Gamma \to (I + \lambda\beta_x)^{-1}(t) \in R$ 可测.

本节研究以下非线性边值问题：对给定的 $f \in L^p(\Omega)$, $2 \leq p < +\infty$, 求 $u \in L^p(\Omega)$ 满足：

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\{(C(x) + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u\} + |u|^{p-2}u + g(x,u) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \\ -\langle n, (C(x) + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u\rangle \in \beta_x(u(x)), \quad \text{a.e. } x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $0 \leq C(x) \in L^p(\Omega)$, n 为 Γ 的外法向导数，$|\cdot|$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 分别表示 R^N 中的范数和内积. $g: \Omega \times R \to R$ 是一给定的函数且满足 Caratheodory 条件，并使映射 $u \in L^p(\Omega) \to g(x, u(x)) \in L^p(\Omega)$ $(2 \leq p < +\infty)$ 有意义. 进一步假设存在非负函数 $T(x) \in L^p(\Omega)$ 满足：当 $|t| \geq T(x)$, $x \in \Omega$ 时，$g(x,t)t \geq 0$.

令 $g_+(x) = \lim_{t\to+\infty} g(x,t)$ 且 $g_-(x) = \lim_{t\to-\infty} g(x,t)$.

注 2.1 如果方程 (1) 中 $\mathrm{div}\{(C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u\}$ 中的函数 $C(x) \equiv 0$, 则：$\mathrm{div}\{(C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u\}$ 就退化为 p-Laplace 算子 $\triangle_p$, 所以本文是对文 [2–5] 所讨论的含有 p-Laplace 算子 $\triangle_p$ 的方程的推广和延续.

定义 2.1[1] $g_1 : \Omega \times R \to R$ 定义为：

$$g_1(x,t) = \begin{cases} (\inf_{s\geq t} g(x,s)) \wedge (t - T(x)), & \forall t \geq T(x) \\ 0 & \forall t \in [-T(x), T(x)] \\ (\sup_{s\leq t} g(x,s)) \vee (t + T(x)), & \forall t \leq -T(x), \end{cases}$$

则：$\forall x \in \Omega$, $g_1(x,t)$ 关于 t 单调增且 $\lim_{t\to\pm\infty} g_1(x,t) = g_\pm(x)$. 而且 $g_1 : \Omega \times R \to R$ 满足 Caratheodory 条件且函数 $g_\pm(x)$ 在 Ω 上可测. 令 $g_2(x,t) = g(x,t) - g_1(x,t)$, 则：当 $|t| \geq T(x)$, $x \in \Omega$ 时，$g_2(x,t)t \geq 0$.

映射 $B_1 : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $2 \leq p < +\infty$ 定义为：$(B_1u)(x) = g_1(x, u(x))$, $\forall u \in L^p(\Omega)$, $x \in \Omega$, 则：B_1 是有界、连续、m 增生映射.

映射 $B_2 : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $2 \leq p < +\infty$ 定义为 $(B_2u)(x) = g_2(x, u(x))$, (其中 $g_2(x,t) = g(x,t) - g_1(x,t)$)，则：B_2 满足 $\forall u, y \in L^p(\Omega)$,

$$(B_2(u + y), J_pu) \geq -C(y), \tag{2}$$

其中 $J_p : L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$ 为对偶映射.

引理 2.1 映射 $B_p : W^{1,p}(\Omega) \to (W^{1,p}(\Omega))^*$, $2 \leq p < +\infty$ 定义为：$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$(v, B_pu) = \int_\Omega < (C(x) + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u, \nabla v > \mathrm{d}x + \int_\Omega |u(x)|^{p-2}u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

则映射 B_p 处处有定义、单调、 demi 连续，从而 B_p 极大单调；而且 B_p 是强迫的.

证明 由已知条件易知：映射 $B_p: W^{1,p}(\Omega) \to (W^{1,p}(\Omega))^*$ 处处有定义、单调且强迫. 下证 $B_p: W^{1,p}(\Omega) \to (W^{1,p}(\Omega))^*$ 是 demi 连续的.

令 $\{u_n\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ 且 $u_n \to u$ 于 $W^{1,p}(\Omega)$, $n \to \infty$, 只需证 $\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$, $(v, B_pu_n - B_pu) \to 0$, $n \to \infty$. 事实上

$$|(v, B_pu_n - B_pu)| \leq \int_\Omega |(C(x) + |\nabla u_n|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_n - (C(x) + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u||\nabla v| \mathrm{d}x + \int_\Omega ||u_n(x)|^{p-2}u_n(x) - |u(x)|^{p-2}u(x)||v(x)| \mathrm{d}x \tag{3}$$

如果 $p = 2$, 由 (3) 式显然有： $(v, B_pu_n - B_pu) \to 0$, $n \to \infty$.

如果 $p > 2$, 先讨论 (3) 中的 $\int_\Omega |(C(x) + |\nabla u_n|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_n - (C(x) + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u||\nabla v| \mathrm{d}x$.

因为

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |(C(x) + |\nabla u_n|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_n - (C(x) + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u||\nabla v| \mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega |(C(x) + |\nabla u_n|^2)^{\frac{p-2}{2}} - (C(x) + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}||\nabla v||\nabla u_n| \mathrm{d}x + \\
&\quad \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u||(C(x) + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}||\nabla v| \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u||(C(x) + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}||\nabla v| \mathrm{d}x \\
&\leq |||\nabla u_n - \nabla u|||_p \{\int_\Omega |\nabla v|^{p'} [2\max(C(x), |\nabla u|^2)]^{\frac{(p-2)p'}{2}} \mathrm{d}x\}^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \mathrm{const} |||\nabla u_n - \nabla u|||_p \{|||\nabla v|||_p^{\frac{p+p'}{p}} \|C(x)\|_p^{\frac{p-p'}{2}} + |||\nabla u|||_p^{p-p'} |||\nabla v|||_p^{p'}\}^{\frac{1}{p'}} \\
&\to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

对 $\int_\Omega |(C(x) + |\nabla u_n|^2)^{\frac{p-2}{2}} - (C(x) + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}||\nabla v||\nabla u_n| \mathrm{d}x$ 可分下面两种情况讨论：

当 $2 < p \leq 4$ 时，利用文 [2] 中引理 1.1 有：

$$|(C(x) + |\nabla u_n|^2)^{\frac{p-2}{2}} - (C(x) + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}| \leq \mathrm{const} |\nabla u_n - \nabla u|^{\frac{p-2}{2}} (|\nabla u_n|^{\frac{p-2}{2}} + |\nabla u|^{\frac{p-2}{2}}).$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |(C(x) + |\nabla u_n|^2)^{\frac{p-2}{2}} - (C(x) + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}||\nabla v||\nabla u_n| \mathrm{d}x \\
&\leq \mathrm{const} |||\nabla v|||_p |||\nabla u_n|||_p^{\frac{p}{2}} |||\nabla u_n - \nabla u|||_p^{\frac{p-p'}{2p'}} + \\
&\quad \mathrm{const} |||\nabla v|||_p |||\nabla u|||_p^{\frac{p-2}{2}} |||\nabla u_n - \nabla u|||_p^{\frac{p}{2}} + \\
&\quad \mathrm{const} |||\nabla v|||_p |||\nabla u|||_p^{\frac{p}{2}} |||\nabla u_n - \nabla u|||_p^{\frac{p-2}{2}} \to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

当 $4 \le p < +\infty$ 时，利用文 [2] 中引理 1.1 有：

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |(C(x)+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p-2}{2}} - (C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}||\nabla v||\nabla u_n|\mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega k|\nabla v||\nabla u_n|(2C(x)+|\nabla u_n|^2+|\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}-2}||\nabla u_n|^2-|\nabla u|^2|\mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega 3^{\frac{p}{2}-2}k|\nabla v||\nabla u_n|[\max(2C(x),|\nabla u_n|^2,|\nabla u|^2)]^{\frac{p}{2}-2}||\nabla u_n|^2-|\nabla u|^2|\mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega 3^{\frac{p}{2}-2}k|\nabla v||\nabla u_n|[2^{\frac{p}{2}-2}C(x)^{\frac{p}{2}-2}+|\nabla u_n|^{p-4}+|\nabla u|^{p-4}]k'|\nabla u_n-\nabla u|(|\nabla u_n|+|\nabla u|)\mathrm{d}x \\
&\le \mathrm{const}\|C(x)\|_p^{\frac{p-4}{2}}\||\nabla u_n-\nabla u|\|_p\||\nabla v|\|_{\frac{2p}{p-2}}\||\nabla u_n|\|_p^2+ \\
&\quad \mathrm{const}\|C(x)\|_p^{\frac{p-4}{2}}\||\nabla u_n-\nabla u|\|_p^2\||\nabla v|\|_{\frac{2p}{p-2}}\||\nabla u|\|_p+ \\
&\quad \mathrm{const}\|C(x)\|_p^{\frac{p-4}{2}}\||\nabla u_n-\nabla u|\|_p\||\nabla v|\|_{\frac{2p}{p-2}}\||\nabla u|\|_p^2+ \\
&\quad \mathrm{const}\||\nabla u_n-\nabla u|\|_p\||\nabla u|\|_p^{\frac{p-p'}{p'}}\||\nabla v|\|_p+\mathrm{const}\||\nabla u_n-\nabla u|\|_p^{\frac{p}{p'}}\||\nabla v|\|_p+ \\
&\quad \mathrm{const}\||\nabla u_n-\nabla u|\|_p^{p-2}\||\nabla u|\|_p\||\nabla v|\|_p+const\||\nabla u_n-\nabla u|\|_p^{p-3}\||\nabla u|\|_p^2\||\nabla v|\|_p+ \\
&\quad \mathrm{const}\||\nabla u_n-\nabla u|\|_p^{\frac{p-p'}{p'}}\||\nabla v|\|_p\||\nabla u_n|\|_p+ \\
&\quad \mathrm{const}\||\nabla u_n-\nabla u|\|_p\||\nabla v|\|_p\||\nabla u_n|\|_p^{\frac{p-p'}{p'}} \to 0,\quad n\to\infty,
\end{aligned}$$

从而 $\int_\Omega |(C(x)+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u_n - (C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u||\nabla v|\mathrm{d}x \to 0$, 当 $n\to+\infty$.

类似可证 $\int_\Omega ||u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u||v|\mathrm{d}x\to 0$, 故 B_p 是 demi 连续的. □

注 2.2 因为引理 2.1 中的 B_p 不同于文 [2–5], 故证明过程与文 [2–5] 相比更难些.

引理 2.2 函数 $\Phi_p : W^{1,p}(\Omega)\to R$, $2\le p<+\infty$ 定义为 $\Phi_p(u)=\int_\Gamma \varphi_x(u|_\Gamma(x))\mathrm{d}\Gamma(x)$, $\forall u\in W^{1,p}(\Omega)$. 则 Φ_p 为 $W^{1,p}(\Omega)$ 上的正常、凸、下半连续函数.

证明 类似于文 [1] 中引理 3.1 可证结论成立. □

定义 2.2 映射 $A_p : L^p(\Omega)\to 2^{L^p(\Omega)}$, $2\le p<+\infty$ 定义为：

$$D(A_p)=\{u\in L^p(\Omega)|\exists f\in L^p(\Omega),$$

满足 $f\in B_pu+\partial\Phi_p(u)\}$, 对 $u\in D(A_p)$, 令 $A_pu=\{f\in L^p(\Omega)|f\in B_pu+\partial\Phi_p(u)\}$.

命题 2.1 映射 $A_p : L^p(\Omega)\to 2^{L^p(\Omega)}$, $2\le p<+\infty$ 是 m 增生映射.

证明 先证 $R(I+\lambda A_p)=L^p(\Omega)$, $\forall\lambda>0$.

事实上，因 $2\le p<+\infty$, 故 $W^{1,p}(\Omega)\subset L^p(\Omega)\subset L^{p'}(\Omega)\subset (W^{1,p}(\Omega))^*$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. 从而可定义 $I_p : W^{1,p}(\Omega)\to (W^{1,p}(\Omega))^*$ 为 $I_pu=u$ 且 $(v,I_pu)_{(W^{1,p}(\Omega))^*\times W^{1,p}(\Omega)}=(v,u)_{H^1(\Omega)}$, $u,v\in W^{1,p}(\Omega)$, 这里 $(v,u)_{H^1(\Omega)}$ 表示 $H^1(\Omega)$ 中的内积. 则： I_p 处处有定义、单调且 demi 连续.

对 $\forall\lambda>0$, 再定义映射 $T_\lambda : W^{1,p}(\Omega)\to 2^{(W^{1,p}(\Omega))^*}$ 为 $T_\lambda u=I_pu+\lambda B_pu+\lambda\partial\Phi_p(u)$. 则：由引理 2.1, 2.2 及 I_p 的性质，易知 T_λ 极大单调且强迫. 从而 $R(T_\lambda)=(W^{1,p}(\Omega))^*\supset L^p(\Omega)$. 因此 $R(I+\lambda A_p)=L^p(\Omega)$.

注意引理 2.1, 并利用类似于文 [3] 证明命题 2.1 的方法还可证： A_p 是增生的. □

注 2.3 在命题 2.1 中证明 $R(I+\lambda A_p)=L^p(\Omega)$ 时，采用了不同于文 [2–5] 的方法，较之更简单.

注 2.4 因当 $u\in W^{1,p}(\Omega)$, $\alpha\in C_0^\infty(\Omega)$ 时，$\Phi_p(u+\alpha)=\Phi_p(u)$, 故 $f\in A_pu(2\le p<+\infty)$ 蕴涵在分布意义下 $f=B_pu$.

命题 2.2 令 $f\in L^p(\Omega)$, $u\in L^p(\Omega)$, $2\le p<+\infty$ 满足 $f=A_pu$. 则:

(a) $-\operatorname{div}\{(C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u\}+|u|^{p-2}u=f(x)$, a.e. $x\in\Omega$;

(b) $-\langle n,(C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u\rangle\in\beta_x(u(x))$, a.e. $x\in\Gamma$.

证明 (a) 由注 2.4, 类似于文 [3] 中命题 2.2 可证 (a) 成立.

(b) 我们将在 $|\beta_x(u)|\le a|u|^{\frac{p}{p'}}+b(x)$ 其中 $b(x)\in L^{p'}(\Gamma)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ 和 $a\in R$ 的条件下证明 (b), 至于一般情形参见 [6].

因 $f\in A_pu$, 故由 (a) 知: $f(x)=-\operatorname{div}\{(C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u\}+|u|^{p-2}u\in L^p(\Omega)$, $2\le p<+\infty$, 利用格林公式知: $\forall v\in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma\langle n,(C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u\rangle v|_\Gamma(x)\mathrm{d}\Gamma(x)\\&=\int_\Omega\operatorname{div}\{(C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u\}v\mathrm{d}x+\int_\Omega\langle(C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u,\nabla v\rangle\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从而 $-\langle n,(C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u\rangle\in W^{-\frac{1}{p},p'}(\Gamma)=(W^{\frac{1}{p},p}(\Gamma))^*$, 其中 $W^{\frac{1}{p},p'}(\Gamma)$ 是 $W^{1,p}(\Omega)$ 的迹空间.

定义 $B:L^p(\Gamma)\to L^{p'}(\Gamma)$ 为 $Bu(x)=g(x)$, $u\in L^p(\Gamma)$, 如果 $g(x)=\beta_x(u(x))$ a.e. $x\in\Gamma$. 显然 $B=\partial\Psi$, 其中 $\Psi(u)=\int_\Gamma\varphi_x(u(x))\mathrm{d}\Gamma(x)$ 是 $L^p(\Gamma)$ 上的正常、凸、下半连续函数.

定义 $K:W^{1,p}(\Omega)\to L^p(\Gamma)$ 为 $K(v)=v|_\Gamma$, $\forall v\in W^{1,p}(\Omega)$. 因 K, B 均连续，故 $K^*BK:W^{1,p}(\Omega)\to(W^{1,p}(\Omega))^*$ 是极大单调算子. 因为 $\forall u,v\in W^{1,p}(\Omega)$ 有

$$\begin{aligned}\Psi(Kv)-\Psi(Ku)&=\int_\Gamma[\varphi_x(v|_\Gamma(x))-\varphi_x(u|_\Gamma(x))]\mathrm{d}\Gamma(x)\\&\ge\int_\Gamma\beta_x(u|_\Gamma(x))(v|_\Gamma(x)-u|_\Gamma(x))\mathrm{d}\Gamma(x)\\&=(BKu,Kv-Ku)=(K^*BKu,v-u).\end{aligned}$$

所以 $K^*BK\subset\partial\Phi_p$ 从而 $K^*BK=\partial\Phi_p$. (这里 Φ_p 同于引理 2.2). 于是

$$-\langle n,(C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u\rangle\in\beta_x(u(x)),\quad \text{a.e. } x\in\Gamma.$$

注 2.5[3] $\forall x\in\Gamma$, 当 $\beta_x\equiv0$ 时，$\partial\Phi_p(u)\equiv0$, $\forall u\in W^{1,p}(\Omega)$, $2\le p<+\infty$.

命题 2.3 $\forall x\in\Gamma$, 当 $\beta_x\equiv0$ 时，$\{f\in L^p(\Omega)|\int_\Omega f\mathrm{d}x=0\}\subset R(A_p)$, $2\le p<+\infty$.

证明 由引理 2.1 知: B_p 是极大单调且强迫的, 从而 $R(B_p)=(W^{1,p}(\Omega))^*$. 对 $f\in L^p(\Omega)$, $\int_\Omega f\mathrm{d}x=0$, 线性泛函 $u\in W^{1,p}(\Omega)\to\int_\Omega fu\mathrm{d}x$ 是 $(W^{1,p}(\Omega))^*$ 中的元. 于是存在 $u\in W^{1,p}(\Omega)$ 满足: $\forall v\in(W^{1,p}(\Omega))^*$, $(v,f)=(v,B_pu)$. 故由注 2.5 知: $f=A_pu$. □

定义 2.3[3] 设 $t\in R,x\in\Gamma$, 若 $\beta_x(t)\ne\Phi$, 令 $\beta_x^0(t)\in\beta_x(t)$ 为绝对值最小元; 若 $\beta_x(t)=\Phi$, 令 $\beta_x^0(t)=\pm\infty(t>0$ 或 $<0)$. 再定义 $\beta_\pm(x)=\lim_{t\to\pm\infty}\beta_x^0(t)$ (在广义意义下), $\forall x\in\Gamma$. 利用对 β_x 的假设知: $\beta_\pm(x)$ 在上可测.

命题 2.4 令 $f \in L^p(\Omega)$, $2 \le p < +\infty$ 满足

$$\int_\Gamma \beta_-(x)\mathrm{d}\Gamma(x) < \int_\Omega f\mathrm{d}x < \int_\Gamma \beta_+(x)\mathrm{d}\Gamma(x), \tag{4}$$

则 $f \in \mathrm{Int}R(A_p)$.

证明 令 $f \in L^p(\Omega)$ 满足 (4) 式，由命题 2.1 知： $\forall n \ge 1$, $\exists u_n \in D(A_p)$ 满足： $f = \frac{1}{n}u_n + A_p u_n$. 同文 [3] 中命题 2.4, 为证结论成立，只须证明 $\|u_n\|_p \le$ 常数， $\forall n \ge 1$.

若不然，假设 $1 \le \|u_n\|_p \to \infty$, 当 $n \to \infty$ 时，令 $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_p}$.

定义 $\psi : R \to R$ 为 $\psi(t) = |t|^p$, 令 $\partial\psi : R \to R$ 为其次微分，对 $\mu > 0$, $\partial\psi_\mu : R \to R$ 表示 $\partial\psi$ 的 Yosida 逼近. 令 θ_μ 为 $[(\partial\psi_\mu)']^{\frac{1}{p}}$ 的不定积分且 $\theta_\mu(0) = 0$, 则 $(\theta'_\mu)^p = (\partial\psi_\mu)'$. 于是由文 [3] 中命题 2.4 知

$$(\partial\psi_\mu(v_n), \partial\Phi_p(u_n)) \ge \int_\Gamma \beta_x((1+\mu\partial\psi)^{-1}(u_n|_\Gamma(x))) \times \partial\psi_\mu(v_n|_\Gamma(x))\mathrm{d}\Gamma(x) \ge 0. \tag{5}$$

在方程 $f = \frac{1}{n}u_n + A_p u_n$ 的两边同时作用 $\partial\psi_\mu(v_n)$, 有

$$(\partial\psi_\mu(v_n), f) = (\partial\psi_\mu(v_n), \frac{1}{n}u_n) + (\partial\psi_\mu(v_n), B_p u_n) + (\partial\psi_\mu(v_n), \partial\Phi_p(u_n)).$$

因 $\partial\psi_\mu(0) = 0$, 故 $(\partial\psi_\mu(v_n), u_n) \ge 0$.

又因

$$\begin{aligned}(\partial\psi_\mu(v_n), B_p u_n) &= \int_\Omega \langle (C(x) + |\nabla u_n|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_n, \nabla v_n \rangle (\partial\psi_\mu)'(v_n)\mathrm{d}x + \int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n \partial\psi_\mu(v_n)\mathrm{d}x \\ &\ge \mathrm{const}\|u_n\|_p^{p-1} \int_\Omega |\mathrm{grad}(\theta_\mu(v_n))|^p \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故由 (5) 知

$$\begin{aligned}&\mathrm{const}\|u_n\|_p^{p-1} \int_\Omega |\mathrm{grad}(\theta_\mu(v_n))|^p\mathrm{d}x + \int_\Gamma \beta_x((1+\mu\partial\psi)^{-1}(u_n|_\Gamma(x))) \times \partial\psi_\mu(v_n|_\Gamma(x))\mathrm{d}\Gamma(x) \\ &\le (\partial\psi_\mu(v_n), f).\end{aligned}$$

以下证明同于文 [3] 中命题 2.4. □

定理 令 $f \in L^p(\Omega)$, $2 \le p < +\infty$ 满足

$$\int_\Gamma \beta_-(x)\mathrm{d}\Gamma(x) + \int_\Omega g_-(x)\mathrm{d}x < \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x < \int_\Gamma \beta_+(x)\mathrm{d}\Gamma(x) + \int_\Omega g_+(x)\mathrm{d}x,$$

则方程 (1) 在 $L^p(\Omega)$ 中有解.

证明 令 $A_p : L^p(\Omega) \to 2^{L^p(\Omega)}$ 为定义 2.2 中所定义的 m- 增生映射, 令 $B_i : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $i = 1, 2$ 为定义 2.1 中的映射. 为证结论成立，由命题 2.2 知：只需证明 $f \in R(A_p + B_1 + B_2)$. 而若能验证定理 1.1 的条件全被满足, 则证明 $f \in R(A_p + B_1 + B_2)$, 就转化为证明 $f \in Int[R(A_p) + R(B_1)]$. 于是下面来检验定理 1.1 的条件被满足.

首先， A_p+B_1 是有界逆紧的．事实上，只需证明：若 $w=A_pu+B_1u$ 且 $\{w\}$ 和 $\{u\}$ 均在 $L^p(\Omega)$ 中有界，则： $\{u\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中相对紧．因为

$$\begin{aligned}\text{const}\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x&\le\int_\Omega\langle(C(x)+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u,\nabla u\rangle\mathrm{d}x+\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\\&=(u,B_pu)=(u,A_pu)-(u,\partial\Phi_p(u))\\&\le(u,A_pu)+(u,B_1u)=(u,w)\\&\le\|u\|_p\|w\|_p\le\text{const},\end{aligned}$$

从而 $\|u\|_{1,p}\le\text{const}$. 又因 $\Gamma\in C^1$，故 $W^{1,p}(\Omega)$ 紧嵌入到 $L^p(\Omega)$ 中， $2\le p<+\infty$. 从而 $\{u\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中相对紧.

同 [3] 中定理的证明，定理 1.1 中的其它条件也满足．此外，同 [3] 中定理的证明，分两种情况分别利用命题 2.3 和 2.4 还知 $f\in\text{Int}[R(A_p)+R(B_1)]$. 从而结论得证. □

参考文献：

[1] CALVERT B D, GUPTA C P. *Nonlinear elliptic boundary value problems in L^p-spaces and sums of ranges of accretive operators* [J]. Nonlinear Anal., 1978, **2**: 1–26.
[2] WEI Li, HE Zhen. *The applications of sums of ranges of accretive operators to nonlinear equations involving the P-Laplacian operator* [J]. Nonlinear Anal., 1995, **24**: 185–193.
[3] WEI Li, HE Zhen. *The applications of theories of accretive operators to nonlinear elliptic boundary value problems in L^p-spaces* [J]. Nonlinear Anal., 2001, **46**: 199–211.
[4] 魏利．一类非线性椭圆边值问题解的存在性 [J]. 数学的实践与认识， 2001, **31**: 360–364.
WEI Li. *The existence of solution of nonlinear elliptic boundary value problem* [J]. Math. Practice Theory, 2001, **31**: 360–364. (in Chinese)
[5] 魏利．对非线性椭圆边值问题解的存在性的研究 [J]. 数学的实践与认识， 2004, **34**: 123–130.
WEI Li. *Study of existence of solutions for nonlinear elliptic boundary value problems* [J]. Math. Practice Theory, 2004, **34**: 123–130. (in Chinese)
[6] BRÉZIS H. *Intégrales convexes dans les espaces de Sobolev* [J]. Israel J. Math., 1972, **13**: 9–23.

Existence of Solution of Nonlinear Boundary Value Problem Involving Generalized p-Laplacian Operator

WEI Li[1,2], *ZHOU Hai-yun*[2,3]
(1. School of Math. & Stat., Hebei University of Economics and Business, Shijiazhuang 050061, China;
2. Inst. of Appl. Math. & Mech., Ordnance Engineering College, Shijizhuang 050003, China;
3. Inst. of Math. & Inform. Sci., Hebei Normal University, Shijizhuang 050016, China)

Abstract: In this paper, the p-Laplacian operator is generalized to the generalized p-Laplacian operator. Then, the perturbation results of the ranges of nonlinear accretive mappings are used to discuss, the existence of the solution of the nonlinear elliptic problem with Neumann boundary value involving the generalized p-Laplacian operator in $L^p(\Omega)$ space, $2\le p<+\infty$. The equations and methods here are continuation and complement to some previous works.

Key words: Accretive mapping; monotone operator; demi-continuous mapping; strictly convex space.