第26卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0369-08 **文献标识码**: A

弱 Hopf 代数的对偶定理及 Smash 积的模结构

张莉娜 [1], 倪沈冰 [2]
(1. 上海交通大学医学院, 上海 200025; 2. 上海交通大学管理学院, 上海 200030)
(E-mail: zhanglina@ssmustat.com)

摘　要: 本文主要包括两方面内容：首先将 Hopf 代数理论中的对偶定理部分地推广到弱 Hopf 代数的情况；然后讨论弱 Hopf 代数上的 Smash 积的模及模同态, 并部分地推广了 Maschke-type 定理.

关键词: 弱 Hopf 代数; Smash 积; 模代数.
MSC(2000): 16W30
中图分类: O153.3

1 引 言

对偶定理是 Hopf 代数中一个重要的定理, 它来源于对群代数的研究. Nakagami 与 Takesaki 利用对偶的概念使对某些代数的拓扑结构的处理更为简洁 [1], 其后 Cohen 与 Montgomery 对有限群证明了对偶形式的定理, 并用它来对群分次环进行了研究 [2]. 在这之后 Blattner 与 Montgomery 又进一步对一般的有限维 Hopf 代数和某些无限维 Hopf 代数证明了对偶定理 [3].

定理 1.1 令 H 为域 F 上的 Hopf 代数且有可逆对极. 令 U 是 H^o 的子 Hopf 代数且有可逆对极, A 是 H- 模代数且是 U- 局部有限的. 设 U 对 H 满足 RL- 条件, 则:

$$(A\#H)\#U\cong A\otimes(H\#U).$$

研究群作用及群分次环的另一种途径是考察一个有限维 Hopf 代数 H 作用于一个 H- 模代数 A 上的结构, Cohen 与 Fishman 给出了如何由 A- 模同态诱导 $A\#H$- 模同态, 并由此得到了 Maschke-type 定理 [4].

定理 1.2 令 H 为半单的有限维 Hopf 代数, A 为 H- 模代数, 令 V 为左 $A\#H$- 模, W 是 V 的 $A\#H$- 子模, 若 W 是 V 的 A- 直和, 则 W 是 V 的 $A\#H$- 直和.

在本文中我们将把以上的一些结果部分地推广到弱 Hopf 代数的情况. 弱 Hopf 代数的定义由 [5],[6] 在研究 Yang-Baxter 方程的奇异解时引进:

定义 1.3 设 H 为双代数, 若存在 $T\in\mathrm{Hom}(H,H)$, 使得: $id*T*id=id, T*id*T=T$, 则称 H 是弱 Hopf 代数, 且 T 称为 H 的弱对极. 若 $(id*T)(h)$ 及 $(T*id)(h)$ 均属于 $C(H)$, 即 $\sum h'T(h''),\sum T(h')h''\in C(H)$, 其中 $h\in H$, 则称 H 为完备的弱 Hopf 代数. 本文中没有解释的有关 Hopf 代数和弱 Hopf 代数的其他概念, 请参阅 [7-9].

2 对偶定理

首先引入本文中相关的一些记号和定义:

收稿日期: 2004-01-13

设 H 为弱 Hopf 代数，则 H^o 也是弱 Hopf 代数. 令 A 为 (左)H- 模代数， H 在 A 上作用记为 $h\cdot a$, 其中 $h\in H, a\in A$. H 是右且左 H^o- 模代数， H^o 在 H 上的左作用记为 $f\rightharpoonup h$ 满足： $f\rightharpoonup h=\sum f(h'')h'=(\mu\circ\tau\circ(id\otimes f)\circ\Delta)(h)$, 其中 $f\in H^o, h\in H$. 同理，H^o 在 H 上的右作用记为 $h\leftharpoonup f$ 满足： $h\leftharpoonup f=\sum f(h')h''=(\mu\circ(f\otimes id)\circ\Delta)(h)$, 其中 $f\in H^o, h\in H$, 此时 $A\#H$ 成为 (左)H^o- 模代数，其模作用为： $f\cdot(a\#h)=a\#(f\rightharpoonup h)$, 其中 $f\in H^o, a\in A, h\in H$. 对任意弱 Hopf 代数 K 及 (左)K- 模代数 B, 有代数同态： $\lambda_{B,K}$: $B\#K\to \mathrm{End}_F(B)$, $\lambda_{B,K}(b\#k)(c)=b(k\cdot c)$, 其中 $k\in K, b, c\in B$.

特别地，若 $B=H$, $K=U$, U 为 H^o 的子弱 Hopf 代数，则有代数同态：

$$\rho_{H,U}\to \mathrm{End}_F(H)\,,\quad \rho_{H,U}(f)(h)=h\leftharpoonup f,$$

其中 $h\in H, f\in U$. 此时， U 在 H 上右作用为 $\rho_{H,U}$, $H\#U$ 在 H 上左作用为 $\lambda_{H,U}$.

定义 2.1[3] 令 A 为 (左)H- 模代数，且令 U 为 H^o 的子弱 Hopf 代数，若对任意的 $a\in A$, 存在 $f_1,\cdots,f_r\in U$, 使得 $\left(\cap_{j=1}^{r}\mathrm{Ker}f_j\right)\cdot a=0$, 则 A 称为 U- 局部有限的.

定义 2.2[3] 令 H 为弱 Hopf 代数, U 为 H^o 的子弱 Hopf 代数, 若 $\rho_{H,U}(U)\subseteq\lambda_{H,U}(H\#U)$, 则称 U 对 H 满足 RL- 条件.

定义 2.3 设 H 为有限维弱 Hopf 代数， $x\in H$, 若对任意的 $h\in H$, 有 $hx=\varepsilon(h)x$, (分别地： $xh=\varepsilon(h)x$), 则称 x 属于 H 的左 (分别地：右) 积分，记为 $x\in\int_l$ (分别地： $x\in\int_r$), $\int_l$ (分别地： $\int_r$) 称为 H 的左 (分别地：右) 积分. 若 $\int_l=\int_r$, 则记 $\int_l=\int_r=\int$, 称为 H 的积分.

定义 $\alpha:(A\#H)\#U\to\mathrm{End}_F(A\#H)$ 为 $\alpha=\lambda_{A\#H,U}$;

$\beta:A\otimes(H\#U)\to\mathrm{End}_F(A\#H)$ 为 $\beta=L\otimes\lambda_{H,U}$, 其中 $L:A\to\mathrm{End}_F(A)$ 为左正则表示，这样对任意的 $a,b\in A$, $h,k\in H$, $f\in U$, 有：

$$\alpha((a\#h)\#f)(b\#k)=(a\#h)(b\#(f\rightharpoonup k))\,,\quad \beta(a\otimes(h\#f))(b\#k)=ab\#h(f\rightharpoonup k)\,.$$

在以下的证明中我们需要以下一些引理：

引理 2.4[3] 令 $f\in H^o, k\in H$, 则 (i) $\Delta(f\rightharpoonup k)=\sum k'\otimes(f\rightharpoonup k'')$; (ii) $\Delta(k\leftharpoonup f)=\sum(k'\leftharpoonup f)\otimes k''$.

引理 2.5[3] A 是 U- 局部有限的 H- 模代数当且仅当: 对任意的 $a\in A$, 存在 $f_1,\cdots,f_r\in U$, 及 $a_1,\cdots,a_r\in A$, 使得 $k\cdot a=\sum_{j=1}^{r}f_j(k)a_j$, 对任意的 $k\in H$.

命题 2.6 设 H 为有可弱对极 T 的余交换的完备弱 Hopf 代数， U 为 H^o 的子弱 Hopf 代数， A 为 H- 模代数，且 $\mathrm{End}_F(A\#H)$ 中任意的 σ 是右 $1\#C(H)$- 模同态，则 α,β 为代数单同态.

证明 由于 $\alpha=\lambda_{A\#H,U}$, $\beta=L\otimes\lambda_{H,U}$, 而 $\lambda_{A\#H,U},\lambda_{H,U}$, L 为代数同态，故 α,β 为代数同态，下证 α,β 为单射. 令 $\alpha':(A\#H)\#U\to\mathrm{End}_F(A\#H)$; $\beta':A\otimes(H\#U)\to\mathrm{End}_F(A\#H)$; $\Phi:\mathrm{End}_F(A\#H)\to\mathrm{End}_F(A\#H)$ 分别为：

$$\alpha'((a\#h)\#f)(b\#k)=f(k)(a\#h)(b\#1)\,;$$

$$\beta'(a\otimes(h\#f))(b\#k)=f(k)ab\#h;\quad \Phi(\sigma)(b\#k)=\sum(\sigma(b\#k'')(1\#k'),$$

其中 $a,b\in A$, $h,k\in H$, $f\in U$, $\sigma\in\mathrm{End}_F(A\#H)$.

对任意的 $u\in \mathrm{Ker}\alpha'$, $u=\sum_{j=1}^{r} v_j\#f_j$, 其中 $v_j\in A\#H$, $\{f_1,\cdots,f_r\}$ 是 U 的线性无关子集, 取 $k_1,\cdots,k_r\in H$ 使得：$f_i(k_j)=\delta_{i,j}$, $1\le i,j\le r$, 则对任意的 j 有：$0=\alpha'(u)(1\#k_j)=v_j$, 故 $u=0$, 由于 $u\in\mathrm{Ker}\alpha'$, 故 α' 为单射，同理可证 β' 为单射. 下证 Φ 为单射. 令 $\Psi\in\mathrm{End}_F(\mathrm{End}_F(A\#H))$ 为：$\Psi(\sigma)(b\#k)=\sum(\sigma(b\#k''))\left(1\#T^{-1}(k')\right)$, 那么有：

$$\begin{aligned}(\Psi\circ\Phi)(\sigma)(b\#k)&=\sum((\Phi\sigma)(b\#k''))\left(1\#T^{-1}\left(k^1\right)\right)=\sum(\sigma(b\#k'''))(1\#k'')\left(1\#T^{-1}(k')\right)\\&=\sum\sigma(b\#k''')\left(1\#k''T^{-1}(k')\right)=\sum\sigma\left(b\#k'''k''T^{-1}(k')\right)\\&=\sum\sigma\left(b\#k'T^{-1}(k'')k'''\right)=\sigma(b\#k).\end{aligned}$$

因此 Ψ 是 Φ 的左逆，再令：$\sigma=\alpha'((a\#h)\#f)$, 则：

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma)(b\#k)&=\sum(\sigma(b\#k''))(1\#k')=\sum(a\#h)(b\#1)f(k'')(1\#k')\\&=(a\#h)\left(b\#\sum f(k'')k'\right)=(a\#h)(b\#(f\to k))=\alpha((a\#h)\#f)(b\#k).\end{aligned}$$

故 $\Phi\circ\alpha'=\alpha$, 同理可证：$\Phi\circ\beta'=\beta$, 这样 α,β 为单射.

推论 2.7 令 H 为弱 Hopf 代数，满足命题 2.6 的条件，则：

(i) 若 U 为 H^o 的子弱 Hopf 代数，则 $\lambda_{H,U}$ 是单射;

(ii) 若 H 为有限维的，则 λ_{H,H^*} 是双射，故有代数同构：

$$H\#H^*\cong\mathrm{End}_F(H)\cong M_n(F),$$

其中 $M_n(F)$ 为域 F 上的 $n\times n$ 矩阵代数.

定义 $\gamma\in\mathrm{End}_F(A\#H)$ 为：$\gamma(b\#k)=\sum((T^{-1}(k')\cdot b)\#k''$, 其中 $b\in A,k\in H$.

引理 2.8 设 H- 满足命题 2.6 的条件且 $h\cdot a=\varepsilon(h)a$, 其中 $h\in C(H),a\in A$ 则对上述的 γ 有逆 v 满足：$v(b\#k)=\sum(k'\cdot b)\#k''$, 其中 $b\in A,k\in H$.

证明

$$\begin{aligned}\gamma(v(b\#k))&=\gamma\left(\sum(k'\cdot b)\#k''\right)=\sum\left(T^{-1}(k'')\cdot(k'\cdot b)\right)\#k'''\\&=\sum\left(T^{-1}(k'')k'\right)\cdot b\#k'''=\sum\varepsilon(k')b\#k''=b\#k,\end{aligned}$$

故 $\gamma\circ v=id$, 同理可证：$v\circ\gamma=id$, 故 γ 可逆，逆为 v.

引理 2.9 设 H- 满足命题 2.6 的条件且 $h\cdot a=\varepsilon(h)a$, 其中 $h\in C(H),a\in A$, 则 $v\circ\beta(1\otimes(h\#f))\circ\gamma=\alpha((1\#h)\#f)$.

证明 对任意的 $b\in A,k\in H$,

$$\begin{aligned}&(v\circ\beta(1\otimes(h\#f))\circ\gamma)(b\#k)\\&=\sum(v\circ\beta(1\otimes(h\#f)))\left(\left(T^{-1}(k')\cdot b\right)\#k''\right)=\sum v\left(\left(T^{-1}(k')\cdot b\right)\#h(f\to k'')\right)\\&=\sum\left((h(f\to k''))'\left(T^{-1}(k')\cdot b\right)\right)\#(h(f\to k''))''\\&=\sum h'(f\to k'')'\left(T^{-1}(k')\cdot b\right)\#h''(f\to k'')''\\&=\sum h'k''T^{-1}(k')\cdot b\#h''(f\to h''')\quad(\text{由引理 2.4(i)})\\&=\sum k''T^{-1}(k')\cdot(h'\cdot b)\#h''(f\to k''')=\sum\varepsilon\left(k''T^{-1}(k')\right)(h'\cdot b)\#h''(f\to k''')\\&=\sum h'\cdot b\#h''(f\to k)=(1\#h)(b\#(f\to k))=\alpha((1\#h)\#f)(b\#k).\end{aligned}$$

取定 $a\in A$, 选取 $f_1,\cdots f_r\in U$ 及 $a_1,\cdots a_r$ 如引理 2.5 中所示，有以下引理：

引理 2.10 设 H- 满足命题 2.6 的条件且 $h\cdot a=\varepsilon(h)a$, 其中 $h\in C(H), a\in A$, 则：

(i) $v\circ\beta(a\otimes(1\#1))\circ\gamma=\sum_{j=1}^{r}\alpha((a_j\#1)\#1)(v\circ(id\otimes\rho(f_j))\circ\gamma)$;

(ii) $\gamma\circ\alpha((a\#1)\#1)\circ v=\sum_{j=1}^{r}\beta(\alpha_j\otimes(1\#1))\circ(id\otimes\rho_{H,U}(T^{-1}(f_j))$.

证明 对任意的 $b\in A, k\in H$,

(i)

$$
\begin{aligned}
&(v\circ\beta(a\otimes(1\#1))\circ\gamma)(b\#k)=\sum(v\circ\beta(a\otimes(1\#1)))\left(T^{-1}(k')\cdot b\#k''\right)\\
&=\sum v\left(a\left(T^{-1}(k')\cdot b\right)\#k''\right)=\sum k''\cdot\left(a\left(T^{-1}(k')\cdot b\right)\right)\#k'''\\
&=\sum(k''\cdot a)\left(k'''(T^{-1}(k')\cdot b\right)\#k^{(4)}=\sum\big(\sum_{j=1}^{r}f_j(k'')a_j\big)\left(k'''T^{-1}(k')\cdot b\right)\#k^{(4)}\\
&=\sum_{j=1}^{r}\alpha((a_j\#1)\#1)\left(\sum f_j(k'')k'''T^{-1}(k')\cdot b\#k^{(4)}\right)\\
&=\sum_{j=1}^{r}\alpha((a_j\#1)\#1)\left(\sum(k''\leftarrow f_j)T^{-1}(k')\cdot b\#k'''\right)\\
&=\sum_{j=1}^{r}\alpha((a_j\#1)\#1)\left(\sum(k''\leftarrow f_j)'T^{-1}(k')\cdot b\#(k''\leftarrow f_j)''\right)\\
&=\sum_{j=1}^{r}\alpha((a_j\#1)\#1)v\left(\sum T^{-1}(k')\cdot b\#(k''\leftarrow f_j)\right)\\
&=\sum_{j=1}^{r}\alpha((a_j\#1)\#1)(v\circ(id\otimes\rho(f_j))\big(\sum T^{-1}(k')\cdot b\#k''\big)\\
&=\sum_{j=1}^{r}\alpha((a_j\#1)\#1)(v\circ(id\otimes\rho(f_j))\circ\gamma)(b\#k),
\end{aligned}
$$

故 (i) 成立.

(ii)

$$
\begin{aligned}
&\gamma\circ\alpha((a\#1)\#1)\circ v(b\#k)=\sum(\gamma\circ\alpha((a\#1)\#1))((k'\cdot b)\#k'')\\
&=\sum\gamma((a\#1)(k'\cdot b\#1\rightarrow k''))=\sum\gamma(a(1\rightarrow(k'\cdot b))\#1\rightarrow k'')\\
&=\sum\gamma(a(k'\cdot b)\#k'')=\sum T^{-1}(k'')\cdot(a(k'\cdot b))\#k'''\\
&=\sum(T^{-1}(k''')\cdot a)(T^{-1}(k'')k'\cdot b)\#k^{(4)}\\
&=\sum_{j=1}^{r}\sum f_j\left(T^{-1}(k''')\right)a_j(T^{-1}(k'')k'\cdot b\#k^{(4)}\\
&=\sum_{j=1}^{r}\sum f_j(T^{-1}(k^{(4)})a_jb\#k'T^{-1}(k'')k'''
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum f_j \left(T^{-1}\left(k''\right)\right) a_j b \# k'$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum a_j b \# T^{-1}\left(f_j\right)\left(k'\right) k''$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum \beta\left(\alpha_j \otimes (1\#1)\right)\left(b \# T^{-1}\left(f_j\right)\left(k'\right) k''\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \beta(\alpha_j \otimes (1\#1)) \circ (id \otimes \rho_{H,U}(T^{-1}(f_j)),$$

故 (ii) 成立.

在以上引理的基础上，我们得到本节的主要定理：

定理 2.11 设 H 是域 F 上有可逆弱对极 T 的余交换的完备弱 Hopf 代数， U 是 H^o 的子弱 Hopf 代数， U 对 H 满足 RL- 条件， A 是 H- 模代数且是 U- 局部有限的， H 在 A 上的作用满足： $h \cdot b = \varepsilon(h)b$, 其中 $b \in A, h \in C(H)$, 并且 $\mathrm{End}_F(A\#H)$ 中任意的 σ 是右 $1\#C(H)$-模同态，则 $(A\#H)\#U \cong A \otimes (H\#U)$ (代数同构).

证明 令 $a \in A, h \in H, f \in U$, 先证 $v \circ \beta\left(a \otimes (h\#f)\right) \circ \gamma \subseteq \alpha\left(\left(A\#H\right)\#U\right)$, 由于 α, β 为代数同态 (命题 2.6), $a \otimes (h\#f) = \left(a \otimes (1\#1)\right)\left(1 \otimes (h\#f)\right)$, 且由于 $v = \gamma^{-1}$ (引理 2.8), 只要证：

$$v \circ \beta\left(1 \otimes (h\#f)\right) \circ \gamma \subseteq \alpha\left(\left(A\#H\right)\#U\right) \text{ 且 } v \circ \beta\left(a \otimes (1\#1)\right) \circ \gamma \subseteq \alpha\left(\left(A\#H\right)\#U\right).$$

由引理 2.9 可知 $v \circ \beta\left(1 \otimes (h\#f)\right) \circ \gamma \subseteq \alpha\left(\left(A\#H\right)\#U\right)$, 由 RL- 条件知 $id \otimes \rho\left(f_j\right) = \beta\left(1 \otimes v\right)$, 对某个 $v \in H\#U$. 故由引理 2.9 与引理 2.10(i) 知 $v \circ \beta\left(a \otimes (1\#1)\right) \circ \gamma \subseteq \alpha\left(\left(A\#H\right)\#U\right)$. 同理可证 $\gamma \circ \alpha((a\#h)\#f) \circ v \subseteq \beta(A \otimes H)\#U)$, 这样我们有： $\gamma^{-1} \circ \beta\left(A \otimes (H\#U)\right) \circ \gamma = \alpha\left(\left(A\#H\right)\#U\right)$, 由于 α, β 是单同态，故定理成立，即： $\left(A\#H\right)\#U \cong A \otimes (H\#U)$.

由此定理可得到以下这个重要的推论：

推论 2.12 令 H 为域 F 上的有限维弱 Hopf 代数， A 为 H- 模代数，且满足定理 2.11 的条件，则：

$$\left(A\#H\right)\#H^* \cong A \otimes \left(H\#H^*\right) \cong A \otimes M_n\left(F\right) \cong M_n\left(A\right) \quad \text{(代数同构)}.$$

3 弱 Hopf 代数的 Smash 积的模结构

在本节中，将讨论如何由一个 H- 模代数 A 诱导一个左且右 $A\#H$- 模，另一方面如何由一个 A- 模同态且 $C(H)$- 模同态诱导一个 $A\#H$- 模同态，并由此得到弱 Hopf 代数中类似于 Maschke-type 定理的结果.

由于 $H \cong 1\#H, A \cong A\#1$ (代数同构), 将 $1\#h, a\#1$ 分别看作 h, a. 首先需要以下引理：

引理 3.1 设 H 为完备弱 Hopf 代数， A 是 H- 模代数，且 $h \cdot a = \varepsilon\left(h\right)a$, 其中 $h \in C\left(H\right), a \in A$, 则 $A\#H$ 中有： (1) $ha = \sum \left(h' \cdot a\right) h''$; (2) $ah = \sum h''\left(S^{-1}\left(h'\right) \cdot a\right)$; 其中 ah 表示 $a\#h$.

证明　(1)

$$ha=(1\#h)(a\#1)=\sum 1\left(h'\cdot a\right)\#h''1=\sum \left(h'\cdot a\right)h''.$$

(2)

$$\begin{aligned}&\sum h''\left(S^{-1}\left(h'\right)\cdot a\right)=\sum h''\cdot\left(S^{-1}\left(h'\right)\cdot a\right)h'''\quad(\text{由 }(1))\\&=\sum\left(\left(h''S^{-1}\left(h'\right)\right)\cdot a\right)h'''=\sum\varepsilon\left(h''\right)\varepsilon\left(h'\right)ah'''\quad(\text{由模作用满足条件})\\&=ah.\end{aligned}$$

HT 命题 3.2　令 H 为有可逆弱对极 S 的完备弱 Hopf 代数，A 为 H- 模代数，且 $h\cdot a=\varepsilon(h)a$, 对任意的 $a\in A, h\in C(H)$, 则 A 是左且右 $A\#H$- 模，左和右作用分别为 $\rightarrow$ 和 $\leftarrow$ 且满足：$ah\rightarrow b=a(h\cdot b)$; $b\leftarrow ah=S^{-1}(h)\cdot(ba)$, 其中 $a,b\in A, h\in H$.

证明　先证 A 是左 $A\#H$- 模. 对任意的 $a\#h, c\#l\in A\#H, d\in A$, 我们只要证结合律即可.

$$ahcl\rightarrow d=\left(\sum a\left(h'\cdot c\right)h''l\right)\rightarrow d=\sum a\left(h'\cdot c\right)\left(h''l\cdot d\right), \tag{*}$$

而

$$\begin{aligned}&ah\rightarrow(cl\rightarrow d)=ah\rightarrow(c(l\cdot d))=a(h\cdot c(l\cdot d))=\sum a\left(h'\cdot c\right)\left(h''\cdot(l\cdot d)\right)\\&=\sum a\left(h'\cdot c\right)\left(h''l\cdot d\right).\end{aligned} \tag{**}$$

由于 $(*)=(**)$, 故作用 $\rightarrow$ 满足结合律.

再证 A 是右 $A\#H$- 模. 对任意的 $a\#h, c\#l\in A\#H, d\in A$, 我们只要证结合律即可.

$$\begin{aligned}d\leftarrow(ahcl)&=d\leftarrow\left(\sum a\left(h'\cdot c\right)h''l\right)=\sum S^{-1}\left(h''l\right)\left(da\left(h'\cdot c\right)\right)\\&=S^{-1}(l)\cdot\sum S^{-1}\left(h''\right)\left(da\left(h'\cdot c\right)\right)\\&=S^{-1}(l)\cdot\left(\sum S^{-1}\left(h'''\right)\cdot da\right)\left(S^{-1}\left(h''\right)\cdot\left(h'\cdot c\right)\right)\\&=S^{-1}(l)\cdot\left(\sum S^{-1}\left(h'''\right)\cdot da\right)\left(S^{-1}\left(h''\right)h'\cdot c\right)\\&=S^{-1}(l)\cdot\left(\sum S^{-1}\left(h''\right)\cdot da\right)\left(\varepsilon\left(h'\right)c\right)\\&=S^{-1}(l)\cdot(S^{-1}(h)\cdot da)c)=S^{-1}(l)\cdot(cd\leftarrow ah)c)\\&=(d\leftarrow ah)\leftarrow cl,\end{aligned}$$

故作用 $\leftarrow$ 满足结合律.

注　由命题 3.2 可知，对满足上述条件的弱 Hopf 代数，我们可由一个 H- 模代数 A 诱导一个左且右 $A\#H$- 模.

引理 3.3　令 H 为有可逆弱对极 S 的有限维完备弱 Hopf 代数，$x\in\int_r$, 令 A 为 H- 模代数，V, W 为左 $A\#H$- 模，$h\cdot a=\varepsilon(h)a$, 其中 $h\in C(H), a\in A$. 若 $\lambda: V\rightarrow W$ 是 A- 模同态且是 $C(H)$- 模同态，则 $\hat{\lambda}: V\rightarrow W, v\mapsto\sum S\left(x'\right)\cdot\lambda\left(x''\cdot v\right)$ 是 $A\#H$- 模同态.

证明 设 $g\in H, v\in V$, 由于 S 为满射，故存在 $h\in H$, 使得 $g=S(h)$.

$$\begin{aligned} g\cdot\hat{\lambda}(v) &= \sum S(h)\cdot\left(\sum S(x')\cdot\lambda(x''\cdot v)\right)=\sum S(h)S(x')\cdot\lambda(x''\cdot v)\\ &=\sum S(h')h''S(h''')S(x')\cdot\lambda(x''\cdot v)=\sum S(x'h')\cdot\lambda(h''S(h''')x''\cdot v)\\ &=\sum S(x'h')\cdot\lambda(x''h''S(h''')\cdot v). \end{aligned} \tag{*}$$

令 $\rho:(A\#H)\otimes V\to V, \rho':(A\#H)\otimes W\to W$, 其中 $\rho((a\#h)\otimes v))=(a\#h)\cdot v$, 则：

$$\begin{aligned} &\rho'\circ(S\otimes(\lambda\circ\rho\circ(\mu\otimes id)\circ(id\otimes S\otimes id)))\sum x'h'\otimes x''h''\otimes h'''\otimes v\\ &=\sum\rho'\circ(S(x'h')\otimes(\lambda\circ\rho\circ(\mu\otimes id)(x''h''\otimes S(h''')\otimes v)))\\ &=\sum\rho'(S(x'h')\otimes(\lambda\circ\rho(x''h''S(h''')\otimes v)))\\ &=\sum\rho'\circ(S(x'h')\otimes(\lambda(x''h''S(h''')\cdot v)))=\sum S(x'h')\cdot\lambda(x''h''S(h''')\cdot v). \end{aligned} \tag{**}$$

故 $(**)=(*)$.

由于 $x\in\int_r$, 故 $\sum x'h'\otimes x''h''=\Delta(xh')=\Delta(\varepsilon(h')x)$, 因此

$$\sum x'h'\otimes x''h''\otimes h'''\otimes v=\sum x'\otimes x''\otimes\varepsilon(h')h''\otimes v=\sum x'\otimes x''\otimes h\otimes v.$$

这样 $(**)=\sum S(x')\cdot\lambda(x''S(h)\cdot v)=\hat{\lambda}(S(h)\cdot v)=\hat{\lambda}(g\cdot v)$, 因此 $\hat{\lambda}(g\cdot v)=g\cdot\hat{\lambda}(v)$.

设 $a\in A$, 则

$$\begin{aligned} a\cdot\hat{\lambda}(v) &= \sum aS(x')\cdot\lambda(x''\cdot v)\\ &=\sum\left(S(x')\left(S^{-1}(S(x''))\cdot a\right)\right)\cdot\lambda(x'''\cdot v) \quad (\text{由引理 } 3.1(2))\\ &=\sum(S(x')(x''\cdot a))\cdot\lambda(x'''\cdot v)\\ &=\sum S(x')\cdot\lambda(((x''\cdot a)x''')\cdot v) \quad (\text{由于 } x''\cdot a\in A,\ \text{且 } \lambda \text{ 是 } A\text{- 模同态})\\ &=\sum S(x')\cdot\lambda(x''a\cdot v) \quad (\text{由引理 } 3.1(1))\\ &=\sum S(x')\lambda(x''\cdot(a\cdot v))=\hat{\lambda}(a\cdot v). \end{aligned}$$

因此 $a\cdot\hat{\lambda}(v)=\hat{\lambda}(a\cdot v)$. 故

$$(a\#g)\cdot\hat{\lambda}(v)=a\cdot\hat{\lambda}(v)\#g\hat{\lambda}(v)=\hat{\lambda}(a\cdot v)\#\hat{\lambda}(g\cdot v)=\hat{\lambda}(a\cdot v\#h\cdot v)=\hat{\lambda}(a\#h\cdot v).$$

故 $\hat{\lambda}$ 为左 $A\#H$- 模同态，同理可证 $\hat{\lambda}$ 是右 $A\#H$- 模同态，因此 $\hat{\lambda}$ 是 $A\#H$- 模同态.

注 由引理 3.3 可知对满足上述条件的弱 Hopf 代数，我们可由一个 A- 模同态 (且同时是 $C(H)$- 模同态) 诱导一个 $A\#H$- 模同态，由此引理我们有以下的定理：

定理 3.4 令 H 为有可逆弱对极 S 的有限维完备弱 Hopf 代数，且 $\varepsilon\left(\int\right)\neq 0$, A 为 H- 模代数，其模作用满足： $h\cdot a=\varepsilon(h)a$, 对任意的 $a\in A, h\in C(H)$. 令 V 为左 $A\#H$- 模， W 是 V 的 $A\#H$- 子模且是 $C(H)$- 子模. 若 W 是 V 的 A- 直和，则 W 是 V 的 $A\#H$- 直和.

证明 取 $x\in\int, \varepsilon(x)\neq 0$, 令 $e{=}x/\varepsilon(x)$, 则 $e^2{=}(x/\varepsilon(x))(x/\varepsilon(x)){=}x/\varepsilon(x){=}e$, 而 $e=ee=\varepsilon(e)e$, 故 $\varepsilon(e)=1$, 且 $eh=he=\varepsilon(h)e$, 对任意的 $h\in H$. 令 $\lambda:V\to W$ 为 A- 模同态，它也

是 $C(H)$- 模同态. 对上述的 $e \in \int, \Delta(e) = \sum e' \otimes e''$, 定义 $\hat{\lambda}$ 如引理 3.3, 即: $\hat{\lambda}: V \to W, v \mapsto \sum S(e') \cdot \lambda(e'' \cdot v)$, 则 $\hat{\lambda}$ 是 $A\#H$- 模同态. 令 $w \in W$, 则 $e'' \cdot w \in W$, 故 $\lambda(e'' \cdot w) = e'' \cdot w$, 因此 $\hat{\lambda}(w) = \sum S(e') \cdot (e'' \cdot w) = (\sum S(e') e'') \cdot w = \varepsilon(e) w = w$, 故 $\hat{\lambda}$ 为射影, 这样 W 是 V 的 $A\#H$- 直和.

引理 3.5 令 H 为有限维半单双代数, 则 $\varepsilon\left(\int\right) \neq 0$.

证明 由于 H 是半单的, 故存在左理想 I 使 $H = I \oplus \mathrm{Ker}\varepsilon$, 对 $x \in \mathrm{Ker}\varepsilon, y \in I$, 有 $xy \in \mathrm{Ker}\varepsilon \cap I$, 故 $xy = 0 = \varepsilon(x) y$, 这样对任意的 $h \in H, h = (h - \varepsilon(h) 1) + \varepsilon(h) 1$, 由于 $h - \varepsilon(h) 1 \in \mathrm{Ker}\varepsilon$, 故 $hy = \varepsilon(x) y$. 这样 $I \subseteq \int$, 因此 $H = I \oplus \mathrm{Ker}\varepsilon \subseteq \int \oplus \mathrm{Ker}\varepsilon$, 由于 $\varepsilon(H) \neq 0, \varepsilon(\mathrm{Ker}\varepsilon) = 0$, 我们有 $\varepsilon\left(\int\right) \neq 0$.

推论 3.6 令 H 为半单的有限维完备弱 Hopf 代数且有可逆弱对极 S, A 为 H- 模代数, 其模作用满足: $h \cdot a = \varepsilon(h) a$, 对任意的 $a \in A, h \in C(H)$. 令 V 为左 $A\#H$- 模, W 是 V 的 $A\#H$- 子模且是 $C(H)$- 子模, 若 W 是 V 的 A- 直和, 则 W 是 V 的 $A\#H$- 直和.

证明 由定理 3.4 及引理 3.5 得.

推论 3.6 是 Hopf 代数中 Maschke-type 定理的部分推广 [4], 此处的部分条件强于 Hopf 代数时的情况.

参考文献:

[1] NAKAGAMI Y, TAKESAKI M. *Duality for Crossed Products of Von Neumann Algebras* [M]. New York: Springer-Verlag, Lecture Notes in Math, 1979.

[2] COHEN M, MONTGOMERY S. *Group-graded rings, smash products, and groupActions* [J]. Trans. Amer. Math., 1984, **282**: 237–258.

[3] BLATTNER R J, MONTGOMERY S. *A duality theorem for Hopf module algebras* [J]. J. Algebra, 1985, **95**: 153–172.

[4] COHEN M, FISHMAN D. *Hopf algebra actions* [J]. J. Algebra, 1986, **100**: 363–379.

[5] LI F. *Solutions of Yang-Baxter equation in an endomorphism semigroup and quasi-(Co)braided almost bialgebras* [J]. Comm. Algebra, 2000, **28**(5): 2253–2270.

[6] LI F. *Weak Hopf algebras and some new solutions of quantum Yang-Baxter equation* [J]. J. Algebra, 1999, **208**: 72–100.

[7] ABE E. *Hopf Algebra* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

[8] SWEEDLER M E. *Hopf Algebras* [M]. New York: W.A.Benjamin, Inc, 1969.

[9] 倪沈冰. 弱 Hopf 代数的扭曲的 Smash 积及 Smash 余积 [J]. 浙江大学学报 (理学版), 2002, **29**: 268–273.
NI Shen-bing. *Weak Hopf algebras's twisted Smash product and Smash coproduct* [J]. J. Zhejiang University (Science Edition), 2002, **29**: 268–273. (in Chinese)

Duality Theorem and Smash Product's Structure of Weak Hopf Algebra

ZHANG Li-na[1], *NI Shen-bing*[2]

(1. Medical School, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200025, China;
2. School of Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: This paper includes two major aspects. Firstly, we expanded partly the duality theorem of Hopf algebra theory to weak Hopf algebra. Secondly, we discuss the module and the module homomorphism upon weak Hopf algebra, and expand partly the Maschke-type theorem.

Key words: weak Hopf algebra; Smash product; module algebra.