文章编号: 1000-341X(2006)02-0377-06 **文献标识码**: **A**

关于渐近非扩张映象不动点迭代的一点注记

姚永红, 陈汝栋
(天津工业大学数学系, 天津 300160)
(E-mail: yuyanrong@tjpu.edu.cn)

摘 要: 设 E 是一致凸 Banach 空间, C 是 E 的非空闭凸子集, $T: C \to C$ 是具有不动点的渐近非扩张映象. 该文证明了在某些适当的条件下, 由下列修改了的 Ishikawa 迭代程序所定义的序列 $\{x_n\}$: $x_{n+1} = rp_n, p_n = (1-a_n)x_n + a_nT^{m_n}ry_n + u_n$, $y_n = (1-b_n)x_n + b_nT^{k_n}x_n + v_n$, $(n \geq 1)$ 弱收敛到 T 的不动点.

关键词: 渐近非扩张映象; 修改了的 Ishikawa 迭代程序; 不动点; 一致凸 Banach 空间.
MSC(2000): 47H09, 47H10
中图分类: O177.91

1 引言及预备知识

定义 1.1 设 C 是 Banach 空间 E 中的非空子集, 则 $T: C \to C$ 称为渐近非扩张的, 若存在一列正数 $\{L_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} L_n = 1$, 且使得

$$\|T^n x - T^n y\| \leq L_n \|x - y\|, \ \forall x, y \in C, \ n = 1, 2, \cdots.$$

定义 1.2 设 C 是 Banach 空间 E 中的非空闭凸子集, C 称为 E 的收缩核, 如果存在一连续映象 $r: E \to C$, 使得 $rx = x, \forall x \in C$. 映象 r 称为由 E 到 C 的保核收缩.

定义 1.3 设 C 是 Banach 空间 E 中的非空闭凸子集, $T: C \to C$ 是一映象, $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足: $0 < a \leq a_n \leq b < 1$, $0 < a \leq b_n \leq b < 1$; $r: E \to C$ 是一非扩张的保核收缩, $m_n = n, k_n = n + k$ 或 $m_n = n + k, k_n = n$ (k 是任意非负整数); $\{u_n\}, \{v_n\}$ 是 E 中满足条件 (H): $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < \infty$ 的两个有界序列, 则

1). 由下式定义的序列 $\{x_n\} \subset C$:

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = rp_n, \\ p_n = (1-a_n)x_n + a_nT^{m_n}ry_n + u_n, \\ y_n = (1-b_n)x_n + b_nT^{k_n}x_n + v_n, \end{cases} \tag{I}$$

称为修正的具误差的 Ishikawa 迭代序列.

2). 由下式定义的序列 $\{x_n\} \subset C$:

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = rp_n, \\ p_n = (1-a_n)x_n + a_nT^{k_n}x_n + u_n, \end{cases} \tag{II}$$

收稿日期: 2004-02-15
基金项目: 天津市高校科技发展基金 (20040401)

称为修正的具误差的 Mann 迭代序列.

3). 特别, 如果 $u_n = v_n = 0, \forall n \geq 0$, 则由 (I), (II) 所定义的序列 $\{x_n\} \subset C$ 分别称为修正的 Ishikawa 迭代序列和修正的 Mann 迭代序列.

渐近非扩张映象于 1972 年由 Goebel 和 Kirk[1] 引入, 而且他们证明了, 若 C 是一致凸 Banach 空间 E 的有界闭凸子集, 则每个渐近非扩张映象都有不动点. 关于迭代构造渐近非扩张映象的不动点的研究 Tan 与 Xu[2] 证明了, 在满足 Opial's 条件或具有 Frechet 可微范数的一致凸 Banach 空间中修改了的 Ishikawa 迭代程序

$$x_{n+1} = a_n T^n (b_n T^n x_n + (1-b_n) x_n) + (1-a_n) x_n,\ n \geq 1$$

是弱收敛的. 进一步, 借助 Tan 与 Xu[2] 以及 Takahashi 与 Kim[3] 的思想, 曾 [4] 将 Tan 与 Xu[2] 推广到了非空闭凸子集的情形. 本文进一步修改了迭代程序, 证明了由 (I) 所定义的迭代程序弱收敛到 T 的不动点. 本文的结果把 Tan 与 Xu[2] 的定理 3.2 推广到了非空闭凸子集的情形, 而且也把 Tan 与 Xu[2] 和曾 [4] 推广到了修改了具误差的 Ishikawa 迭代程序的背景.

引理 1.1[5] 设非负序列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{v_n\}$ 满足: $a_{n+1} \leq (1+b_n) a_n + v_n, \forall n \in N, \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在.

引理 1.2[6] 设 E 是一致凸的 Banach 空间, $\{a_n\}$ 是 $(0,1)$ 中偏离 0 与 1 的有界实数列且 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是 E 中的序列, 使得对某个 $a \geq 0$, $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq a$, $\limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq a$, $\lim_{n\to\infty} \|a_n x_n + (1-a_n) y_n\| = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

引理 1.3 设 E 是一实 Banach 空间, C 是 E 中的非空闭凸子集, $r: E \to C$ 是一非扩张的保核收缩, $T: C \to C$ 是渐近非扩张映象. 设 $\{x_n\}$ 是由 (I) 定义的修正的具误差的 Ishikawa 迭代序列, 则

$$\begin{aligned}\|x_n - Tx_n\| \leq & \|x_n - T^{m_n} x_n\| + L_1(1+L_{m_n-1}) \|x_{n-1} - T^{m_n-1} r y_{n-1}\| + \\ & L_1 \|x_{n-1} - T^{m_n-1} x_{n-1}\| + L_1(1+L_{m_n-1}) \|u_{n-1}\|.\end{aligned}$$

证明 由于 T 是渐近非扩张的, 则有

$$\begin{aligned}\|x_n - Tx_n\| &\leq \|x_n - T^{m_n} x_n\| + \|T^{m_n} x_n - Tx_n\| \\ &\leq \|x_n - T^{m_n} x_n\| + L_1 \|T^{m_n-1} x_n - x_n\|, \end{aligned} \tag{1}$$

以及

$$\|x_n - T^{m_n-1} x_n\| \leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - T^{m_n-1} x_n\|. \tag{2}$$

由 (I), 可得

$$\begin{aligned}\|x_n - x_{n-1}\| &= \|r p_{n-1} - r x_{n-1}\| \leq \|p_{n-1} - x_{n-1}\| \\ &= \|(1-a_{n-1}) x_{n-1} + a_{n-1} T^{m_n-1} r y_{n-1} + u_{n-1} - x_{n-1}\| \\ &\leq \|x_{n-1} - T^{m_n-1} r y_{n-1}\| + \|u_{n-1}\| \end{aligned} \tag{3}$$

和

$$\|x_{n-1} - T^{m_n-1} x_n\| \leq \|x_{n-1} - T^{m_n-1} x_{n-1}\| + L_{m_n-1} \|x_{n-1} - x_n\|. \tag{4}$$

将 (2)–(4) 式代入 (1) 中，可得

$$\begin{aligned}\|x_n - Tx_n\| \leq & \|x_n - T^{m_n}x_n\| + L_1(1+L_{m_n-1})\|x_{n-1} - T^{m_n-1}ry_{n-1}\| + \\ & L_1\|x_{n-1} - T^{m_n-1}x_{n-1}\| + L_1(1+L_{m_n-1})\|u_{n-1}\|.\end{aligned}$$

至此引理 1.3 证毕.

引理 1.4[7] 设 C 是一致凸 Banach 空间的非空有界闭凸子集， $T: C \to C$ 是渐近非扩张映象，设 $\{x_n\}$ 是 C 中的任意序列，则若 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x, $\|x_n - Tx_n\| \to 0 (n \to \infty)$ 必隐含着 $Tx = x$.

引理 1.5[7] 设 E 是具有 Frechet 可微范数的一致凸 Banach 空间并且 $\sum_{n=1}^{\infty}(L_n - 1)$ 收敛，则对 $\forall f_1, f_2 \in F$, $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, J(f_1 - f_2)\rangle$ 存在；特别的，

$$\langle p - q, J(f_1 - f_2)\rangle = 0,\ \forall p, q \in \varpi_w(x_n),$$

其中 $\varpi_w(x_n)$ 表示 $\{x_n\}$ 的弱 $\varpi-$ 极限点集，即

$$\varpi_w(x_n) = \{y \in E : y = \varpi - \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \text{ 对某 } n_k \uparrow \infty\}.$$

2 主要结果

定理 2.1 设 E 是一致凸的 Banach 空间， C 是 E 中的非空闭凸子集， $T: C \to C$ 是渐近非扩张映象，使得 $\lim_{n\to\infty} L_n = 1, L_n \geq 1$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(L_n - 1)$ 收敛. $r: E \to C$ 是一非扩张的保核收缩，又设 $\forall x_1 \in C$, 且序列 $\{x_n\}$ 由修改了的 Ishikawa 迭代序列 (I) 所定义，若 $F(T)$ 非空，则 $\{x_n\}$ 有界且 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$.

证明 设 $Tw = w$, 则 $T^n w = w$. 由 (I), 有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - w\| = & \|rp_n - w\| \leq \|p_n - w\| \\ \leq & a_n\|T^{m_n}ry_n - w\| + (1-a_n)\|x_n - w\| + \|u_n\| \\ \leq & a_nL_{m_n}\|y_n - w\| + (1-a_n)\|x_n - w\| + \|u_n\| \\ \leq & a_nL_{m_n}[(1-b_n)\|x_n - w\| + b_nL_{k_n}\|x_n - w\| + v_n\|] + (1-a_n)\|x_n - w\| + \|u_n\| \\ = & [1 - a_n + a_nL_{m_n}(1 - b_n + b_nL_{k_n})]\|x_n - w\| + a_nL_{m_n}\|v_n\| + \|u_n\|,\end{aligned}$$

再由 $\sum_{n=1}^{\infty}(L_n - 1)$ 收敛以及引理 1.1, 可知 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - w\|$ 存在，令 $c = \lim_{n\to\infty}\|x_n - w\|$.

因为

$$\begin{aligned}\|T^{m_n}ry_n - w + u_n\| \leq & L_{m_n}\|y_n - w\| + \|u_n\| \\ \leq & L_{m_n}(1 - b_n + b_nL_{k_n})\|x_n - w\| + L_{m_n}\|v_n\| + \|u_n\|,\end{aligned}$$

此时，有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\|T^{m_n}ry_n - w + u_n\| \leq & \limsup_{n\to\infty}(L_{m_n}\|y_n - w\| + \|u_n\|) \\ = & \limsup_{n\to\infty}\|y_n - w\| \leq c,\end{aligned} \tag{5}$$

以及

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n-w+u_n\|\le\limsup_{n\to\infty}(\|x_n-w\|+\|u_n\|)=c. \tag{6}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\|a_n(T^{m_n}ry_n-w+u_n)+(1-a_n)(x_n-w+u_n)\|=\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-w\|=c.$$

故由 (5), (6) 及引理 1.2 可得

$$\lim_{n\to\infty}\|T^{m_n}ry_n-x_n\|=0. \tag{7}$$

由 (I), 有

$$\begin{aligned}\|y_n-w\|&=\|(1-b_n)x_n+b_nT^{k_n}x_n+v_n-w\|\\&\le(1-b_n)\|x_n-w+v_n\|+b_n\|T^{k_n}x_n-w+v_n\|\\&\le(1-b_n)\|x_n-w\|+b_nL_{k_n}\|x_n-w\|+\|v_n\|.\end{aligned} \tag{8}$$

由 (8) 式可得

$$\limsup_{n\to\infty}\|y_n-w\|\le\limsup_{n\to\infty}[(1-b_n+b_nL_{k_n})\|x_n-w\|+\|v_n\|]=c. \tag{9}$$

再由 (I), 有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-w\|=\|rp_n-w\|\le\|p_n-w\|&=\|(1-a_n)x_n+a_nT^{m_n}ry_n+u_n-w\|\\&\le a_n\|T^{m_n}ry_n-w\|+(1-a_n)\|x_n-w\|+\|u_n\|\\&\le a_nL_{m_n}\|y_n-w\|+(1-a_n)\|x_n-w\|+\|u_n\|.\end{aligned} \tag{10}$$

由 (10) 式有

$$\begin{aligned}\frac{\|x_{n+1}-w\|-\|x_n-w\|}{b}&\le\frac{\|x_{n+1}-w\|-\|x_n-w\|}{a_n}\\&\le L_{m_n}\|y_n-w\|-\|x_n-w\|+\frac{\|u_n\|}{a}.\end{aligned}$$

故

$$c\le\liminf_{n\to\infty}\|y_n-w\|.$$

再由 (5) 式，可得

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-w\|=c.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\|(1-b_n)(x_n-w+v_n)+b_n(T^{k_n}x_n+v_n-w)\|=c. \tag{11}$$

又因为

$$\|T^{k_n}x_n-w+v_n\|\le\|T^{k_n}x_n-w\|+\|v_n\|\le L_{k_n}\|x_n-w\|+\|v_n\|,$$

则

$$\limsup_{n\to\infty}\|T^{k_n}x_n - w + v_n\| \le c. \tag{12}$$

由 (6), (11), (12) 及引理 1.2 有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - T^{k_n}x_n\| = 0. \tag{13}$$

由于

$$\begin{aligned}\|x_n - T^{m_n}x_n\| &\le \|x_n - T^{m_n}ry_n\| + \|T^{m_n}ry_n - T^{m_n}x_n\| \\ &\le \|x_n - T^{m_n}ry_n\| + L_{m_n}\|y_n - x_n\| \\ &\le \|x_n - T^{m_n}ry_n\| + L_{m_n}b_n\|x_n - T^{k_n}x_n\| + L_{m_n}\|v_n\|,\end{aligned}$$

再由 (7), (13) 可知

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - T^{m_n}x_n\| = 0. \tag{14}$$

由 (7), (14) 以及引理 1.3 可得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0.$$

定理 2.1 至此证毕.

定理 2.2 设 E 是一致凸 Banach 空间且满足 Opial's 条件或具有 Frechet 可微范数， C 是 E 中的非空闭凸子集， $T: C\to C$ 是渐近非扩张映象，使得 $\lim_{n\to\infty}L_n = 1, L_n \ge 1$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(L_n - 1)$ 收敛. $r: E\to C$ 是一非扩张的保核收缩，又设 $\forall x_1\in C$, 则由修改了的 Ishikawa 迭代序列 (I) 所定义的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 T 的不动点.

证明 设 z 是 T 的不动点. 令 $\delta = (\sup\{\|x_n - z\| : n\ge 1\})\cdot(\sup\{L_j : j\ge 1\})$, 则 $D = C\bigcap B_\delta[z]$ 是 C 的非空有界闭凸子集. 由定理 2.1 及引理 1.4 可知 $\varpi_w(x_n)\subset F(T)$, 所以为了证明定理，只需证明 $\varpi_w(x_n)$ 是单点集即可.

设 $p, q\in\varpi_w(x_n)$, 且 $\{x_{n_i}\}, \{x_{m_j}\}$ 是序列 $\{x_n\}$ 的子列，使得 $\varpi - \lim_{i\to\infty}x_{n_i} = p$, $\varpi - \lim_{j\to\infty}x_{m_j} = q$. 如果 $p\ne q$, 首先，我们假设 E 满足 Opial's 条件，则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| &= \lim_{i\to\infty}\|x_{n_i} - p\| < \lim_{i\to\infty}\|x_{n_i} - q\| \\ &= \lim_{j\to\infty}\|x_{m_j} - q\| < \lim_{j\to\infty}\|x_{m_j} - p\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|.\end{aligned}$$

此矛盾表明，当 E 满足 Opial's 条件时，序列 $\{x_n\}$ 是弱收敛的. 下面，假设 E 具有 Frechet 可微范数. 根据引理 1.5 得

$$\langle p - q, J(f_1 - f_2)\rangle = 0,\ \forall p, q\in\varpi_w(x_n),\ f_1, f_2\in F(T).$$

进一步，由 $p, q\in F(T)$ 可知

$$\|p - q\|^2 = \langle p - q, J(p - q)\rangle = 0.$$

所以 $p = q$. 故定理的结论成立.

易于证明下列定理

定理 2.3 设 E 是一致凸 Banach 空间且满足 Opial's 条件或具有 Frechet 可微范数, C 是 E 中的非空闭凸子集, $T:C\to C$ 是渐近非扩张映象, 使得 $\lim_{n\to\infty}L_n=1, L_n\geq 1$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(L_n-1)$ 收敛. $r:E\to C$ 是一非扩张的保核收缩, 又设 $\forall x_1\in C$, 则由修改了的 Mann 迭代序列 (II) 所定义的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 T 的不动点.

参考文献:

[1] GOEBEL K, KIRK W A. *A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **35**: 171–174.

[2] TAN K K, XU Hong-kun. *The nonlinear ergodic theorem for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1992, **114**: 399–404.

[3] TAKAHASHI W, KIM G E. *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces* [J]. Math. Japonica, 1998, **48**: 1–9.

[4] 曾六川. 逼近 Banach 空间中渐近非扩张映象的不动点 [J]. 数学物理学报, 2003, **23**: 31–37.
ZENG Lu-chuan. *Approximating fixed points of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces* [J]. Acta. Math. Scientia, 2003, **23**: 31–37. (in Chinese)

[5] LIU Qi-hou. *Iterative sequences for asymptotically quasi-nonexpansive mapping with error members* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2001, **259**: 18–24.

[6] SCHU J. *Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings* [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1991, **43**: 153–159.

[7] TAN K K, XU Hong-kun. *Fixed point iteration processes for asymptotically nonexpansive mapping* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, **122**: 733–739.

A Note on Approximating Fixed Points of Asymptotically Nonexpansive Mapping

YAO Yong-hong, CHEN Ru-dong

(Dept. of Math., Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300160, China)

Abstract: Let E be a uniformly convex Banach space, C be a nonempty closed convex subset of E, and $T:C\to C$ be an asymptotically nonexpansive mapping with fixed points. It is shown that under some suitable conditions, the sequence $\{x_n\}$ defined by the modified Ishikawa iteration process: $x_{n+1}=rp_n, p_n=(1-a_n)x_n+a_nT^{m_n}ry_n+u_n$, $y_n=(1-b_n)x_n+b_nT^{k_n}x_n+v_n$, $(n\geq 1)$ converges weakly to a fixed point of T.

Key words: asymptotically nonexpansive mapping; modified Ishikawa iteration process; fixed point; uniformly convex Banach space.