第26卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0383-10 **文献标识码**: **A**

具有阻尼项的二阶非线性微分方程的区间振动准则

师 文 英
(河北大学数学与计算机学院, 河北 保定 071002)
(E-mail: wyshi@mail.hbu.edu.cn)

摘 要: 本文研究一类具有阻尼项的二阶非线性微分方程, 利用平均函数和一个广义 Riccati 变换, 得到了该方程的新的区间振动准则, 这些准则不同于已知的依赖于整个区间 $[t_0,\infty)$ 的性质的结果, 而是仅依赖于区间 $[t_0,\infty)$ 的子区间列的性质. 所得结果推广和改进了 Kong 的振动准则. 特别, 还给出了几个例子以说明本文所得结果的优越性.

关键词: 区间振动准则; 二阶; 非线性; 阻尼; Riccati 变换.
MSC(2000): 34C10
中图分类: O175.12

1 引 言

考虑具有阻尼项的二阶非线性微分方程

$$(r(t)\varphi(x(t))g(x'(t)))'+p(t)g(x'(t))+q(t)f(x(t))=0,\quad t\ge t_0\ge 0 \tag{1.1}$$

其中 $r(t)\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $p(t),q(t)\in C([t_0,\infty),R)$, 且 $p(t)$ 可微, $\varphi(x)\in C(R,(0,\infty))$, $g(x)\in C(R,R)$, $f(x)\in C^1(R,R)$, 且 $xf(x)>0$, $x\ne 0$.

称一个函数 $x:[t_0,t_1)\to(-\infty,\infty)$, $t_1>t_0$ 为方程 (1.1) 的解, 如果 $x(t)$ 在 $t\in[t_0,t_1)$ 上满足方程 (1.1), 以后, 我们总是假设方程 (1.1) 在 $t_0\ge 0$ 存在这样的解. 方程 (1.1) 的一个解 $x(t)$ 称为振动的, 如果它有任意大的零点. 否则称为非振动的; 方程 (1.1) 称为振动的, 如果 (1.1) 的每一个解都是振动的.

关于方程 (1.1) 及其特殊情形的振动性问题已有许多作者利用不同的方法进行了讨论, 如文献 [1–4] 等. 但这些结果都涉及所讨论的方程在整个区间 $[t_0,\infty)$ 的行为. 因而也限制了它的应用.

1999 年, Kong[5] 利用 Philos[7] 中关于二阶线性微分方程的技巧, 研究了方程

$$[r(t)x'(t)]'+q(t)x(t)=0, \tag{1.2}$$

并给出了该方程的几个涉及 Kamenev 型条件的区间振动准则 (见文 [5] 的定理 2.1 和 2.2 及推论 2.1-2.4). 作为应用, 当 $r(t)=1$ 时, Kong[5] 得到了下面的结果 (参见文 [5] 的定理 2.3).

定理 A 令 $r(t)\equiv 1$. 则方程 (1.2) 是振动的, 如果对于每个 $l\ge t_0$ 和一些 $\mu>1$, 满足

(i) 下面的两个不等式成立:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\mu-1}}\int_l^t(s-l)^\mu q(s)\mathrm{d}s>\frac{\mu^2}{4(\mu-1)}, \tag{1.3}$$

收稿日期: 2004-02-16
基金项目: 河北省自然科学基金 (A2004000089)

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\mu-1}}\int_l^t (t-s)^\mu q(s)\mathrm{d}s > \frac{\mu^2}{4(\mu-1)}. \tag{1.4}$$

或者 (ii) 下面的不等式成立:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\mu-1}}\int_l^t (s-l)^\mu [q(s)+q(2t-s)]\mathrm{d}s > \frac{\mu^2}{2(\mu-1)}. \tag{1.5}$$

2000 年, Li 和 Agarwal[6] 考虑了非线性微分方程

$$[r(t)x'(t)]' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0, \tag{1.6}$$

把上述区间振动结果推广到了方程 (1.6). 但由于作者要求 $\varphi(x)=1$, $g(y)=y$, 因而限制了它的应用. 本文的目的是利用平均函数和一个广义 Riccati 变换, 对更一般的微分方程 (1.1) 建立几个新的区间振动定理, 所得结果推广和改进了 Kong 的结果.

本文始终假设下列条件成立:

A_1) 存在常数 $\lambda>0$ 和 $\lambda_1>0$, 使得 $0<\lambda\le\varphi(x)\le\lambda_1$;

A_2) 存在常数 $\gamma>0$, 使得 $f'(x)\ge\gamma>0$, 对于 $x\ne 0$;

A_3) 存在常数 $\gamma_1>0$, 使得 $g^2(y)\le\gamma_1 yg(y)$, 对于所有的 y.

为方便, 定义函数类 X 如下: 称一个函数 $H=H(t,s)$ 属于函数类 X, 记为 $H=H(t,s)\in X$, 如果 $H\in C(D,R_+)$, $D=\{(t,s)|t\ge s\ge t_0\}$, 满足

$$H(t,t)=0,\quad H(t,s)>0,\quad t>s, \tag{1.7}$$

且在 D 上有偏导数 $\frac{\partial H(t,s)}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}$, 使得

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial t}=h_1(t,s)\sqrt{H(t,s)},\quad \frac{\partial H(t,s)}{\partial s}=-h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)}, \tag{1.8}$$

其中 $h_1,h_2\in L_{\mathrm{loc}}(D,R)$ 是 D 上的局部可积函数, $R_+=[0,\infty)$.

2 主要结果

引理 2.1 假设 $x(t)$ 是方程 (1.1) 的一个解且在 $[c,b)$ 上满足 $x(t)>0$. 对于任意的 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 和 $k\in C^1([t_0,\infty),R)$, 令

$$u(t)=v(t)\{\frac{r(t)\varphi(x(t))g(x'(t))}{f(x(t))}+r(t)k(t)+\frac{\gamma_1}{2\gamma}p(t)\}, \tag{2.1}$$

$t\in[c,b)$. 则对任何 $H\in X$, 有

$$\int_c^b H(b,s)\psi(s)\mathrm{d}s \le H(b,c)u(c)+\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}\int_c^b v(s)r(s)[h_2(b,s)-\sqrt{H(b,s)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s, \tag{2.2}$$

其中

$$v(t)=\rho(t)\exp\{-\frac{2\gamma}{\lambda_1\gamma_1}\int^t k(s)\mathrm{d}s\},$$

$$\psi(t)=v(t)\{q(t)+\frac{\gamma}{\lambda_1\gamma_1}r(t)k^2(t)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{p^2(t)}{r(t)}-(r(t)k(t))'-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(t)\}.$$

证明 对 (2.1) 式两边关于 t 求导，并利用 (1.1) 和 A_2), A_3) 可得，对 $t\in[c,b)$ 有

$$\begin{aligned}u'(t)\leq&\frac{v'(t)}{v(t)}u(t)-v(t)p(t)\frac{g(x'(t))}{f(x(t))}-v(t)q(t)-\frac{\gamma v(t)r(t)\varphi(x(t))g^2(x'(t))}{\gamma_1 f^2(x(t))}+\\&v(t)(r(t)k(t))'+\frac{\gamma_1}{2\gamma}v(t)p'(t),\end{aligned}\tag{2.3}$$

而由 $u(t)$, $v(t)$ 的定义及 A_1), A_2) 得

$$\begin{aligned}&\frac{v'(t)}{v(t)}u(t)-v(t)p(t)\frac{g(x'(t))}{f(x(t))}-\frac{\gamma v(t)r(t)\varphi(x(t))g^2(x'(t))}{\gamma_1 f^2(x(t))}\\&=-\frac{\gamma}{\gamma_1\varphi(x(t))}[\frac{1}{\sqrt{v(t)r(t)}}u(t)-\sqrt{v(t)r(t)}k(t)]^2+\\&\quad[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}-\frac{2\gamma}{\lambda_1\gamma_1}k(t)]u(t)+\frac{\gamma_1}{4\gamma}\frac{v(t)p^2(t)}{r(t)\varphi(x(t))}\\&\leq-\frac{\gamma u^2(t)}{\lambda_1\gamma_1 v(t)r(t)}+\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t)-\frac{\gamma v(t)r(t)k^2(t)}{\lambda_1\gamma_1}+\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{v(t)p^2(t)}{r(t)},\end{aligned}\tag{2.4}$$

由 (2.3) 和 (2.4), 对于 $t\in[c,b)$, 有

$$u'(t)\leq-\frac{\gamma u^2(t)}{\lambda_1\gamma_1 v(t)r(t)}+\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t)-\psi(t),\tag{2.5}$$

其中 $\psi(t)=v(t)\{q(t)+\frac{\gamma}{\lambda_1\gamma_1}r(t)k^2(t)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{p^2(t)}{r(t)}-(r(t)k(t))'-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(t)\}$. 因此，对于 $s\in[c,b)$, 有

$$\psi(s)\leq-u'(s)+\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}u(s)-\frac{\gamma u^2(s)}{\lambda_1\gamma_1 v(s)r(s)}.\tag{2.6}$$

用 $H(t,s)$ 乘以 (2.6) 两边，对 s 从 c 到 t 积分， $t\in[c,b)$, 并利用 (1.7) 和 (1.8), 有

$$\begin{aligned}&\int_c^t H(t,s)\psi(s)\mathrm{d}s\leq-\int_c^t H(t,s)u'(s)\mathrm{d}s+\int_c^t H(t,s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}u(s)\mathrm{d}s-\int_c^t\frac{\gamma H(t,s)}{\lambda_1\gamma_1 v(s)r(s)}u^2(s)\mathrm{d}s\\&=H(t,c)u(c)-\int_c^t\{\sqrt{\frac{\gamma H(t,s)}{\lambda_1\gamma_1 v(s)r(s)}}u(s)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1\gamma_1}{\gamma}v(s)r(s)}[h_2(t,s)-\sqrt{H(t,s)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]\}^2\mathrm{d}s+\\&\quad\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}\int_c^t v(s)r(s)[h_2(t,s)-\sqrt{H(t,s)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s\\&\leq H(t,c)u(c)+\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}\int_c^t v(s)r(s)[h_2(t,s)-\sqrt{H(t,s)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

在上式中令 $t\to b^-$, 则可得 (2.2) 式成立. □

注 1 变换 (2.1) 中的 $\frac{\gamma_1}{2\gamma}p(t)$ 是重要的，如果没有这项，我们的方法中将需要对 $p(t)$ 限定一个符号.

注 2 如果取 $k(t)=-\frac{\gamma_1}{2\gamma}\frac{p(t)}{r(t)}$, 则可去掉 $p(t)$ 可微的条件.

引理 2.2 假设 $x(t)$ 是方程 (1.1) 的一个解且在 $(a,c]$ 上满足 $x(t)>0$. 对于任意的 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 和 $k\in C^1([t_0,\infty),R)$, 如 (2.1) 式在 $(a,c]$ 上定义 $u(t)$. 则对任何 $H\in X$, 有

$$\int_a^c H(s,a)\psi(s)\mathrm{d}s\leq-H(c,a)u(c)+\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}\int_a^c v(s)r(s)[h_1(s,a)+\sqrt{H(s,a)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s,\tag{2.7}$$

其中

$$v(t)=\rho(t)\exp\{-\frac{2\gamma}{\lambda_1\gamma_1}\int^t k(s)\mathrm{d}s\},$$

$$\psi(t)=v(t)\{q(t)+\frac{\gamma}{\lambda_1\gamma_1}r(t)k^2(t)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{p^2(t)}{r(t)}-(r(t)k(t))'-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(t)\}.$$

证明类似于引理 2.1 ，故略.

利用引理 2.1 和引理 2.2 易得下面的结果.

定理 2.1 若存在 $c\in(a,b)$ 和 $H\in X$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $k\in C^1([t_0,\infty),R)$, 使得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c H(s,a)\psi(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{H(b,c)}\int_c^b H(b,s)\psi(s)\mathrm{d}s\\&>\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}\{\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c v(s)r(s)[h_1(s,a)+\sqrt{H(s,a)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s+\\&\qquad\frac{1}{H(b,c)}\int_c^b v(s)r(s)[h_2(b,s)-\sqrt{H(b,s)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s\},\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中

$$v(t)=\rho(t)\exp\{-\frac{2\gamma}{\lambda_1\gamma_1}\int^t k(s)\mathrm{d}s\},$$

$$\psi(t)=v(t)\{q(t)+\frac{\gamma}{\lambda_1\gamma_1}r(t)k^2(t)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{p^2(t)}{r(t)}-(r(t)k(t))'-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(t)\}.$$

则方程 (1.1) 的每个解在 (a,b) 内至少有一个零点.

证明 若不然，则不失一般性可假设方程 (1.1) 有解 $x(t)$, 使得 $x(t)>0$, $t\in(a,b)$. 根据引理 2.1 和引理 2.2 易知 (2.2) 和 (2.7) 成立. 用 $H(b,c)$ 和 $H(c,a)$ 分别除 (2.2) 和 (2.7) 式并相加，则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c H(s,a)\psi(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{H(b,c)}\int_c^b H(b,s)\psi(s)\mathrm{d}s\\&\le\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}\{\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c v(s)r(s)[h_1(s,a)+\sqrt{H(s,a)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s+\\&\qquad\frac{1}{H(b,c)}\int_c^b v(s)r(s)[h_2(b,s)-\sqrt{H(b,s)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s\}.\end{aligned}$$

这与假设 (2.8) 矛盾. □

定理 2.2 若对任意的 $T\ge t_0$, 存在 $H\in X$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $k\in C^1([t_0,\infty),R)$ 和 $a,b,c\in R$, 使得 $T\le a<c<b$ 和 (2.8) 成立，则方程 (1.1) 是振动的.

证明 取一列 $\{T_i\}\subset[t_0,\infty)$, 使得 $T_i\to\infty$, $i\to\infty$. 根据假设，对每个 $i\in N$, 存在 $a_i,b_i,c_i\in R$, 使得 $T_i\le a_i<c_i<b_i$, 且 (2.8) 成立，其中 a,b,c 由 a_i,b_i,c_i 分别代替. 由定理 2.1, 方程 (1.1) 的每个解 $x(t)$ 在 (a_i,b_i) 内至少有一个零点 t_i . 注意到 $t_i>a_i\ge T_i$, $i\in N$, 所以每个解都有任意大的零点. 因此，方程 (1.1) 的每个解都是振动的. □

定理 2.3 若存在 $H\in X$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $k\in C^1([t_0,\infty),R)$, 使得对任意的 $l\ge t_0$, 有

$$\limsup_{t\to\infty}\int_l^t\{H(s,l)\psi(s)-\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}v(s)r(s)[h_1(s,l)+\sqrt{H(s,l)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\}\mathrm{d}s>0,\tag{2.9}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\int_l^t\{H(t,s)\psi(s)-\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}v(s)r(s)[h_2(t,s)-\sqrt{H(t,s)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\}\mathrm{d}s>0, \tag{2.10}$$

其中

$$v(t)=\rho(t)\exp\{-\frac{2\gamma}{\lambda_1\gamma_1}\int^t k(s)\mathrm{d}s\},$$

$$\psi(t)=v(t)\{q(t)+\frac{\gamma}{\lambda_1\gamma_1}r(t)k^2(t)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{p^2(t)}{r(t)}-(r(t)k(t))'-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(t)\}.$$

则方程 (1.1) 是振动的.

证明 对任意的 $T\geq t_0$，令 $a=T$. 在 (2.9) 式中取 $l=a$，则存在 $c>a$, 使得

$$\int_a^c\{H(s,a)\psi(s)-\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}v(s)r(s)[h_1(s,a)+\sqrt{H(s,a)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\}\mathrm{d}s>0, \tag{2.11}$$

在 (2.10) 中取 $l=c$, 则存在 $b>c$, 使得

$$\int_c^b\{H(b,s)\psi(s)-\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}v(s)r(s)[h_2(b,s)-\sqrt{H(b,s)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\}\mathrm{d}s>0. \tag{2.12}$$

用 $H(c,a)$ 和 $H(b,c)$ 分别除 (2.11) 和 (2.12) 式，然后相加，则有 (2.8) 式成立. 由定理 2.2 易知结论成立. □

对于 $H:=H(t-s)\in X$, 易知 $h_1(t-s)=h_2(t-s)$, 记为 $h(t-s)$. 函数类 X 中由 $H(t-s)$ 组成的子集记为 X_0. 将定理 2.2 应用于 X_0 时，有下面的结果

定理 2.4 若对任意的 $T\geq t_0$, 存在 $H\in X_0$, $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $k\in C^1([t_0,\infty),R)$, 和 $a,c\in R$, 使得 $T\leq a<c$ 和

$$\begin{aligned}&\int_a^c H(s-a)[\psi(s)+\psi(2c-s)]\mathrm{d}s\\&>\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}\int_a^c\{v(s)r(s)[h(s-a)+\sqrt{H(s-a)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2+\\&\qquad v(2c-s)r(2c-s)[h(s-a)-\sqrt{H(s-a)}\frac{\rho'(2c-s)}{\rho(2c-s)}]^2\}\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中

$$v(t)=\rho(t)\exp\{-\frac{2\gamma}{\lambda_1\gamma_1}\int^t k(s)\mathrm{d}s\},$$

$$\psi(t)=v(t)\{q(t)+\frac{\gamma}{\lambda_1\gamma_1}r(t)k^2(t)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{p^2(t)}{r(t)}-(r(t)k(t))'-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(t)\}.$$

则方程 (1.1) 是振动的.

证明 取 $b=2c-a$. 则 $H(b-c)=H(c-a)=H((b-a)/2)$, 且对任意的 $w\in L[a,b]$, 有

$$\int_c^b w(s)\mathrm{d}s=\int_a^c w(2c-s)\mathrm{d}s,$$

因此

$$\int_c^b H(b-s)\psi(s)\mathrm{d}s=\int_a^c H(s-a)\psi(2c-s)\mathrm{d}s$$

和

$$\int_c^b v(s)r(s)[h(b-s)-\sqrt{H(b-s)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s$$
$$=\int_a^c v(2c-s)r(2c-s)[h(s-a)-\sqrt{H(s-a)}\frac{\rho'(2c-s)}{\rho(2c-s)}]^2\mathrm{d}s.$$

因此 (2.13) 成立意味着 (2.8) 对 $H\in X_0$ $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $k\in C^1([t_0,\infty),R)$ 成立. 由定理 2.2 知方程 (1.1) 是振动的. □

注 3 如果我们令 $p(t)=0$, $\varphi(x)=1$, $g(y)=y$, $f(x)=x$, 并取 $\rho(t)=1$, $k(t)=0$, 则定理 2.2– 定理 2.4 分别变为 Kong[5] 的定理 2.1 、推论 2.4 和定理 2.2.

从上面的振动准则可知, 选择不同的 $H(t,s)$, 可得到不同的振动的充分条件. 令

$$H(t,s)=(t-s)^\mu,\quad t\geq s\geq t_0,$$

其中 $\mu>1$ 是常数. 则 $H\in X_0$, $h(t-s)=\mu(t-s)^{\frac{\mu}{2}-1}$. 由定理 2.3 和 2.4 可得下面两个推论.

推论 2.1 如果存在函数 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $k\in C^1([t_0,\infty),R)$ 和常数 $\mu>1$, 使得对每个 $l\geq t_0$, 下面两个不等式成立:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\mu-1}}\int_l^t(s-l)^\mu\{\psi(s)-\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}v(s)r(s)[\frac{\mu}{s-l}+\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\}\mathrm{d}s>0, \tag{2.14}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\mu-1}}\int_l^t(t-s)^\mu\{\psi(s)-\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}v(s)r(s)[\frac{\mu}{t-s}-\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\}\mathrm{d}s>0, \tag{2.15}$$

其中

$$v(t)=\rho(t)\exp\{-\frac{2\gamma}{\lambda_1\gamma_1}\int^t k(s)\mathrm{d}s\},$$
$$\psi(t)=v(t)\{q(t)+\frac{\gamma}{\lambda_1\gamma_1}r(t)k^2(t)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{p^2(t)}{r(t)}-(r(t)k(t))'-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(t)\}.$$

则方程 (1.1) 是振动的.

推论 2.2 若对任意的 $T\geq t_0$, 存在 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $k\in C^1([t_0,\infty),R)$, 和 $a,c\in R$, 使得 $T\leq a<c$ 和

$$\begin{aligned}&\int_a^c(s-a)^\mu[\psi(s)+\psi(2c-s)]\mathrm{d}s\\&>\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}\int_a^c(s-a)^\mu\{v(s)r(s)[\frac{\mu}{s-a}+\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2+\\&\quad v(2c-s)r(2c-s)[\frac{\mu}{s-a}+\frac{\rho'(2c-s)}{\rho(2c-s)}]^2\}\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{2.16}$$

其中

$$v(t)=\rho(t)\exp\{-\frac{2\gamma}{\lambda_1\gamma_1}\int^t k(s)\mathrm{d}s\},$$
$$\psi(t)=v(t)\{q(t)+\frac{\gamma}{\lambda_1\gamma_1}r(t)k^2(t)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{p^2(t)}{r(t)}-(r(t)k(t))'-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(t)\}.$$

则方程 (1.1) 是振动的.

定义

$$R(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r(s)}\mathrm{d}s,\quad t\geq t_0 \tag{2.17}$$

且令

$$H(t,s)=[R(t)-R(s)]^{\mu},\quad t\geq s\geq t_0 \tag{2.18}$$

其中 $\mu>1$ 是常数. 由定理 2.3 可得下面重要的结论.

定理 2.5 假设 $\lim_{t\to\infty}R(t)=\infty$. 则方程 (1.1) 是振动的, 如果对每个 $l\geq t_0$ 和一些 $\mu>1$, 下面两个不等式成立:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{R^{\mu-1}(t)}\int_{l}^{t}[R(s)-R(l)]^{\mu}\psi(s)\mathrm{d}s>\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{4\gamma(\mu-1)} \tag{2.19}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{R^{\mu-1}(t)}\int_{l}^{t}[R(t)-R(s)]^{\mu}\psi(s)\mathrm{d}s>\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{4\gamma(\mu-1)} \tag{2.20}$$

其中 $\psi(s)=q(s)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{p^2(s)}{r(s)}-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(s)$.

证明 取 $\rho(s)=1$, $k(s)=0$, 则 $v(s)=1$, $\psi(s)=q(s)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{p^2(s)}{r(s)}-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(s)$, 且由 (1.8) 知

$$h_1(t,s)=\frac{\mu}{r(t)}[R(t)-R(s)]^{\frac{\mu}{2}-1},\quad h_2(t,s)=\frac{\mu}{r(s)}[R(t)-R(s)]^{\frac{\mu}{2}-1}.$$

因此

$$\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}\int_{l}^{t}v(s)r(s)[h_1(s,l)+\sqrt{H(s,l)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s=\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{4\gamma(\mu-1)}[R(t)-R(l)]^{\mu-1} \tag{2.21}$$

$$\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}\int_{l}^{t}v(s)r(s)[h_2(t,s)-\sqrt{H(t,s)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s=\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{4\gamma(\mu-1)}[R(t)-R(l)]^{\mu-1} \tag{2.22}$$

再利用 $\lim_{t\to\infty}R(t)=\infty$, 可得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma R^{\mu-1}(t)}\int_{l}^{t}v(s)r(s)[h_1(s,l)+\sqrt{H(s,l)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s=\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{4\gamma(\mu-1)} \tag{2.23}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma R^{\mu-1}(t)}\int_{l}^{t}v(s)r(s)[h_2(t,s)-\sqrt{H(t,s)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\mathrm{d}s=\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{4\gamma(\mu-1)}. \tag{2.24}$$

由 (2.19) 和 (2.23) 式, 有

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{R^{\mu-1}(t)}\int_{l}^{t}\{[R(s)-R(l)]^{\mu}\psi(s)-\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}v(s)r(s)[h_1(s,l)+\sqrt{H(s,l)}\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\}\mathrm{d}s\\&=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{R^{\mu-1}(t)}\int_{l}^{t}[R(s)-R(l)]^{\mu}\psi(s)-\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{4\gamma(\mu-1)}>0.\end{aligned}$$

即 (2.9) 式成立. 同理由 (2.20) 和 (2.24) 可得 (2.10) 成立. 根据定理 2.3, 方程 (1.1) 是振动的.

如果令 $r(s)\equiv 1$, 则根据上面的结论可得

推论 2.3 令 $r(s)\equiv 1$. 则方程 (1.1) 是振动的，如果对于每个 $l\geq t_0$ 和一些 $\mu>1$, 下面二者之一成立.

(i) 下面两个不等式成立：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\mu-1}}\int_l^t(s-l)^{\mu}\psi(s)\mathrm{d}s>\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{4\gamma(\mu-1)},\tag{2.25}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\mu-1}}\int_l^t(t-s)^{\mu}\psi(s)\mathrm{d}s>\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{4\gamma(\mu-1)}.\tag{2.26}$$

或者 (ii) 下面的不等式成立：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\mu-1}}\int_l^t(s-l)^{\mu}[\psi(s)+\psi(2t-s)]\mathrm{d}s>\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{2\gamma(\mu-1)},\tag{2.27}$$

其中 $\psi(s)=q(s)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}p^2(s)-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(s)$.

证明 (i) 只需注意到 $r(s)\equiv 1$ 时， (2.25) 和 (2.26) 即为 (2.19) 和 (2.20). 由定理 2.5 可知结论成立.

(ii) 取 $\rho(s)\equiv 1$ 和 $k(s)\equiv 0$, 则 $v(s)\equiv 1$. 对于每个 $T\geq t_0$, 令 $a=T$. 在 (2.27) 中取 $l=a$, 并注意到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\mu-1}}\int_a^t(s-a)^{\mu-2}\mathrm{d}s=\frac{1}{\mu-1},\tag{2.28}$$

有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\mu-1}}\int_a^t\{(s-a)^{\mu}[\psi(s)+\psi(2t-s)]-\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{2\gamma}(s-a)^{\mu-2}\}\mathrm{d}s>0.$$

上式表明

$$\limsup_{t\to\infty}\int_a^t\{(s-a)^{\mu}[\psi(s)+\psi(2t-s)]-\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{2\gamma}(s-a)^{\mu-2}\}\mathrm{d}s>0,$$

因此，存在 $c>a$, 使得

$$\int_a^c(s-a)^{\mu}[\psi(s)+\psi(2c-s)]\mathrm{d}s>\frac{\lambda_1\gamma_1\mu^2}{2\gamma}\int_a^c(s-a)^{\mu-2}\mathrm{d}s,$$

即 (2.16) 式对 $\rho(s)=1$, $k(s)=0$ 成立. 根据推论 2.2, 方程 (1.1) 是振动的. □

注 4 如果令 $p(t)=0$, $\varphi(x)\equiv 1$, $g(y)\equiv y$, $f(x)\equiv x$, 则可取 $\lambda=\lambda_1=\gamma=\gamma_1=1$. 这时，推论 2.3 变为 Kong[5] 的定理 2.3, 即定理 A.

3 一些例子

本节将给出两个例子来说明上述结果的应用. 在这些例子中将会看到，利用本文结果可判定方程的振动性，但 Kong [5], Li 和 Agarwal [6] 的结果都不能判定.

例 1 考虑非线性阻尼微分方程

$$[\frac{1}{2t(1+e^{-|x(t)|}}\frac{x'(t)}{1+x'^2(t)}]'+\frac{1}{t^2}\frac{x'(t)}{1+x'^2(t)}+\frac{2t}{(t^2-1)^2}f(x(t))=0,\quad t\geq 1,\tag{3.1}$$

其中 $r(t)=\frac{1}{2t}$, $p(t)=\frac{1}{t^2}$, $q(t)=\frac{2t}{(t^2-1)^2}$, $\varphi(x)=\frac{1}{1+e^{-|x|}}$, $g(y)=\frac{y}{1+y^2}$, $f(x)$ 满足条件 A_2). 则

$$\frac{1}{2}\le\varphi(x)\le 1,\quad g^2(y)=\frac{y^2}{(1+y^2)^2}\le\frac{y^2}{1+y^2}=yg(y)\quad(\lambda=\frac{1}{2},\lambda_1=1,\gamma_1=1),$$

$$R(t)=\int_1^t\frac{1}{r(s)}\,ds=\int_1^t 2s\mathrm{d}s=t^2-1,\ R'(t)=2t,\ \lim_{t\to\infty}R(t)=\infty,$$

$$\psi(t)=q(t)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{p^2(t)}{r(t)}-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(t)=\frac{2t}{(t^2-1)^2}.$$

且对于 $\mu>1$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{R^{\mu-1}(t)}\int_l^t(R(s)-R(l))^\mu\frac{2s}{(s^2-1)^2}\mathrm{d}s=\frac{1}{\mu-1}\tag{3.2}$$

和

$$\int_l^t[R(t)-R(s)]^\mu\frac{2s}{(s^2-1)^2}\mathrm{d}s\ge\int_l^t[R(s)-R(l)]^\mu\frac{2s}{(s^2-1)^2}\mathrm{d}s.\tag{3.3}$$

由 (3.2) 和 (3.3) 式，并注意到对任何 $\gamma>1/4$, 存在 $\mu>1$, 使得 $1/(\mu-1)>\mu^2/4\gamma(\mu-1)$ ，表明 (2.19) 和 (2.20) 式对同样的 μ 成立．利用定理 2.5, 当 $\gamma>1/4$ 时，方程 (3.1) 是振动的.

特别地，如果在方程 (3.1) 中取函数 $f(x)=x(1+x^2)$, 则由于 $f'(x)=1+3x^2\ge 1$, 即 $\gamma=1>1/4$, 因此该方程是振动的．然而，由于 $\varphi(x)\ne 1$ 和 $g(y)\ne y$, 因此 Kong [5] 和 Li, Agarwal [6] 的结果无法应用于方程 (3.1).

例 2 考虑非线性阻尼微分方程

$$\begin{aligned}&[\frac{1}{2}(1+\sin^2(t))(1+e^{-|x(t)|})x'(t)(1-e^{-x'^2(t)})]'-\sin 2tx'(t)(1-e^{-x'^2(t)})+\\&\frac{3}{1+\sin^2 t}(x(t)+x^5(t))=0,\quad t\ge 1,\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中

$$r(t)=1+\sin^2(t),\quad p(t)=-\sin 2t,\quad q(t)=\frac{3}{1+\sin^2(t)},\quad \varphi(x)=\frac{1}{2}(1+e^{-|x|}),$$

$$g(y)=y(1-e^{-y^2}),\quad f(x)=x+x^5.$$

则

$$g^2(y)=y^2(1-e^{-y^2})^2\le y^2(1-e^{-y^2})=yg(y)\quad(\gamma_1=1),$$

$$\frac{1}{2}\le\varphi(x)\le 1,\ f'(x)=1+5x^4\ge 1\quad(\lambda=\frac{1}{2},\lambda_1=1,\gamma=1).$$

在推论 2.1 中，取 $\mu=2$, $k(t)=0$, $\rho(t)=t^2$, 则 $v(t)=t^2$, 且

$$\psi(t)=v(t)\{q(t)-\frac{\gamma_1}{4\lambda\gamma}\frac{p^2(t)}{r(t)}-\frac{\gamma_1}{2\gamma}p'(t)\}=\frac{(4-3\sin^2 t)t^2}{1+\sin^2 t},$$

因此

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\mu-1}}\int_l^t(s-l)^\mu\{\psi(s)-\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}v(s)r(s)[\frac{\mu}{s-l}+\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\}\mathrm{d}s\\
&=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_l^t(s-l)^2s^2\{\frac{4-3\sin^2 s}{1+\sin^2 s}-\frac{1}{4}(1+\sin^2 s)[\frac{2}{s-l}+\frac{2}{s}]^2\}\mathrm{d}s\\
&\geq\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_l^t\{\frac{1}{2}(s-l)^2s^2-2(2s-l)^2\}\mathrm{d}s=\infty,
\end{aligned}$$

类似地有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\mu-1}}\int_l^t(t-s)^\mu\{\psi(s)-\frac{\lambda_1\gamma_1}{4\gamma}v(s)r(s)[\frac{\mu}{t-s}-\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}]^2\}\mathrm{d}s=\infty,$$

这说明 (2.14) 和 (2.15) 式成立，由推论 2.1, 方程 (3.4) 是振动的.

参考文献:

[1] LI H J. *Oscillation criteria for second order linear differential equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **194**: 217–234.

[2] ROGOVCHENKO Y V. *Oscillation theorems for second-order equations with damping* [J]. Nonlinear Anal., 2000, **41**: 1005–1028.

[3] LI Wan-tong. *Oscillation of certain second-order nonlinear differential equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, **217**: 1–14.

[4] ROGOVCHENKO Y V. *Oscillation criteria for certain nonlinear differential equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1999, **229**: 399–416.

[5] KONG Q. *Interval criteria for oscillation of second-order linear ordinary differential equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1999, **229**: 258–270.

[6] LI Wan-tong, AGARWAL R P. *Interval oscillation criteria for second order nonlinear differential equations with damping* [J]. Comput. Math. Appl., 2000, **40**: 217–230.

[7] PHILOS CH G. *Oscillation theorems for linear differential equations of second order* [J]. Arch. Math. (Basel), 1989, **53**: 482–492.

Interval Criteria for Oscillation of Second Order Nonlinear Differential Equations with Damping

SHI Wen-ying

(College of Mathematics and Computer, Hebei University, Baoding 071002, China)

Abstract: In this paper, we investigate a class of second-order nonlinear differential equations with damping. By using averaging functions and a generalized Riccati transformation, new interval oscillation criteria for the differential equations are established, which are different from the most known ones in the sense that they are based on the information only on a sequence of subintervals of $[t_0,\infty)$, rather than on the whole half-line. Our results extend and improve some known results in the literature. In particular, several examples that dwell upon the sharp conditions of our results are also included.

Key words: interval oscillation criteria; second order; nonlinear; damped; Riccati transformation.