第26卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0399-07 **文献标识码**: **A**

时滞方程解的振动性和正解的存在性

林诗仲 [1], 俞元洪 [2]
(1. 海南师范学院数学系, 海南 海口 571158; 2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100080)
(E-mail: szlin@mail.hainnu.edu.cn)

摘 要: 本文建立了具有分布时滞的一阶线性微分方程解的振动准则和正解存在的充分条件.

关键词: 分布时滞; 正解; 振动.
MSC(2000): 34K11
中图分类: O175

1 引 言

考虑一阶线性时滞微分方程

$$x'(t)+\int_0^{\sigma(t)} x(t-s)\mathrm{d}r(t,s)=0,\quad t\ge t_0, \tag{1}$$

其中, 考虑的积分是 Stieltjes 积分, 本文假设:

(C_1) $\sigma:[t_0,\infty)\to(0,\infty)$ 连续, 且 $\lim_{t\to\infty}(t-\sigma(t))=\infty$;

(C_2) $r(t,0)=0, t\in[t_0,\infty)$;

(C_3) $r(t,\sigma(t)):[t_0,\infty)\to R$ 连续;

(C_4) $r(t,s)$ 关于 s 为非减, $s\in[0,\sigma(t)]$.

若对充分大的 t, 函数 $x(t)$ 连续可微且满足方程 (1), 则称 $x(t)$ 为方程 (1) 的解, 如果 (1) 的解有任意大的零点, 则称它为振动的, 否则, 称它为非振动的.

近年来, 泛函微分方程的振动理论受到很大的关注. 但是, 大多数研究集中在具有离散时滞的微分方程上, 而对分布时滞方程则关注较少. 参看文 [1]–[5] 及引文.

本文的目的是给出方程 (1) 的一切解均为振动以及至少存在一个非振动解的充分条件.

2 主要结果

引理 2.1 设存在非减连续函数 $\tau(t)$, 使得

$$\begin{aligned}&0<\tau(t)\le\sigma(t),\quad t\ge t_0,\\&\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau(t)}^{t}[r(s,\sigma(s)-r(s-\tau(s))]\mathrm{d}s>0.\end{aligned}\tag{2}$$

若 $x(t)$ 是方程 (1) 的非振动解, 则存在 $T\ge t_0$, 使得 $x(t-\tau(t))/x(t)$ 在 $[T,\infty)$ 上有界.

收稿日期: 2004-02-15
基金项目: 海南省自然科学基金 (80403) 和教育厅基金 (HJKJ200317)

证明 不失一般，设 $x(t)$ 最终为正，则注意到条件 (C_1)–(C_4) 和不等式 $t-\sigma(t)\le t-s\le t$, $x(t)$ 必是最终单调减函数，有

$$-x'(t)\ge\int_{\tau(t)}^{\sigma(t)}x(t-s)\mathrm{d}r(t,s)\ge[r(t,\sigma(t))-r(t,\tau(t))]x(t-\tau(t)) \tag{3}$$

对充分大的 t 成立，由条件 (2), 存在 $T\ge t_0$ 和 $\varepsilon>0$ 使得

$$\int_{t-\tau(t)}^{t}[r(s,\sigma(s))-r(s,\tau(s))]\mathrm{d}s\ge 2\varepsilon,\quad t\ge T.$$

则对任意 $t\ge T$, 存在 $t^*>t$ 使得

$$\int_{t^*-\tau(t^*)}^{t}[r(s,\sigma(s))-r(s,\tau(s))]\mathrm{d}s\ge\varepsilon$$

和

$$\int_{t}^{t^*}[r(s,\sigma(s))-r(s,\tau(s))]\mathrm{d}s\ge\varepsilon.$$

利用不等式 (3), 得到

$$\begin{aligned}x(t^*-\tau(t^*))-x(t)&\ge x(t-\tau(t))\int_{t^*-\tau(t^*)}^{t}[r(s,\sigma(s))-r(s,\tau(s))]\mathrm{d}s\\&\ge\varepsilon x(t-\tau(t)),\quad t\ge T,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}x(t)-x(t^*)&\ge x(t^*-\tau(t^*))\int_{t}^{t^*}[r(s,\sigma(s))-r(s,\tau(s))]\mathrm{d}s\\&\ge\varepsilon x(t^*-\tau(t^*)),\quad t\ge T.\end{aligned} \tag{5}$$

联合 (4) 和 (5), 有

$$x(t)\ge\varepsilon^2x(t-\tau(t)),\quad t\ge T.$$

引理 1 证毕.

定理 2.1 设 (2) 成立且对一切 $\lambda>0$ 有

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t-\sigma(t))}^{t}r(s,\sigma(s))\mathrm{d}s<\infty, \tag{6}$$

$$-\lambda+\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_0^{\sigma(t)}\exp(\lambda\int_{t-s}^{t}r(\xi,\sigma(\xi))\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}r(t,s)}{r(t,\sigma(t))}>0. \tag{7}$$

则方程 (1) 的一切解振动.

证明 设方程 (1) 存在非振动解 $x(t)$. 不妨设为充分大的 t 有 $x(t)>0$. 考虑集合

$$A=\{\lambda>0:x'(t)+\lambda r(t,\sigma(t))x(t)\le 0, t\ 充分大\}.$$

设 $t_1\ge t_0$ 充分大，使得 $x(t)$ 在 $[t_1,\infty)$ 上递减，则由方程 (1) 得

$$x'(t)+x(t)\int_0^{\sigma(t)}\mathrm{d}r(t,s)\le 0,\quad t\ge t_1.$$

即有
$$x'(t)+r(t,\sigma(t))x(t)\le 0,\quad t\ge t_1.$$
故知 $1\in A$ 且 A 是 $(0,\infty)$ 的一个子区间.

下面证明 $\sup A<\infty$. 事实上由引理 1 知，存在 $T\ge t_1$, 使 $x(t-\tau(t))/x(t)$ 在 $[T,\infty)$ 上有界．故有
$$\frac{x(t-\tau(t))}{x(t)}\le c,\quad t\ge T, \tag{8}$$
其中常数 $c>0$ 可选取成充分大，使得
$$e^{kc}>c,$$
其中常数 k 满足不等式
$$0<k\le\int_{t-\tau(t)}^{t}[r(s,\sigma(s))-r(s,\tau(s))]\mathrm{d}s,\quad t\ge t_2\ge T.$$
现在，我们断言 $\sup A\le c$. 否则，若 $c\in A$, 得到
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)\exp(c\int_{t_2}^{t}r(s,\sigma(s))\mathrm{d}s)]=[x'(t)+cr(t,\sigma(t))x(t)]\exp(c\int_{t_2}^{t}r(s,\sigma(s))\mathrm{d}s)\le 0.$$
上式表示，函数 $x(t)\exp(c\int_{t_2}^{t}r(s,\sigma(s))\mathrm{d}s)$ 在 $[t_2,\infty)$ 上递减，因此，有
$$x(t-\tau(t))\exp(c\int_{t_2}^{t-\tau(t)}r(s,\sigma(s))ds)\ge x(t)\exp(c\int_{t_2}^{t}r(s,\sigma(s))\mathrm{d}s),$$
即
$$x(t-\tau(t))\ge x(t)\exp(c\int_{t-\tau(t)}^{t}r(s,\sigma(s))\mathrm{d}s)\ge x(t)\exp(kc)>cx(t),\quad t\ge t_3\ge t_2.$$
上式与 (8) 矛盾．则有 $\sup A\le c<\infty$.

令 $\lambda^*=\sup A,\delta\in(0,\lambda^*)$ 为任意实数，则
$$\lambda^*-\delta=\beta\in A,$$
且存在 $T_1\ge t_2$, 使得
$$x'(t)+\beta r(t,\sigma(t))x(t)\le 0,\quad t\ge T_1$$
故对任意 t,s 满足 $t\ge T_1$ 和 $0\le s\le\sigma(t)$, 有
$$\begin{aligned}\frac{x(t-s)}{x(t)}&=\exp(-\ln\frac{x(t)}{x(t-s)})=\exp(-\int_{t-s}^{t}\frac{x'(u)}{x(u)}\mathrm{d}u)\\&\ge\exp(\beta\int_{t-s}^{t}r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u),\end{aligned}$$
即
$$x(t-s)\ge x(t)\exp(\beta\int_{t-s}^{t}r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u),\quad t\ge T_1$$

注意到方程 (1), 由上式得

$$\begin{aligned}0 &\geq x'(t)+[\int_0^{\sigma(t)}\exp(\beta\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)\mathrm{d}r(t,s)]x(t)\\ &= x'(t)+\frac{\int_0^{\sigma(t)}\exp(\beta\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)\mathrm{d}r(t,s)}{r(t,\sigma(t))}r(t,\sigma(t))x(t),\quad t\geq T_1\end{aligned}\tag{9}$$

因此可断言

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_0^{\sigma(t)}\exp(\beta\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)\mathrm{d}r(t,s)}{r(t,\sigma(t))}\leq\lambda^*.\tag{10}$$

事实上，若存在 $\lambda_1>\lambda^*$ 和 $T_2\geq T_1$ 使得

$$\frac{\int_0^{\sigma(t)}\exp(\beta\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)\mathrm{d}r(t,s)}{r(t,\sigma(t))}\geq\lambda_1.\quad t\geq T_2.$$

则由 (9) 可得

$$x'(t)+\lambda_1 r(t,\sigma(t))x(t)\leq 0.\quad t\geq T_2$$

因此， $\lambda_1\in A$. 但是，此与 $\lambda_1>\lambda^*$ 矛盾．于是， (10) 式成立．故有

$$-\lambda^*+\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_0^{\sigma(t)}\exp[(\lambda^*-\delta)\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u]\mathrm{d}r(t,s)}{r(t,\sigma(t))}\leq 0$$

当 $\delta\to 0$ 时，注意到条件 (6), 得到

$$-\lambda^*+\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_0^{\sigma(t)}\exp(\lambda^*\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)\mathrm{d}r(t,s)}{r(t,\sigma(t))}\leq 0$$

上式与 (7) 矛盾．定理 1 证毕.

推论 2.1 设 (2) 和 (6) 成立，且

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_0^{\sigma(t)}\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u]\mathrm{d}r(t,s)}{r(t,\sigma(t))}>\frac{1}{e},$$

则方程 (1) 的一切解振动.

证明 因为

$$\min_{\lambda>0}\frac{1}{\lambda}e^{\lambda a}=ea,\quad a>0$$

故对 $t\geq T$ 和 $0\leq s\leq\sigma(t)$, 有

$$\min_{\lambda>0}\frac{1}{\lambda}\exp(\lambda\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)=e\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u,$$

则对 $\lambda > 0$, 得到

$$\begin{aligned}&-\lambda+\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_0^{\sigma(t)}\exp(\lambda\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)\mathrm{d}r(t,s)}{r(t,\sigma(t))}\\&=\lambda[-1+\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_0^{\sigma(t)}\frac{1}{\lambda}\exp(\lambda\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)\mathrm{d}r(t,s)}{r(t,\sigma(t))}]\\&\geq\lambda[-1+\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_0^{\sigma(t)}\exp(\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)\mathrm{d}r(t,s)}{r(t,\sigma(t))}]>0.\end{aligned}$$

因此条件 (7) 成立. 则利用定理 1 知方程 (1) 的一切解振动.

引理 2.2 设不等式

$$v'(t)+\int_0^{\sigma(t)}v(t-s)\mathrm{d}r(t,s)\leq 0 \tag{11}$$

有正解 $v(t)$, 则方程 (1) 存在正解 $x(t)$ 满足

$$x(t)\leq v(t),\quad t \text{ 充分大}$$

证明 设 $v(t)$ 是不等式 (11) 在 $[t_1,\infty)$ 上的正解，则

$$v'(t)\leq-\int_0^{\sigma(t)}v(t-s)\mathrm{d}r(t,s).$$

注意到条件 (C_1)–(C_4), 有

$$v'(t)<0,\quad t\geq T$$

故 $v(t)$ 有 $[T,\infty)$ 上单调减少，其中 $T\geq t_1$ 为充分大. 从 (11) 得到

$$v(t)\geq\int_t^\infty\int_0^{\sigma(u)}v(u-s)\mathrm{d}r(u,s)\mathrm{d}u,\quad t\geq T.$$

定义函数 x 的集合 $S\subset C([T,\infty),R), x$ 满足不等式

$$0\leq x(t)\leq v(t),\quad t\geq T.$$

又定义算子 $F:S\to C([T,\infty),R)$ 如下

$$F(x)(t)=\begin{cases}\int_t^\infty\int_0^{\sigma(u)}x(u-s)\mathrm{d}r(u,s)\mathrm{d}u, & t\geq T_1,\\ v(t)-v(T_1)+F(x)(T_1), & t\in[T,T_1)\end{cases}$$

其中 $T_1>T$, 有不等式 $t-\sigma(t)\geq T,\ t\geq T_1$.

如果 $x\in S$, 有

$$\begin{aligned}0\leq F(x)(t)&=\int_t^\infty\int_0^{\sigma(u)}x(u-s)\mathrm{d}r(u,s)\mathrm{d}u\\&\leq\int_t^\infty\int_0^{\sigma(u)}v(u-s)\mathrm{d}r(u,s)\mathrm{d}u\leq v(t),\quad t\geq T_1.\end{aligned}$$

因此 $F(S)\subset S$. 注意到 S 是 $C([T,\infty),R)$ 中非空闭凸子集，算子 F 是连续的且集合 $F(S)$ 中的函数在 $[T,\infty)$ 的每一紧子区间上是等度连续. 故根据 Schauder-Tychonoff 不动点定理， F 在 S 上存在不动点 x, 使得 $x=F(x)$, 易知， x 在 $[t_1,\infty)$ 上满足方程 (1).

下面证明 x 在 $[t_1,\infty)$ 上为正. 显然，在区间 $[T<T_1)$ 上有 $v(t)>v(T_1), x(t)$ 在 $[T_1,\infty)$ 上为非负， $x(T_1)=F(x)(T_1)>0$ 且由方程 (1) 知， x 在 $[T_1,\infty)$ 上为减函数. 设 $T_2\in(T_1,\infty)$ 是 x 在区间 $[T_1,\infty)$ 上第一个零点，即 $x(T_2)=0$. 则由方程 (1), 有

$$x'(T_2)=-\int_0^{\sigma(T_2)}x(T_2-s)\mathrm{d}r(T_2,s)<0$$

因 x 递减，因此，在 $[T_2,\infty)$ 上有 $x\equiv 0$. 此表明 $x'(T_2)=0$. 矛盾说明 x 在 $[T_1,\infty)$ 上不存在零点，故 x 在 $[T_1,\infty)$ 上为正. □

定理 2.2 设存在 $T>t_0$ 和 $\lambda>0$ 使得

$$-\lambda+\sup_{t\geq T}\frac{\int_0^{\sigma(t)}\exp(\lambda\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)\mathrm{d}r(t,s)}{r(t,\sigma(t))}\leq 0 \tag{12}$$

则方程 (1) 存在正解 x, 满足

$$x(t)\leq\exp(-\lambda\int_{t_0}^t r(s,\sigma(s))\mathrm{d}s),\quad t\text{ 充分大}.$$

证明 令

$$v(t)=\exp(-\lambda\int_{t_0}^t r(s,\sigma(s))\mathrm{d}s),\quad t\geq t_0$$

则由 (12) 得到

$$v'(t)+\int_0^{\sigma(t)}v(t-s)\mathrm{d}r(t,s)=-\lambda r(t,\sigma(t))v(t)+\int_0^{\sigma(t)}\exp(-\lambda\int_t^{t-s}r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)\mathrm{d}r(t,s),$$

$$\begin{aligned}&v(t)[-\lambda r(t,\sigma(t))+\int_0^{\sigma(t)}\exp(\lambda\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)\mathrm{d}r(t,s)]\\&\leq r(t,\sigma(t))v(t)[-\lambda+\sup_{t\geq T}\frac{\int_0^{\sigma(t)}\exp(\lambda\int_{t-s}^t r(u,\sigma(u))\mathrm{d}u)\mathrm{d}r(t,s)}{r(t,\sigma(t))}]\leq 0,\quad t\geq T.\end{aligned}$$

因此， $v(t)$ 是不等式 (11) 在 $[T,\infty)$ 上的正解. 利用引理 2.2 即得定理 2.2 的结论. □

推论 2.2 设存在 $T>t_0$ 使得

$$\sup_{t\geq T}\int_{t-\sigma(t))}^t r(s,\sigma(s))\mathrm{d}s\leq\frac{1}{e}, \tag{13}$$

则方程 (1) 存在正解 $x(t)$ 满足

$$x(t)\leq\exp(-e\int_{t_0}^t r(s,\sigma(s))\mathrm{d}s),\quad t\text{ 充分大}.$$

证明　只须在 (12) 中取 $\lambda = e$, 则由 (13) 知定理 2.2 的条件满足．结论成立．　$\square$

参考文献：

[1] ERBE L H, KONG Qing, ZHANG B G. *Oscillation Theory for Functional Differential Equations* [M]. Dekker, New York, 1995.
[2] GYÖRI I, LADAS, G. *Theory for Delay Differential Equations with Applications* [M]. Clarendon Press, Oxford, 1991.
[3] LADDE G S, LAKSHMIKANTHAM V, ZHANG B G. *Oscillation Theory of Differential Equations with Daviating Arguments* [M]. Dekker, New York, 1987.
[4] BAINOV D, MISHEV D. *Oscillation Theory for Neutral Differential with Delay* [M]. Adam Hilger, New York, 1991.
[5] BAINOV D, PETROV V. *Asymptotic properties of the nonoscillatory solutions of second order neutral equations with a deviating argument* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **194**: 343–351.

Oscillation of Delay Equations and Existence of Positive Solutions

LIN Shi-zhong[1], *YU Yuan-hong*[2]
(1. Dept. of Math., Hainan University, Haikou 571158, China;
2. Inst. of Appl. Math., Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: In this paper, the oscillation criteria of solutions of first order linear differential equations with distributed delays and a sufficient condition for the existence of positive solutions are obtained.

Key words: distributed delays; sufficient conditions; oscillation.