第26卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0406-07 **文献标识码**: **A**

二阶两点边值问题的多解存在性

杜增吉， 葛渭高
(北京理工大学数学系，北京 100081)
(E-mail: duzengji@163.com)

摘 要: 本文讨论一类二阶两点边值问题 $x''(t)+f(t,x(t),x'(t))=0, t\in(0,1)$, $ax(0)-bx'(0)=0$, $cx(1)+dx'(1)=0$, 其中 $f:[0,1]\times R^2\longrightarrow R$ 是连续的， $a>0,b\geq 0,c>0,d\geq 0$. 通过运用上下解方法和 Leray-Schauder 度理论，得到了三个解的存在性结果.

关键词: 边值问题； Leray-Schauder 度；多解；上下解.
MSC(2000): 34B15
中图分类: O175.8

1 引 言

本文讨论如下两点边值问题

$$x''(t)+f(t,x(t),x'(t))=0,\quad t\in(0,1), \tag{1}$$

$$ax(0)-bx'(0)=0,\quad cx(1)+dx'(1)=0. \tag{2}$$

其中 $f:[0,1]\times R^2\longrightarrow R$ 是一个连续函数， $a>0,b\geq 0,c>0,d\geq 0$.

近几年来, 关于二阶两点边值问题解的存在性，受到了许多中外学者的广泛关注，取得了很多研究成果，参见文献 [1-12] 及相关文献. 在最近的两篇文献 [1,2] 中，蒋达清教授运用上下解方法，在方程 (1) 满足 Dirichlet 边界条件且 f 满足超线性的条件下，研究了方程 (1) 在 $x=0,t=0,t=1$ 处有奇性的解的存在性. 在文献 [3,4] 中， Bonannao 和 Candito 应用修正的极小原理分别研究了自治系统 $x''+\lambda f(x(t))=0$, $x(0)=x(1)=0$ 和非自治系统 $x''+\lambda f(t,x(t))=0$, $x(0)=x(1)=0$ 的三解存在性. 在文献 [5] 中， Anderson 研究了如下二阶测度链上的两点边值问题

$$-x^{\Delta\Delta}=\lambda p(t)f(x^{\sigma}(t)),t\in[t_1,t_2], \tag{3}$$

$$\alpha x(t_1)-\beta x^{\Delta}(t_1)=0,\quad \gamma x(\sigma(t_2))+\delta x^{\Delta}(\sigma(t_2))=0, \tag{4}$$

作者通过运用 Krasnosel'skii 不动点定理, 研究了边值问题 (3),(4) 解的存在性, 从而得到了特征值区间的存在性. 在文献 [6] 中，Agarwal 等通过运用 Leggett-Williams 不动点定理研究当 $\gamma=0$ 时边值问题 (3),(4) 三个解的存在性. 在文献 [7] 中， Agarwal 等通过运用上下解方法, 建立了实数域上问题 (3),(4) 解存在的充分条件. 文献 [8] 中， Avery 和 Henderson 运用 Leggett-Williams 不动点定理研究治系统 $x''+f(x(t))=0$ 和 $x(0)=x(1)=0$ 的三解存在性.

收稿日期: 2004-02-20

但是，在文献 [3-8] 中，非线性项 f 都不含有导数项. 在文献 [1-2] 中，都要求 f 是正的，且满足超线性的条件，从而得到了解的存在性.

本文将运用上下解方法和 Leray-Schauder 度理论来研究边值问题 (1),(2), 得到了三个解的存在性结果. 特别地，我们给出边值问题 (1),(2) 的两个上解 β_1, β_2 和两个下解 α_1, α_2, 在 [0,1] 上满足 $\alpha_1 \le \alpha_2, \beta_1 \le \beta_2$, 和 $\alpha_2 \not\le \beta_1$. 在本文中，我们不需要 $\beta_1 \le \alpha_2$ 这个较强的条件，只需 $\alpha_2 \not\le \beta_1$ 即可，从而减弱了下解 α_2 与上解 β_1 满足的条件.

2 准备工作

在本文中，我们将用以下几个空间 $C[0,1]$, $C^1[0,1]$ 和 $L^1[0,1]$. 对于 $x \in C^1[0,1]$, 我们定义范数 $\|x\|_\infty = \max\{|x(t)| : t \in [0,1]\}$, $\|x\| = \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\}$. 定义 Sobolev 空间 $W^{2,1}(0,1)$ 为

$$W^{2,1}(0,1) = \{x : [0,1] \longrightarrow R | x, x' \text{ 在 } [0,1] \text{ 上是绝对连续的，且 } x'' \in L^1[0,1]\}.$$

定义 1 如果 $\alpha(t) \in W^{2,1}(0,1)$, 满足

$$\alpha''(t) + f(t, \alpha(t), \alpha'(t)) \ge 0, \quad 0 < t < 1, \tag{5}$$

$$a\alpha(0) - b\alpha'(0) \le 0, \quad c\alpha(1) + d\alpha'(1) \le 0, \tag{6}$$

则称 $\alpha(t)$ 为边值问题 (1),(2) 的下解. 类似地，如果 $\beta(t) \in W^{2,1}(0,1)$ 满足

$$\beta''(t) + f(t, \beta(t), \beta'(t)) \le 0, \quad 0 < t < 1, \tag{7}$$

$$a\beta(0) - b\beta'(0) \ge 0, \quad c\beta(1) + d\beta'(1) \ge 0, \tag{8}$$

则称 $\beta(t)$ 为边值问题 (1),(2) 的上解.

注 1 如果不等式 (5) 和 (7) 严格成立，则称 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 分别为边值问题 (1),(2) 的严格下解和严格上解.

注 2 设 $f : [0,1] \times R^2 \longrightarrow R$ 是连续的， x 是边值问题 (1),(2) 的一个解. 如果 α 是边值问题 (1),(2) 的一个严格下解且满足 $\alpha \le x$, 则在 $(0,1)$ 上，有 $\alpha < x$. 类似地，如果 β 是边值问题 (1),(2) 的一个严格上解且满足 $x \le \beta$, 则在 $(0,1)$ 上，有 $x < \beta$.

定义 2 设 α 和 β 分别是边值问题 (1), (2) 的一个下解和上解, 并且在 $[0,1]$ 上满足 $\alpha \le \beta$. 我们称 f 关于 α 和 β 满足 Nagumo 条件，如果存在函数 $\Phi \in C([0,\infty); (0,+\infty))$, 使得对于所有的 $(t,x,y) \in [0,1] \times [\alpha(t), \beta(t)] \times R$, 有

$$|f(t,x,y)| \le \Phi(|y|), \tag{9}$$

和

$$\int_0^\infty \frac{s}{\Phi(s)} \mathrm{d}s = \infty. \tag{10}$$

3 主要结果

定理 1 假设

(A1) α_1, α_2 和 β_1, β_2 分别是边值问题 (1),(2) 的两个严格下解和两个严格上解，并且满足 $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \beta_2$, $\alpha_1 \le \beta_1 \le \beta_2$, $\alpha_2 \not\le \beta_1$;

(A2) 设 $f(t,x,y):[0,1]\times R^2 \longrightarrow R$ 是一个连续函数;

(A3) f 关于 α_1 和 β_2 满足 Nagumo 条件,

则边值问题 (1),(2) 至少有三个解 x_1, x_2 和 x_3, 且在 $[0,1]$ 上满足

$$\alpha_1 \le x_1 \le \beta_1, \quad \alpha_2 \le x_2 \le \beta_2, \quad x_3 \not\le \beta_1, \quad x_3 \not\ge \alpha_2. \tag{11}$$

证明 由假设 (A3), 可以选取 $N>0$, 满足

$$\int_\lambda^N \frac{s}{\Phi(s)}\mathrm{d}s > \lambda, \tag{12}$$

其中 $\lambda = \max\limits_{t\in[0,1]} \beta_2(t) - \min\limits_{t\in[0,1]} \alpha_1(t)$. 令常数 L 为

$$L = \max\{\|\alpha_1'\|_\infty,\ \|\beta_2'\|_\infty, N, 2\lambda\}.$$

定义

$$T_0x(t) = \max\{\alpha_1(t), \min\{x(t), \beta_2(t)\}\}, \tag{13}$$

则有 $\alpha_1(t) \le T_0x(t) \le \beta_2(t), 0\le t\le 1$. 定义

$$T_1x'(t) = \max\{-L, \min\{x'(t), L\}\}, \tag{14}$$

则有 $|T_1x'(t)| \le L, 0\le t\le 1$. 定义截断函数

$$F(t,x,x') = f(t, T_0x, T_1x'), \tag{15}$$

则 F 在 $[0,1]\times R^3$ 上是连续的，且满足

$$|F(t,x,x')| \le M, \quad \forall (t,x,x') \in [0,1]\times R^2, \tag{16}$$

其中常数 $M > \max\{\|\alpha_1\|_\infty,\ \|\beta_2\|_\infty\}$.

考虑截断问题

$$x''(t) + F(t,x,x') = 0, t\in(0,1), \tag{17}$$

和边界条件 (2).

由 F 的定义可知，我们只要证明方程 (17) 和边界条件 (2) 至少有三个解 x_1, x_2 和 x_3 且满足

$$\alpha_1(t) \le x_i(t) \le \beta_2(t), \quad |x_i'(t)| \le L,\ t\in[0,1],\ i=1,2,3, \tag{18}$$

则 x_1, x_2 和 x_3 也是边值问题 (1),(2) 的解. 为此，我们分两步来完成证明.

步骤 1. 假设方程 (17) 和边界条件 (2) 有一个解 x, 则这个解 x 满足 (18).

首先证明 $\alpha_1(t) \le x(t) \le \beta_2(t), t\in[0,1]$. 下面证明 $\alpha_1(t) \le x(t), t\in[0,1]$. 假设 $\alpha_1(t) \le x(t), t\in[0,1]$ 不成立，则存在 $t\in[0,1]$ 使得 $\alpha_1(t) > x(t)$. 令 t_0 为 $\alpha_1(t) - x(t)$ 在 $[0,1]$ 上的最

大值点.

如果 $t_0=0$, 则 $\alpha_1(0)>x(0),\alpha_1'(0)\le x'(0)$, 由 (6), 有

$$a\alpha_1(0)-b\alpha_1'(0)\le 0=ax(0)-bx'(0), \tag{19}$$

因为 $a>0$, 所以 (19) 不成立．如果 $t_0=1$, 则 $\alpha_1(1)>x(1),\alpha_1'(1)\ge x'(1)$, 由 (6), 有

$$c\alpha_1(1)+d\alpha_1'(1)\le 0=cx(1)+dx'(1), \tag{20}$$

因为 $c>0$, 所以 (20) 不成立.

如果 $t_0\in(0,1)$, 则有

$$\alpha_1(t_0)>x(t_0),\quad \alpha_1'(t_0)=x'(t_0),\quad \alpha_1''(t_0)\le x''(t_0),t_0\in(0,1). \tag{21}$$

由 (21) 和假设条件 (A1), 可以得到以下矛盾

$$\begin{aligned}\alpha_1''(t_0)\le x''(t_0)&=-F(t_0,x(t_0),x'(t_0))=-f(t_0,T_0x(t_0),T_1x'(t_0))\\&=-f(t_0,\alpha_1(t_0),\alpha_1'(t_0))<\alpha_1''(t_0),\end{aligned}$$

所以 $\alpha_1(t)\le x(t),t\in[0,1]$. 类似地可证 $x(t)\le\beta_2(t),t\in[0,1]$. 因此， $\alpha_1(t)\le x(t)\le\beta_2(t),t\in[0,1]$.

其次证明 $|x'(t)|\le L,\ t\in[0,1]$ 成立．否则，存在 $t\in[0,1]$ 使得 $|x'(t)|>L$. 不失一般性, 设 $x'(t)>L$. 设 t_1 是 $x'(t)-L$ 在 $[0,1]$ 上的最大值点．由中值定理和 $\alpha_1(t)\le x(t)\le\beta_2(t)$, $t\in[0,1]$, 可知一定存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$x'(\theta)=x(1)-x(0)\le\lambda<L.$$

因为 $x'\in C[0,1]$, 则存在区间 $[t_2,t_3]\subseteq[0,1]$ (或者 $[t_3,t_2]\subseteq[0,1]$), 使得

$$x'(t_2)=\lambda,x'(t_3)=L,\quad \lambda<x'(t)<L,\quad t\in(t_2,t_3). \tag{22}$$

由 (9), 有

$$|x''(t)|=|F(t,x,x')|=|f(t,x,x')|\le\Phi(|x'|),t\in(t_2,t_3),$$

所以

$$\left|\int_{t_2}^{t_3}\frac{x'(t)x''(t)}{\Phi(x'(t))}\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_{t_2}^{t_3}x'(t)\mathrm{d}t\right|\le\lambda. \tag{23}$$

另一方面，由 (22) 和 (12), 有

$$\left|\int_{t_2}^{t_3}\frac{x'(t)x''(t)}{\Phi(x'(t))}\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{\lambda}^{L}\frac{s}{\Phi(s)}\mathrm{d}s\right|>\lambda. \tag{24}$$

这样 (23) 和 (24) 相矛盾．故有 $|x'(t)|\le L,\ t\in[0,1]$. 所以 x 就是所需的解.

步骤 2. 证明边值问题 (17), (2) 至少有三个解 x_1,x_2 和 x_3.

设 $G(t,s)$ 为方程 $-x''(t)=0$ 和边界条件 (2) 的 Green 函数，则

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{\rho}[at+b][c(1-s)+d], & 0\le t\le s\le 1;\\ \frac{1}{\rho}[as+b][c(1-t)+d], & 0\le s\le t\le 1,\end{cases}$$

其中 $\rho = ac + ad + bc > 0$. 令

$$\Omega = \{x \in C^1[0,1] : \|x\| < PM + L\},$$

其中 $P > \max\{\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s, 1\}$.

定义 $S : C[0,1] \longrightarrow C^1[0,1]$ 为

$$(S\varphi)(t) = \int_0^1 G(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s, \quad \forall \varphi \in C[0,1], \forall t \in [0,1].$$

易知 S 是全连续的.

定义 $H : C^1[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ 为

$$H(\varphi)(t) = F(t, \varphi(t), \varphi'(t)).$$

则 $x \in C^1[0,1]$ 是边值问题 (17),(2) 的解，当且仅当 $(I - SH)(x) = 0$. 对于 $x \in \overline{\Omega}$, 有

$$\begin{aligned} SH(x) = \int_0^1 G(t,s)F(s,x(s),x'(s))\mathrm{d}s \le M \int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s \\ < PM < PM + L, \end{aligned}$$

故 $SH(\overline{\Omega}) \subset \Omega$. 易知 SH 是全连续的. 所以

$$\deg(I - SH, \Omega, 0) = \deg(I, \Omega, 0) = 1. \tag{25}$$

令

$$\Omega_{\alpha_2} = \{x \in \Omega : x(t) > \alpha_2(t)\ t \in (0,1)\}, \quad \Omega^{\beta_1} = \{x \in \Omega : x(t) < \beta_1(t), t \in (0,1)\ \}.$$

因为在 $[0,1]$ 上有 $\alpha_2 \not\le \beta_1, \alpha_2 \ge \alpha_1 > -M$, 和 $\beta_1 \le \beta_2 < M$, 所以

$$\Omega_{\alpha_2} \ne \emptyset \ne \Omega^{\beta_1}, \quad \overline{\Omega}_{\alpha_2} \bigcap \overline{\Omega}^{\beta_1} = \emptyset, \quad \Omega \setminus \overline{\{\Omega_{\alpha_2} \bigcup \Omega^{\beta_1}\}} \ne \emptyset,$$

由假设条件 (A1) 和注 2 可知，在 $\partial\Omega_{\alpha_2} \bigcup \partial\Omega^{\beta_1}$ 上没有解. 因此

$$\begin{aligned} \deg(I - SH, \Omega, 0) =& \deg(I - SH, \Omega \setminus \overline{\{\Omega_{\alpha_2} \bigcup \Omega^{\beta_1}\}}, 0) + \\ & \deg(I - SH, \Omega_{\alpha_2}, 0) + \deg(I - SH, \Omega^{\beta_1}, 0). \end{aligned} \tag{26}$$

如果能够证明

$$\deg(I - SH, \Omega_{\alpha_2}, 0) = \deg(I - SH, \Omega^{\beta_1}, 0) = 1.$$

则由 (25),(26) 可知

$$\deg(I - SH, \Omega \setminus \overline{\{\Omega_{\alpha_2} \bigcup \Omega^{\beta_1}\}}, 0) = -1,$$

由 Leray-Schauder 度理论可知，边值问题 (17),(2) 有三个解，并且分别在集合 Ω_{α_2}, Ω^{β_1} 和 $\Omega \setminus \overline{\{\Omega_{\alpha_2} \bigcup \Omega^{\beta_1}\}}$ 内.

我们只需证明 $\deg(I - SH, \Omega_{\alpha_2}, 0) = 1$. 同样可证 $\deg(I - SH, \Omega^{\beta_1}, 0) = 1$, 故忽略证明.

下证 $\deg(I - SH, \Omega_{\alpha_2}, 0) = 1$. 类似于 T_0, T_1 的定义，我们定义

$$T_0^* x(t) = \max\{\alpha_2(t), \min\{x(t), \beta_2(t)\}\},$$

$$T_1^*x'(t) = \max\{-L, \min\{x'(t), L\}\},$$

下面把 $I - SH|_{\overline{\Omega}_{\alpha_2}}$ 延拓为 $I - SH^* : \overline{\Omega} \longrightarrow C^1[0,1]$. 令

$$F^*(t,x,x') = f(t, T_0^*x, T_1^*x'),$$

则 F^* 在 $[0,1] \times R^2$ 上是一个连续函数，并且满足

$$|F^*(t,x,x')| \le M, \quad \forall (t,x,x') \in [0,1] \times R^3,$$

其中 M 的意义同 (16).

定义 $H^* : C^1[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ 为

$$H^*(\varphi)(t) = F^*(t, \varphi(t), \varphi'(t)),$$

则 $x \in C^1([0,1])$ 为算子方程 $(I - SH^*)(x) = 0$ 的解，当且仅当 x 是方程

$$x''(t) + F^*(t,x,x') = 0 \quad t \in (0,1), \tag{27}$$

满足边界条件 (2) 的解. 类似于以上的证明，我们知道 x 是 (27) 和 (2) 的解仅需 $x \in \Omega_{\alpha_2}$. 因此

$$\deg(I - SH^*, \Omega \setminus \overline{\Omega}_{\alpha_2}) = 0.$$

和上面的讨论一样，我们可以证明 $SH^*(\overline{\Omega}) \subset \Omega$. 所以有

$$\deg(I - SH^*, \Omega, 0) = 1.$$

故

$$\begin{aligned}\deg(I - SH, \Omega_{\alpha_2}, 0) &= \deg(I - SH^*, \Omega_{\alpha_2}, 0)\\ &= \deg(I - SH^*, \Omega \setminus \overline{\Omega}_{\alpha_2}, 0) + \deg(I - SH^*, \Omega_{\alpha_2}, 0)\\ &= \deg(I - SH^*, \Omega, 0) = 1.\end{aligned}$$

因此，边值问题 (17),(2) 在集合 Ω_{α_2} 内有解. 所以边值问题 (1),(2) 至少有三个解，并且满足 (11). □

参考文献:

[1] JIANG Da-qing. *Upper and lower solutions for a superlinear singular boundary value problem* [J]. Comput. Math. Appl., 2001, **41**: 563–569

[2] JIANG Da-qing. *Upper and lower solutions method and a superlinear singular boundary value problem* [J]. Comput. Math. Appl., 2002, **44**: 323–337

[3] BONANNAO G. *Existence of three solutions for a two-point boundary value problem* [J]. Appl. Math. Lett., 2000, **13**: 53–57.

[4] CANDITO P. *Existence of three solutions for a nonautomous two-point boundary value problem* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2000, **252**: 532–537.

[5] ANDERSON D R. *Eigenvalue intervals for a two-point boundary value problem on a measure chain* [J]. J. Comput. Appl. Math., 2002, **141**: 57–64.

[6] AGARWAL R P, O'REGAN D. *Triple solutions to boundary value problem on time scales* [J]. Appl. Math. Lett., 2000, **13**: 7–11.
[7] AGARWAL R P, O'REGAN D, WONG P J Y. *Positive Solutions of Differential, Difference and Integral Equations* [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
[8] AVERY R I, HENDERSON J. *Three symmetric positive solutions for a second order boundary value problem* [J]. Appl. Math. Lett., 2000, **13**: 1–7.
[9] 贺小明，葛渭高．一维 P-Lapalacian 方程正解的存在性 [J]. 数学学报， 2003, **46**(4): 805–810.
HE Xiao-ming, GE Wei-gao. *Exiatence of positive solutions for the one dimensional P-Lapalacian equations* [J]. Acta Math. Sinica, 2003, **46**(4): 805–810. (in Chinese)
[10] DU Zeng-ji, GE Wei-gao, LIN Xiao-jie. *Existence of Solutions for a class of third-order nonlinear boundary value problems* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2004, **294**: 104–112.
[11] HENDERSON J, THOMPSON H B. *Existence of multiple solutions for second order boundary value problems* [J]. J. Differential Equations, 2000, **166**: 443–454.
[12] SUN Wei-ping, GE Wei-gao. *The existence of solutions to Sturm-Liouville boundary value problems with Laplacian-like operator* [J]. Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser., 2002, **18**(2): 341–348.

Existence of Multiple Solutions to a Second-Order Two-Point Boundary Value Problem

DU Zeng-ji, GE Wei-gao
(Dept. of Math., Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: In this paper, we consider a class of second-order two-point boundary value problem $x''(t)+f(t,x(t),x'(t))=0$, $t\in(0,1)$, $ax(0)-bx'(0)=0$, $cx(1)+dx'(1)=0$, where $f:[0,1]\times R^2\longrightarrow R$ is continuous, $a>0, b\geq 0, c>0$, and $d\geq 0$. By using upper and lower solutions method and Schauder degree theory, we obtain the existence of three solutions.

Key words: boundary value problems; Leray-Schauder degree; multiple solutions; upper and lower solutions.