第26卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.3
2006年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)03-0531-08 **文献标识码**: **A**

两个 $l^p(\Gamma, E)$ 型空间的单位球面间满等距映射的表现定理及等距延拓

方习年 [1], 王建华 [2]

(1. 南京审计学院应用数学系, 江苏 南京 210029; 2. 安徽师范大学数学系, 安徽 芜湖 241000)

(E-mail: fxn@nau.edu.cn)

摘 要: 本文得到两个实的 $l^p(\Gamma, E)$ 型空间单位球面之间满等距映射的表现定理 (这里, $1 \le p < +\infty, p \ne 2$, E 为内积空间), 并导出上述映射可延拓为全空间上的实线性等距算子.

关键词: 等距映射; $l^p(\Gamma, E)$ 空间; 等距延拓.
MSC(2000): 46A22, 46B20, 46E15
中图分类: O177.3

1 引 言

文 [1] 中给出了两个实的 $l^p(\Gamma)$ 型空间单位球面之间满等距映射的表现定理 (其中, Γ 为一指标集, $1 < p < \infty, p \ne 2$), 并导出上述映射可延拓为全空间上的实线性等距算子, 从而肯定地回答了 Tingley 在文 [2] 中提出的如下问题: 令 $S_1(X)$ 和 $S_1(Y)$ 是赋范空间 X 和 Y 的单位球面, 设 $T : S_1(X) \to S_1(Y)$ 是一个满等距 (即对任意的 x_1,$x_2 \in S_1(X)$, 都有 $\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$). 那么 T 是否为某线性或者仿线性算子在 $S_1(X)$ 上的限制?

本文给出从空间 $l^p(\Gamma, E)$ 的单位球面到空间 $l^p(\Delta, F)$ 单位球面等距映射的表现定理 (其中, Γ, Δ 是指标集, E, F 内积空间, $1 \le p < \infty, p \ne 2$), 并证明这个映射可延拓为全空间上的实线性等距算子, 从而也肯定地回答了相应 Tingley 问题.

一些记号, 设 E 为赋范空间, Γ 为任意指标集, 记

$$l^p(\Gamma, E) = \{x = (x_\gamma) | x : \Gamma \mapsto E, \|x\|^p = \sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|^p < +\infty\}.$$

$S_1(l^p(\Gamma, E))$ 为 $l^p(\Gamma, E)$ 的单位球面, 当 $x = (x_\gamma) \in l^p(\Gamma, E)$ 时, 记 $P_{\gamma'}(x) = (y_\gamma) \in l^p(\Gamma, E), y_\gamma = \begin{cases} x_{\gamma'}, \gamma = \gamma' \\ 0, \gamma \ne \gamma' \end{cases}$ 在不引起混淆的情况下, 用 $x_{\gamma'}$ 表示 $P_{\gamma'}(x)$. 记 $(\mathrm{supp} x) = \{\gamma \in \Gamma | x_\gamma \ne 0\}$. $E_{\gamma'} = \{x \in l^p(\Gamma, E) |$ 当 $\gamma \ne \gamma'$ 时, $P_\gamma(x) = 0\}$. 显然对 $\forall \gamma' \in \Gamma, E_{\gamma'}$ 与 E 等距同构. $S_1(E_\gamma)$ 表示 E_γ 的单位球面 $(\forall \gamma \in \Gamma)$.

2 $S_1(l^1(\Gamma, E))$ 间的满等距映射的一些性质

定义 2.1 设 E 为赋范空间, x, y 是 E 中线性相关的非零元, 即 $x = ay$, 若 $\alpha > 0$, 称 x 与 y 正相关, 若 $\alpha < 0$, 称 x 与 y 负相关.

收稿日期: 2004-07-09; **接受日期**: 2005-03-30
基金项目: 安徽省教育厅科研项目 (2002kj068)

引理 2.1 设 E 为赋范空间，x,y 是 E 中线性相关的非零元，则 x 与 y 正 (负) 相关的充要条件是 $\|x-y\|<\|x\|+\|y\|(\|x+y\|<\|x\|+\|y\|)$.

引理 2.2 设 E 为严格凸空间，$x=(x_\gamma)\in l^1(\Gamma,E), y=(y_r)\in l^1(\Gamma,E)$, 则

$$(\text{supp } x)\cap(\text{supp } y)\neq\emptyset\Longleftrightarrow\|x+y\|<\|x\|+\|y\| \text{ 或 } \|x-y\|<\|x\|+\|y\|.$$

证明 "$\Longleftarrow$" 若 $(\text{supp } x)\cap(\text{supp } y)=\emptyset$, 则显然有 $\|x\pm y\|=\|x\|+\|y\|$.

"$\Longrightarrow$" 任取 $\gamma'\in(\text{supp } x)\cap(\text{supp } y)$, 有 $x_{\gamma'}\neq 0, y_{\gamma'}\neq 0$ 若 $x_{\gamma'}$ 与 $y_{\gamma'}$ 是线性无关的，由于 E 是严格凸的，所以有 $\|x_{\gamma'}\pm y_{\gamma'}\|<\|x_{\gamma'}\|+\|y_{\gamma'}\|$, 因此

$$\begin{aligned}\|x\pm y\|&=\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\pm y_\gamma\|=\sum_{\gamma\neq\gamma'}\|x_\gamma\pm y_\gamma\|+\|x_{\gamma'}\pm y_{\gamma'}\|\\&<\sum_{\gamma\neq\gamma'}\|x_\gamma\|+\sum_{\gamma\neq\gamma'}\|y_\gamma\|+\|x_{\gamma'}\|+\|y_{\gamma'}\|\\&=\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|+\sum_{\gamma\in\Gamma}\|y_\gamma\|=\|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

当 $x_{\gamma'}$ 与 $y_{\gamma'}$ 正相关时, 有 $\|x_{\gamma'}-y_{\gamma'}\|<\|x_{\gamma'}\|+\|y_{\gamma'}\|$, 因此有 $\|x-y\|=\sum_{\gamma\neq\gamma'}\|x_\gamma-y_\gamma\|+\|x_{\gamma'}-y_{\gamma'}\|<\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|+\sum_{\gamma\in\Gamma}\|y_\gamma\|=\|x\|+\|y\|$. 当 $x_{\gamma'}$ 与 $y_{\gamma'}$ 负相关时, 同理有 $\|x+y\|<\|x\|+\|y\|$.

引理 2.3 设 E,F 为严格凸空间，T 为 $S_1(l^1(\Gamma,E))$ 到 $S_1(l^1(\Delta,F))$ 上的满等距映射，则对任意 $\delta'\in\Delta$, 任意 $d_{\delta'}\in S_1(F_{\delta'})$, $(\text{supp}T^{-1}(d_{\delta'}))$ 为单点集.

证明 由于 T 为满等距，有 x,$y\in S_1(l^1(\Gamma,E))$. 使得 $x=(x_\gamma)=T^{-1}(d_{\delta'})$, $y=(y_\gamma)=T^{-1}(-d_{\delta'})$. 假设 $(\text{supp } x)$ 为多点集，即存在 γ_1,$\gamma_2\in(\text{supp } x)$, $\gamma_1\neq\gamma_2, x_{\gamma_1}\neq 0, x_{\gamma_2}\neq 0$. 以下记 $\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|}=\frac{P_\gamma(x)}{\|P_\gamma(x)\|}(\forall\gamma\in\text{supp }(x))$. 首先我们断言必有 $\|d_{\delta'}+T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|=2$. 事实上，若 $\gamma_1\overline{\in}(\text{supp } y)$, 又引理 2.2 知,

$$\|d_{\delta'}+T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|=\|\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}-T^{-1}(-d_{\delta'})\|=\|\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|+\|T^{-1}(-d_{\delta'})\|=2.$$

若 $\gamma_1\in(\text{supp } y)$ 则 x_{γ_1} 必与 y_{γ_1} 线性相关，否则，由 x_{γ_1} 与 y_{γ_1} 线性无关，得 $\|x_{\gamma_1}-y_{\gamma_1}\|<\|x_{\gamma_1}\|+\|y_{\gamma_1}\|$, 从而有

$$\begin{aligned}\|T^{-1}(d_{\delta'})-T^{-1}(-d_{\delta'})\|&=\|x-y\|=\sum_{\gamma\neq\gamma_1}\|x_\gamma-y_\gamma\|+\|x_{\gamma_1}-y_{\gamma_1}\|\\&<\sum_{\gamma\neq\gamma_1}(\|x_\gamma\|+\|y_\gamma\|)+\|x_{\gamma_1}\|+\|y_{\gamma_1}\|=\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|+\sum_{\gamma\in\Gamma}\|y_\gamma\|=2.\end{aligned}$$

与 $\|T^{-1}(d_{\delta'})-T^{-1}(-d_{\delta'})\|=\|d_{\delta'}-(-d_{\delta'})\|=2$ 相矛盾.

设 $x_{\gamma_1}=\alpha y_{\gamma_1}$ 则有 $\|x_{\gamma_1}-y_{\gamma_1}\|=|1-\alpha|\cdot\|y_{\gamma_1}\|\leq(1+|\alpha|)\cdot\|y_{\gamma_1}\|=\|x_{\gamma_1}\|+\|y_{\gamma_1}\|$, 从而有

$$\begin{aligned}2&=\|T^{-1}(d_{\delta'})-T^{-1}(-d_{\delta'})\|=\|x-y\|=\sum_{\gamma\neq\gamma_1}\|x_\gamma-y_\gamma\|+\|x_{\gamma_1}-y_{\gamma_1}\|\\&=\sum_{\gamma\neq\gamma_1}\|x_\gamma-y_\gamma\|+|1-\alpha|\cdot\|y_{\gamma_1}\|\leq\sum_{\gamma\neq\gamma_1}\|x_\gamma-y_\gamma\|+(1+|\alpha|)\|y_{\gamma_1}\|\\&\leq\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|+\sum_{\gamma\in\Gamma}\|y_\gamma\|=\|x\|+\|y\|=2.\end{aligned}$$

故上式为等式，得 $|1-\alpha|=1+|\alpha|$, 即 $\alpha<0$. 即 x_{γ_1} 与 y_{γ_1} 负相关. 这样有

$$\begin{aligned}\|d_{\delta'}+T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\| &= \|\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}-T^{-1}(-d_{\delta'})\| \\ &= \|\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}-y\| = \sum_{\gamma\neq\gamma_1}\|y_\gamma\|+\|\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}-y_{\gamma_1}\| = \sum_{\gamma\in\Gamma}\|y_\gamma\|+1=\|y\|+1=2.\end{aligned}$$

同理有 $\|d_{\delta'}+T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})\|=2$, 其次

$$\begin{aligned}\|d_{\delta'}-T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\| &= \|T^{-1}(d_{\delta'})-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\| \\ &= \|x-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\| = \sum_{\gamma\neq\gamma_1}\|x_\gamma\|+\|\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}-x_{\gamma_1}\|<2.\end{aligned}$$

同理有 $\|d_{\delta'}-T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})\|<2$. 由引理 2.2 知,

$$\delta'\in(\text{supp } T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}))\cap(\text{supp } T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})).$$

记 $T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})=(\eta_\delta)$, $T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})=(\xi_\delta)$. 由 $\|d_{\delta'}+T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}}\|)\|=\|d_{\delta'}+T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})\|=2$ 及引理 2.1,2.2 知，$d_{\delta'}$ 与 $\eta_{\delta'}$ 正相关，$d_{\delta'}$ 与 $\xi_{\delta'}$ 正相关, 所以 $\eta_{\delta'}$ 与 $\xi_{\delta'}$ 正相关. 进而 $\|\eta_{\delta'}-\xi_{\delta'}\|<\|\eta_{\delta'}\|+\|\xi_{\delta'}\|$. 故有

$$\begin{aligned}\|T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})-T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})\| &= \sum_{\delta\in\Delta}\|\eta_\delta-\xi_\delta\| \\ &= \sum_{\delta\neq\delta'}\|\eta_\delta-\xi_\delta\|+\|\eta_{\delta'}-\xi_{\delta'}\|<\sum_{\delta\in\Delta}\|\eta_\delta\|+\sum_{\delta\in\Delta}\|\xi_\delta\|=2.\end{aligned}$$

与 $\|T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})-T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})\|=\|\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}-\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|}\|=\|\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|+\|\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|}\|=2(\text{supp }(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\cap\text{supp }(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})=\emptyset)$ 相矛盾. 故 $\gamma_1=\gamma_2$. 同理可证，对 $\forall\gamma\in\Gamma$, $\forall e_\gamma\in S_1(E_\gamma)$, supp $T(e_\gamma)$ 为单点集.

引理 2.4　设 E 和 F 为严格凸空间，T 为 $S_1(l^1(\Gamma,E))$ 到 $S_1(l^1(\Delta,F))$ 上的满等距映射，若 $E(F)$ 为一维空间，则 $F(E)$ 也是一维空间.

证明　设 E 为一维空间，任取 $\delta'\in\Delta$, 由于 F 与 $F_{\delta'}$ 等距同构，只需证 $F_{\delta'}$ 为一维空间，对任意 $d_{\delta'}^{(1)}$, $d_{\delta'}^{(2)}\in S_1(F_{\delta'})$, 只需证 $d_{\delta'}^{(1)}$ 与 $d_{\delta'}^{(2)}$ 线性相关，由引理 2.3 知，supp $T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})$ 与 supp $T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})$ 都是单点集. 记

$$\gamma_1=\text{supp } T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)}),\quad \gamma_2=\text{supp } T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)}),\quad e_{\gamma_1}=T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)}),\quad e_{\gamma_2}=T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)}).$$

若 $\gamma_1=\gamma_2$, 由于 E 是一维的，从而 $e_{\gamma_1}=e_{\gamma_2}$ 或 $e_{\gamma_1}=-e_{\gamma_2}$. 因此 $\|e_{\gamma_1}-e_{\gamma_2}\|=0$ 或 2, 所以,

$$\|d_{\delta'}^{(1)}-d_{\delta'}^{(2)}\|=\|T(e_{\gamma_1})-T(e_{\gamma_2})\|=\|e_{\gamma_1}-e_{\gamma_2}\|=0\ \text{ 或 }\ 2.$$

当 $\|d_{\delta'}^{(1)}-d_{\delta'}^{(2)}\|=0$ 时，$d_{\delta'}^{(1)}=d_{\delta'}^{(2)}$. 当 $\|d_{\delta'}^{(1)}-d_{\delta'}^{(1)}\|=2$ 时，由 F 的严格凸性知，$d_{\delta'}^{(1)}=-d_{\delta'}^{(2)}$. 若 $\gamma_1\neq\gamma_2$, 则

$$\|d_{\delta'}^{(1)}-d_{\delta'}^{(2)}\|=\|e_{\gamma_1}-e_{\gamma_2}\|=2,$$

由 F 的严格凸性知，$d_{\delta'}^{(1)}=-d_{\delta'}^{(2)}$. 总之 $d_{\delta'}^{(1)}$ 与 $d_{\delta'}^{(2)}$ 线性相关. 故 F 为一维空间，同理可证：当 F 为一维空间时，E 也是为一维空间.

引理 2.5 设 E 和 F 为严格凸空间，T 为 $S_1(l^1(\Gamma,E))$ 到 $S_1(l^1(\Delta,F))$ 上的满等距映射，则对任意 $\delta'\in\Delta$, 任意 $d_{\delta'}^{(1)}$,$d_{\delta'}^{(2)}\in S_1(F_{\delta'})$, 有 $\operatorname{supp} d_{\delta'}^{(1)}=\operatorname{supp} d_{\delta'}^{(2)}$.

证明 (一) 若 E 为一维空间，F 也是一维空间，不妨设 $E=F=R^1$, 此时 $d_{\delta'}^{(1)}$ 与 $d_{\delta'}^{(2)}$ 线性相关，即 $d_{\delta'}^{(1)}=d_{\delta'}^{(2)}$ 或 $d_{\delta'}^{(1)}=-d_{\delta'}^{(2)}$, 当 $d_{\delta'}^{(1)}=d_{\delta'}^{(2)}$, 显然 $\operatorname{supp} T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})=\operatorname{supp} T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})$. 当 $d_{\delta'}^{(1)}=-d_{\delta'}^{(2)}$ 时，记

$$\gamma_1=\operatorname{supp} T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)}),\gamma_2=\operatorname{supp} T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)}).$$

$$e_{\gamma_1}=(x_\gamma)\in S_1(l^1(\Gamma,E)),\quad x_\gamma=\begin{cases}1,\gamma=\gamma_1\\0,\gamma\neq\gamma_1\end{cases}$$

$$e_{\gamma_2}=(y_\gamma)\in S_1(l^1(\Gamma,E)),\quad y_\gamma=\begin{cases}1,\gamma=\gamma_2\\0,\gamma\neq\gamma_2\end{cases}$$

则

$$T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})=e_{\gamma_1}\ \text{或}\ -e_{\gamma_1},\quad T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})=e_{\gamma_2}\ \text{或}\ -e_{\gamma_2}.$$

假设 $\gamma_1\neq\gamma_2$. 当 $T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})=e_{\gamma_1},T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})=e_{\gamma_2}$ 时，令

$$x=\alpha e_{\gamma_1}+\beta e_{\gamma_2},\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta=1,$$

得

$$\|x\|=1\ \text{且}\ \|T(x)-d_{\delta'}^{(1)}\|=\|x-T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})\|=\|x-e_{\gamma_1}\|<2,$$
$$\|T(x)-d_{\delta'}^{(2)}\|=\|x-T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})\|=\|x-e_{\gamma_2}\|<2.$$

因此 $\delta'\in\operatorname{supp} T(x)$. 记 $T(x)=(\eta_\delta)$, 则 $d_{\delta'}^{(1)}$ 与 $\eta_{\delta'}$ 正相关，$d_{\delta'}^{(2)}$ 与 $\eta_{\delta'}$ 正相关，从而 $d_{\delta'}^{(1)}$ 与 $d_{\delta'}^{(2)}$ 正相关，与 $d_{\delta'}^{(1)}=-d_{\delta'}^{(2)}$ 相矛盾. 当 $T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})=-e_{\gamma_1},T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})=-e_{\gamma_2}$ 时，令

$$x=\alpha e_{\gamma_1}+\beta e_{\gamma_2},\alpha<0,\beta<0,|\alpha|+|\beta|=1,$$

得

$$\|x\|=1\ \text{且}\ \|T(x)-d_{\delta'}^{(1)}\|=\|x-T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})\|=\|x-(-e_{\gamma_1})\|=\|x+e_{\gamma_1}\|<2,$$
$$\|T(x)-d_{\delta'}^{(2)}\|=\|x-T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})\|=\|x-(-e_{\gamma_2})\|=\|x+e_{\gamma_2}\|<2.$$

故 $\delta'\in T(x)$. 记 $T(x)=(\eta_\delta)$, 则有 $d_{\delta'}^{(1)}$ 与 $\eta_{\delta'}$ 正相关，$d_{\delta'}^{(2)}$ 与 $\eta_{\delta'}$ 正相关，故 $d_{\delta'}^{(1)}$ 与 $d_{\delta'}^{(2)}$ 正相关，与 $d_{\delta'}^{(1)}=-d_{\delta'}^{(2)}$ 相矛盾. 当 $T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})=e_{\gamma_1},T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})=-e_{\gamma_2}$ 时，令 $x=\alpha e_{\gamma_1}+\beta e_{\gamma_2},\alpha>0,\beta<0,|\alpha|+|\beta|=1$. 当 $T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})=-e_{\gamma_1},T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})=e_{\gamma_2}$ 时，令 $x=\alpha e_{\gamma_1}+\beta e_{\gamma_2},\alpha<0,\beta>0,|\alpha|+|\beta|=1$. 不难验证，$d_{\delta'}^{(1)}$ 与 $d_{\delta'}^{(2)}$ 正相关，与 $d_{\delta'}^{(1)}=-d_{\delta'}^{(2)}$ 相矛盾. 以上矛盾说明 $\gamma_1=\gamma_2$.

(二) 若 E 为多维空间，F 也是多维空间，当 $d_{\delta'}^{(1)}$ 与 $d_{\delta'}^{(2)}$ 线性无关时，由 F 的严格凸性知，$\|d_{\delta'}^{(1)}-d_{\delta'}^{(2)}\|<2$, 从而

$$\|T^{-1}d_{\delta'}^{(1)}-T^{-1}d_{\delta'}^{(2)}\|=\|d_{\delta'}^{(1)}-d_{\delta'}^{(2)}\|<2.$$

得

$$\operatorname{supp} T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})\cap\operatorname{supp} T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})\neq\emptyset,$$

由于 $\operatorname{supp} T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})$ 与 $\operatorname{supp} T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})$ 都是单点集，故 $\operatorname{supp} T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})=\operatorname{supp} T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})$.

当 $d_{\delta'}^{(1)}$ 与 $d_{\delta'}^{(2)}$ 线性相关时，由于 F 为多维空间，取 $f_{\delta'}\in S_1(F_{\delta'})$, 使 $f_{\delta'}\neq d_{\delta'}^{(1)}, f_{\delta'}\neq d_{\delta'}^{(2)}$. 则 $f_{\delta'}$ 与 $d_{\delta'}^{(1)}$ 线性无关， $f_{\delta'}$ 与 $d_{\delta'}^{(2)}$ 线性无关. 由于 F 的严格凸性知

$$\|f_{\delta'}-d_{\delta'}^{(1)}\|<2,\quad \|f_{\delta'}-d_{\delta'}^{(2)}\|<2.$$

得

$$\|T^{-1}(f_{\delta'})-T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})\|<2 \ \text{ 及 } \ \|T^{-1}(f_{\delta'})-T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)})\|<2.$$

而 supp $T^{-1}(f_{\delta'})$ 也是单点集. 由引理 2.2 知

$$\text{supp } T^{-1}(d_{\delta'}^{(1)})=\text{supp } T^{-1}(f_{\delta'})=\text{supp } T^{-1}(d_{\delta'}^{(2)}).$$

同理可证，对 $\forall\gamma\in\Gamma, e_\gamma^{(1)}, e_\gamma^{(2)}\in S_1(E_\gamma)$, 有 supp $T(e_\gamma^{(1)})=T(e_\gamma^{(2)})$.

3　$S_1(l^p(\Gamma,E))(p>1,p\neq 2)$ 间的满等距映射的一些性质

引理 3.1　设 E 为内积空间，　$x=(x_\gamma), y=(y_\gamma)\in l^p(\Gamma,E)(p>1,p\neq 2)$, 则有

$$\text{supp } x\cap\text{supp } y\neq\emptyset\Leftrightarrow\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\neq(\|x\|^p+\|y\|^p).$$

证明　略.

引理 3.2　设 X 和 Y 为严格凸空间，T 为 $S_1(X)$ 到 $S_1(Y)$ 上的等距, 则对任意 $x\in S_1(X)$, 有 $T(-x)=-T(x)$.

证明　因 $\|T(-x)\|=\|T(x)\|=\|x\|=1$, 且 $\|T(-x)-T(x)\|=\|-x-x\|=2$. 由 Y 的严格凸性知 $T(-x)=-T(x)$.

引理 3.3　设 E, F 为内积空间，　T 为 $S_1(l^p(\Gamma,E))$ 到 $S_1(l^p(\Delta,F))$ 上的满等距映射 $(p>1,p\neq 2)$. 则对任意 $\delta'\in\Delta, d_{\delta'}\in S_1(F_{\delta'})$, supp $T^{-1}(d_{\delta'})$ 为单点集.

证明　假设 supp $T^{-1}(d_{\delta'})$ 为 Γ 中的多点集，记 $x=(x_\gamma)=T^{-1}(d_{\delta'})$. 则存在 $\gamma_1,\gamma_2\in$ supp $x, \gamma_1\neq\gamma_2$, 以下用 $\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|}$ 表示 $\frac{P_\gamma(x)}{\|P_\gamma(x)\|}$, 因为 $\|d_{\delta'}-T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|=\|T(x)-T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|=\|x-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|$, 由于 $l^p(\Gamma,E)$, $l^p(\Delta,F)$ 为严格凸空间，因此,

$$\begin{aligned}\|d_{\delta'}+T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|&=\|T(x)+T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|=\|T(x)-T(-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|\\&=\|x-(-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|=\|x+(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|.\end{aligned}$$

又因为 supp $x\cap$ supp $\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}=\gamma_1$, 因此

$$\|x+\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^p+\|x-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^p\neq 2(\|x\|^p+\|\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^p)=4,$$

从而

$$\|d_{\delta'}+T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|^p+\|d_{\delta'}-T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|^p\neq 4=2(\|d_{\delta'}\|^p+\|T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^p).$$

得 supp $d_{\delta'}\cap$ supp $T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\neq\emptyset$, 即 $\delta'\in$ supp $T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})$. 同理有 $\delta'\in$ supp $T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})$. 得

$$\|T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})+T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})\|^p+\|T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})-T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})\|^p\neq 4.$$

另一方面，由 $\mathrm{supp}(x_{\gamma_1})\cap\mathrm{supp}(x_{\gamma_2})=\emptyset$ 得

$$\begin{aligned}&\|T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})+T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})\|^{\ p}+\|T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})-T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})\|^{\ p}\\&=\|\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}+\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|}\|^{\ p}=\|\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}-\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|}\|^{\ p}=4.\end{aligned}$$

以上矛盾说明： $\gamma_1=\gamma_2$. 即 $\mathrm{supp}\ T^{-1}(d_{\delta'})=\mathrm{supp}\ (x)$ 为单点集.

引理 3.4 在引理 3.3 的条件下, 对任意 $\delta\in\Delta$, 及任意 $d_\delta^{(1)}$ 、$d_\delta^{(2)}\in S_1(F_\delta)$, 有 $\mathrm{supp}\ T^{-1}(d_\delta^{(1)})=\mathrm{supp}\ T^{-1}(d_\delta^{(2)})$.

证明 由引理 3.3 知， $\mathrm{supp}\ T^{-1}(d_\delta^{(1)})$ 和 $\mathrm{supp}\ T^{-1}(d_\delta^{(2)})$ 都是 Γ 中的单点集. 由于

$$\begin{aligned}&\|T^{-1}(d_\delta^{(1)})+T^{-1}(d_\delta^{(2)})\|^{\ p}+\|T^{-1}(d_\delta^{(1)})-T^{-1}(d_\delta^{(2)})\|^{\ p}=\|d_\delta^{(1)}+d_\delta^{(2)}\|^{\ p}+\|d_\delta^{(1)}-d_\delta^{(2)}\|^p\\&\neq 2(\|d_\delta^{(1)}\|^{\ p}+\|d_\delta^{(2)}\|^{\ p})=2(\|T^{-1}(d_\delta^{(1)})\|^{\ p}+\|T^{-1}(d_\delta^{(2)})\|^{\ p}).\end{aligned}$$

故 $\mathrm{supp}\ T^{-1}(d_\delta^{(1)})\cap\mathrm{supp}\ T^{-1}(d_\delta^{(2)})\neq\emptyset$, 即得， $\mathrm{supp}\ T^{-1}(d_\delta^{(1)})=\mathrm{supp}\ T^{-1}(d_\delta^{(2)})$.

4 主要结论

设 E 和 F 为内积空间， $p\geq 1,p\neq 2$. T 为 $S_1(l^p(\Gamma,E))$ 到 $S_1(l^p(\Delta,F))$ 上的满等距映射，由引理 2.5 及引理 3.4 知，对 $\forall\delta\in\Delta$, 存在唯一的 $\gamma\in\Gamma$ 使得对任意 $d_\delta\in S_1(F_\delta)$ 有 $T^{-1}(d_\delta)\in S_1(E_\gamma)$. 令 $\sigma:\Gamma\to\Delta$ 满足：任意 $\gamma\in\Gamma$ 及 $e_\gamma\in S_1(E_\gamma)$ 有 $T(e_\gamma)\in S_1(F_\delta)$, 则 $\delta=\sigma(\gamma),\gamma\in\Gamma$, 为 Γ 到 Δ 上的 “ 1 — 1 ” 对应且满映射. 下面给出实空间的单位球面 $S_1(l^p(\Gamma,E))$ 到 $S_1(l^p(\Delta,F))$ 上的满等距映射的表现定理：

定理 4.1 在实空间情形，设 E,F 为内积空间. T 为 $S_1(l^p(\Gamma,E))$ 到 $S_1(l^p(\Delta,F))$ 上的满等距映射. 则对任意 $x\in S_1(l^p(\Gamma,E))$ 有 $T(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|\cdot T(\frac{P_\gamma(x)}{\|P_\gamma(x)\|})$, 其中 $x=(x_\gamma)\in S_1(l^p(\Gamma,E))$, 当 $\gamma\overline{\in}(\mathrm{supp}\ x)$ 时，规定 $T(\frac{P_\gamma(x)}{\|P_\gamma(x)\|})=0.p\geq 1,p\neq 2$.

证明 对任意 $x\in(x_\gamma)\in S_1(l^p(\Gamma,E))$, 记 $T(x)=(\eta_\delta)$, 为简洁，以下用 x_γ 表示 $p_\gamma(x),\eta_\delta$ 表示 $P_\delta(T(x)),\sum_{\delta\in\Delta}\eta_\delta=(\eta_{\ \delta})$, 对 $\forall\gamma_1\in\mathrm{supp}\ x$,

$$\begin{aligned}\|T(x)-T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|^{\ p}&=\|\sum_{\delta\in\Delta}\eta_\delta-T(\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|})\|^p=\|\sum_{\delta\in\Delta}\eta_{\ \delta}-d_{\sigma(\gamma_1)}\|^p\\&=\|\sum_{\gamma\in\Gamma}\eta_{\sigma(\gamma)}-d_{\sigma(\gamma_1)}\|^{\ p}=\|\sum_{\gamma\neq\gamma_1}\eta_{\sigma(\gamma)}+(\eta_{\sigma(\gamma_1)}-d_{\sigma(\gamma_1)})\|^{\ p}\\&=\sum_{\gamma\neq\gamma_1}\|\eta_{\sigma(\gamma)}\|^{\ p}+\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}-d_{\sigma(\gamma_1)}\|^{\ p}\\&=1-\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|^p+\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}-d_{\sigma(\gamma_1)})\|^{\ p},\end{aligned}$$

其中 $d_\sigma(\gamma_1)=T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})$.

另一方面

$$\|x-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^{\ p}=\sum_{\gamma\neq\gamma_1}\|x_\gamma\|^{\ p}+\|x_{\gamma_1}-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^{\ p}=1-\|x_{\gamma_1}\|^{\ p}+\|x_{\gamma_1}-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^{\ p}.$$

故

$$\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}-d_{\sigma(\gamma_1)}\|^{\ p}-\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|^{\ p}=\|x_{\gamma_1}-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^{\ p}-\|x_{\gamma_1}\|^{\ p}.$$

又 F 是严格凸的，由引理 2.5 及 3.4 可推出： $T(-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})=-T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})$,

$$T(-\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})=-T(\frac{x_{\gamma_2}}{\|x_{\gamma_2}\|})\ \ (\|T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})-T(-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|=\|\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}+\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|=2)$$

因此有 $\|T(x)+T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|^{\ p}=\|T(x)-T(-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})\|^{\ p}=\|x+\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^{\ p}$. 即得

$$\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}+d_{\sigma(\gamma_1)}\|^{\ p}-\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|^{\ p}=\|x_{\gamma_1}+\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^{\ p}-\|x_{\gamma_1}\|^{\ p}.$$

当 $p=1$ 时，有 $\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}+d_{\sigma(\gamma_1)}\|=\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|+(1+\|x_{\gamma_1}\|)-\|x_{\gamma_1}\|=\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|+1$ 得 $\eta_{\sigma(\gamma_1)}$ 与 $d_{\sigma(\gamma_1)}$ 正相关，进而有 $\eta_{\sigma(\gamma_1)}=\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|d_{\sigma(\gamma_1)}$, 由 $\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}-d_{\sigma(\gamma_1)}\|-\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|=\|x_{\gamma_1}-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|-\|x_{\gamma_1}\|$ 得 $1-2\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|=1-2\|x_{\gamma_1}\|$, 即 $\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|=\|x_{\gamma_1}\|$, 这样就得到 $\eta_{\sigma(\gamma_1)}=\|x_{\gamma_1}\|d_{\sigma(\gamma_1)}=\|x_{\gamma_1}\|T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})$ $(\forall\gamma_1\in\operatorname{supp}\ (x))$.

当 $p>1$ 时， $(1+\|x_{\gamma_1}\|)^p-\|x_{\gamma_1}\|^p=\|x_{\gamma_1}+\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^{\ p}-\|x_{\gamma_1}\|^p=\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}+d_{\sigma(\gamma_1)}\|^{\ p}-\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|^{\ p}\le(1+\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|)^p-\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|^{\ p}$. 由此得 $\|x_{\gamma_1}\|\le\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|$ $((1+t)^p-t^p(t\ge0)$ 为递增函数). 由 $\gamma_1\in\operatorname{supp}\ x$ 的任意性，进而有 $1=\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|^{\ p}\le\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}\|\eta_{\sigma(\gamma)}\|^{\ p}=1$, 得 $\|x_{\gamma_1}\|=\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|(\forall\gamma_1\in\Gamma)$. 这样就得 $\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}+d_{\sigma(\gamma_1)}\|=\|x_{\gamma_1}+\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|$, $\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}-d_{\sigma(\gamma_1)}\|=\|x_{\gamma_1}-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|$. 由于 F 为内积空间，故内积：

$$\begin{aligned}
&\langle\frac{\eta_{\sigma(\gamma_1)}}{\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|}-d_{\sigma(\gamma_1)},\frac{\eta_{\sigma(\gamma_1)}}{\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|}-d_{\sigma(\gamma_1)}\rangle=2-2\langle\frac{\eta_{\sigma(\gamma_1)}}{\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|},d_{\sigma(\gamma_1)}\rangle\\
&=2-\frac{1}{2\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|}(\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}+d_{\sigma(\gamma_1)}\|^2-\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}-d_{\sigma(\gamma_1)}\|^2)\\
&=2-\frac{1}{2\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|}(\|x_{\gamma_1}+\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^{\ 2}-\|x_{\gamma_1}-\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|}\|^{\ 2})\\
&=2-\frac{1}{2\|x_{\gamma_1}\|}[(1+\|x_{\gamma_1}\|)^2-(1-\|x_{\gamma_1}\|)^2]=2-2=0,
\end{aligned}$$

从而 $\frac{\eta_{\sigma(\gamma_1)}}{\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|}-d_{\sigma(\gamma_1)}=0$, 即 $\eta_{\sigma(\gamma_1)}=\|\eta_{\sigma(\gamma_1)}\|d_{\sigma(\gamma_1)}=\|x_{\gamma_1}\|T(\frac{x_{\gamma_1}}{\|x_{\gamma_1}\|})(\forall\gamma_1\in\operatorname{supp}\ x)$.

定理 4.2　在实空间情形，设 E, F 为内积空间， T 为 $S_1(l^p(\Gamma,E))$ 到 $S_1(l^p(\Delta,F))$ 上的满等距映射 $(p\ge1)$. 那么， T 必为可延拓为 $l^p(\Gamma,E)$ 到 $l^p(\Delta,F)$ 上的一个实线性等距算子.

证明　当 $p=2$ 时， $l^2(\Gamma,E)$ 和 $l^2(\Delta,F)$ 都是内积空间，结果已由 [3] 证得. 下面证 $p>1,p\ne2$ 的情形. 对 $\forall x\in l^p(\Gamma,E)$ 令 $V(x)=\begin{cases}\|x\|T(\frac{x}{\|x\|}),x\ne0\\0,x=0.\end{cases}$ 显然 V 为 T 的延拓. 下面证明 V 亦为等距算子.

对任意非零元 $\mu,\omega\in l^p(\Gamma,E)$, 记 $\frac{\mu}{\|\mu\|}=x=(x_\gamma)$, $\frac{\omega}{\|\omega\|}=y=(y_\gamma)$. 则 $V(x)=T(x),V(y)=T(y)$. 内积：

$$\begin{aligned}
\langle T(\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|}),T(\frac{y_\gamma}{\|y_\gamma\|})\rangle&=\frac14[\|T(\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|})+T(\frac{y_\gamma}{\|y_\gamma\|})\|^{\ 2}-\|T(\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|})-T(\frac{y_\gamma}{\|y_\gamma\|})\|^{\ 2}]\\
&=\frac14[\|\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|}+\frac{y_\gamma}{\|y_\gamma\|}\|^{\ 2}-\|\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|}-\frac{y_\gamma}{\|y_\gamma\|}\|^{\ 2}]\\
&=\langle\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|},\frac{y_\gamma}{\|y_\gamma\|}\rangle.
\end{aligned}$$

注 当 x_γ 或 y_γ 为 0 时，规定 $T(\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|})=0, \frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|}=0$, 或 $T(\frac{y_\gamma}{\|y_\gamma\|})=0, \frac{y_\gamma}{\|y_\gamma\|}=0$).

由上式不难验证

$$\| \|\mu\|\cdot\|x_\gamma\|\cdot T(\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|})-\|\omega\|\cdot\|y_\gamma\|\cdot T(\frac{y_\gamma}{\|y_\gamma\|})\| = \| \|\mu\|x_\gamma-\|\omega\|y_\gamma\|.$$

故有

$$\begin{aligned}
\|V(\mu)-V(\omega)\|^{\ p} &= \| \|\mu\|T(\frac{\mu}{\|\mu\|})-\|\omega\|T(\frac{\omega}{\|\omega\|})\|^{\ p}\\
&= \| \|\mu\|\cdot\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|\cdot T(\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|})-\|\omega\|\cdot\sum_{\gamma\in\Gamma}\|y_\gamma\|T(\frac{y_\gamma}{\|y_\gamma\|})\|^{\ p}\\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma}\| \|\mu\|\cdot\|x_\gamma\|\cdot T(\frac{x_\gamma}{\|x_\gamma\|})-\|\omega\|\cdot\|y_\gamma\|T(\frac{y_\gamma}{\|y_\gamma\|})\|^{\ p}\\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma}\| \|\mu\|x_\gamma-\|\omega\|y_\gamma\|^{\ p}\\
&= \| \|\mu\|x-\|\omega\|y\|^{\ p}=\|\mu-\omega\|^{\ p}.
\end{aligned}$$

得 $\|V(\mu)-V(\omega)\|=\|\mu-\omega\|$.

上式说明 V 为空间 $l^p(\Gamma,E)$ 到 $l^p(\Delta,F)$ 上的一个满等距算子. 因此，从 Mazur-Ulam 定理 [4] 可知， V 必为一个实线性等距算子.

参考文献:

[1] 定光桂. 空间 $l^p(\Gamma)(p>1)$ 的单位球面间等距算子的延拓 [J]. 中国科学， 2002, **32**(11): 991–995.
DING Guang-gui. *The isometric extension problem in the spheres of* $l^p(\Gamma)(p>1)$ *type spaces* [J]. Sci. China, 2002, **32**(11): 991–995. (in Chinese)

[2] TINGLEY D. *Isometries of the unit sphere* [J]. Geometric Dedicata, 1987, **22**: 371–378.

[3] DING Guang-gui. *The 1-Lipschitz mapping between the unit spheres of two Hilbert spaces can be extended to a real linear isometry of the whole space* [J]. Sci. China Ser. A, 2002, **45**: 479–483.

[4] DAY M M. *Normed Linear Space* [M]. Third edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

On the Representation and Extension of Isometries between the Unit Spheres of $l^p(\Gamma,E)$ Type Spaces

FANG Xi-nian[1], *WANG Jian-hua*[2]

(1. Dept. of Appl. Math., Nanjing Audit University, Jiangsu 210029, China;
2. Dept. of Math., Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: This paper gives a representation of surjective isometries between the unit speres of $l^p(\Gamma,E)$ type real spaces (where $p>1, p\neq 2$, E be inner space), and proves that these isometries can be extended to be real linear isometries on the whole space.

Key words: isometry; $l^p(\Gamma,E)$ space; extention of isometry.