文章编号: 1000-341X(2006)03-0539-08 **文献标识码**: **A**

全空间中带时滞的反应扩散方程组

田灿荣 [1,2]
(1. 扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州 225002; 2. 盐城工学院基础部, 江苏 盐城 224003)
(E-mail: unfoxeses@yahoo.com.cn)

摘 要: 文应用上下解的方法以及单调迭代序列的积分表达式, 证明了在半空间 $\mathbf{R}^n$ 中耦合的时滞反应扩散方程组全局解的存在唯一性, 并且用它解决了一类特殊的 Volterra-Lotka 模型的解的存在性问题.

关键词: 反应扩散方程组; 时滞; 上下解; Volterra-Lotka 竞争模型.
MSC(2000): 35K57, 35B35
中图分类: O175.26

1 引 言

近年来带时滞的反应扩散方程组的研究很受重视, 文献 [1,2,3] 讨论了有界域内带时滞的反应扩散方程组, [4] 讨论了半空间内带时滞的反映反应扩散方程组, 本文考虑的是全空间 $\mathbf{R}^n$ 上带时滞的反应扩散方程组. 为了方便起见, 我们先定义一些记号.

$$D_T=(0,T]\times\mathbf{R}^n,\quad I_i=[-\gamma_i,0]$$

$$Q_0^i=I_i\times\mathbf{R}^n,\quad Q_T^{(i)}=(-\gamma_i,T]\times\mathbf{R}^n,\quad Q_T=Q_T^{(1)}\times\cdots\times\cdots Q_T^{(n)}.$$

考虑如下形式的方程组

$$\begin{cases} u_{it}-d_i\Delta u_i=f_i(t,x,u,J*u), & (t,x)\in D_T,\\ u_i(t,x)=\eta_i(t,x), & (t,x)\in Q_0^{(i)}, \end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $u=(u_1,\cdots,u_N), J*u=(J_1*u_1,\cdots,J_N*u_N)$. D_i 为常数,

$$(J_i*u_i)(t,x)\equiv\int_{t-\tau_i}^{t}J_i(t-s,x)u_i(s,x)\mathrm{d}s\quad(t=1\cdots N)\tag{1.2}$$

具有形式 (1.2) 的时滞一般称为连续时滞, τ_i 是表示时滞的正常数, 而且 $J_i(s,x)$ 关于 s 连续, $J_i(s,x)\geq 0$. $\int_0^{\tau_i}J_i(s,x)\mathrm{d}s=1(x\in\mathbf{R})$. 当然 τ_i 可以取到 ∞. 另外离散时滞可以写成下列形式

$$(J_i*u_i)(t,x)\equiv u(t-\tau_i,x)\quad(t=1\cdots N).\tag{1.3}$$

本文的结论对连续时滞或离散时滞均适用.

收稿日期: 2004-03-31
基金项目: 国家自然科学基金 (10171088)

本文的主要目的是应用类似于 [4] 的方法证明 (1.1) 解的存在唯一性. 具体安排如下: §2 主要定理, §3 主要定理的证明, §4 具体的应用.

2 主要结果

在本文中, 记 $C^m(Q)$ 为 Q 上 m 次连续可微函数类, $C^{1,2}(D_T)$ 为在 D_T 上对于 t 是 1 次连续可微, 对于 x 是 2 次连续可微的函数类, 上述类型的有 N 个分量的向量函数类则分别记为 $C^m(Q), C^{1,2}(D_T)$. 对于向量 $w\in \mathbf{R}^N$, 记 $|w|=|w_1|+\cdots+|w_N|$. 我们假设 $f_i(t,x,\cdot)(i=1,\cdots,N)$ 在 $\bar{D_T}$ 内 Hölder 连续, $g_i(t,x,\cdot)$ 在 S_T 内 Hölder 连续, 我们还要假设 $f_i(\cdot,u,v), g_i(\cdot,u)$ 满足下列条件 (H).

(H_1) 对于每个 $i=1,\cdots,N$ 存在常数 $K_i, {K_i}'$, 任意的 $(u,u')\in S,(v,v')\in S^*$, 下列不等式成立

$$|f_i(t,x,u,v)-f_i(t,x,u',v')|\le K_i(|u-u'|+|v-v'|), \tag{2.1}$$

我们也称 $f(t,x,\cdots)$ 在 $S\times S^*$ 内 Lipschitz 连续.

(H_2) 存在 $w*\in S, J*W^*\in S^*$, 有正常数 A_i,γ_i, 其中 $\gamma_i<\frac{1}{4D_iT}$, 当 $|x|\longrightarrow\infty$ 时, 下列成立

$$f_i(t,x,w*,J*W*)|\le A_i\exp(\gamma_i|x|^2) \quad (0\le t\le T). \tag{2.2}$$

(H_3) 在 $S\times S^*$ 内, 函数 $f(\cdot,u,v)\equiv(f_1(\cdot,u,v),\cdots,f_N(\cdot,u,v))$ 是混拟单调的.

以上 (H) 中的 S,S^* 均为 $\mathbf{R}^N$ 的子集, 是通过下面定义 2.1 的耦合上下解给出的. 我们回顾一下函数 $f_i(\cdot,u,v)$ 混拟单调的意义, 就是说 $f_i(\cdot,u,v)$ 对于所有的分量 $u_i,v_i(i=1,\cdots,N)$ 除去 u_i 以外, $f_i(\cdot,u,v)$ 对于每个单独的分量都是单调的. 于是存在非负整数 a_i,b_i,c_i,d_i, $a_i+b_i=N-1, c_i+d_i=N$. $f_i(\cdot,u,v)$ 可以写成下列分裂形式

$$f_i(\cdot,u,v)\equiv f_i(\cdot,u_i,[u]_{a_i},[u]_{b_i},[v]_{c_i},[v]_{d_i})$$

对于分量 $[u]_{a_i},[v]_{c_i}, f_i(\cdot,u,v)$ 是单增的, 对于分量 $[u]_{b_i},[v]_{d_i}, f_i(\cdot,u,v)$ 是单减的. 其中 $u\equiv(u_i,[u]_{a_i},[u]_{b_i}), v\equiv(v_i,[v]_{c_i},[v]_{d_i})$. 特别的, 如果 $b_i=d_i=0$, 我们说 $f_i(\cdot,u,v)$ 是拟单增的. 同样 $g_i(\cdot,u)$ 可以写成下列分裂形式

$$g_i(\cdot,u)\equiv g_i(\cdot,u_i,[u]_{e_i},[u]_{f_i}),$$

其中 $e_i+f_i=N-1$, 对于分量 $[u]_{e_i}, g_i(\cdot,u)$ 是单增的. 对于分量 $[u]_{f_i}, g_i(\cdot,u)$ 是单减的.

定义 2.1 一对 $C(\bar{Q_T}\cap C^{1,2}(Q_T)$ 上的向量函数 $\tilde{u}\equiv(\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_N), \hat{u}\equiv(\hat{u}_1,\cdots,\hat{u}_N)$ 称为 (1.1) 的耦合上下解, 如果 $\tilde{u}\ge\hat{u}$, 而且对于每个 $i=1,\cdots,N$. 满足下列条件 (2.3),(2.4)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial t}-D_i\Delta\tilde{u}_i\ge f_i(t,x,\tilde{u}_i,[\tilde{u}]_{a_i},[\hat{u}]_{b_i},[J*\tilde{u}]c_i,[J*\hat{u}]d_i). \quad (t,x)\in D_T\\
&\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial t}-D_i\Delta\tilde{u}_i\le f_i(t,x,\hat{u}_i,[\hat{u}]_{a_i},[\tilde{u}]_{b_i},[J*\hat{u}]c_i,[J*\tilde{u}]d_i). \quad (t,x)\in D_T\\
&\tilde{u_i}(t,x)\ge\eta_i(t,x)\ge\hat{u_i}(t,x),(t,x)\in Q_0^{(i)}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

存在正常数 A_i,γ_i. 其中 $\gamma_i<\frac{1}{4D_iT}$. 当 $|x|\to\infty$ 时, 下列成立

$$|\tilde{u_i}(t,x)|\le A_i\exp(\gamma_i|x|^2), \quad |\hat{u_i}(t,x)|\le A_i\exp(\gamma_i|x|^2) \quad (0\le t\le T) \tag{2.4}$$

对于一对给定的耦合上下解 $\tilde{u}, \hat{u}$. 我们可以定义条件 (H) 中的集合 $S, S*$

$$S = \{u \in C((\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T); \hat{u} \le u \le \tilde{u}\}$$

$$S^* = \{v \in C(\overline{Q_T}) \cap C^{1,2}(Q_T); J * \hat{u} \le v \le J * \tilde{u}\}. \tag{2.5}$$

由 $J(t,x)$ 的性质可以看出，当 $u \in S$ 时， $J * u \in S^*$. 为了证明 (1.1) 解的存在性，定义如下算子

$$L_i u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} - D_i \Delta u_i + K_i u_i,$$

$$F_i(t,x,u,J*u) = K_i u_i + f_i(t,x,u,J*u) \quad (i = 1, \cdots, N). \tag{2.6}$$

于是方程组 (1.1) 等价于下列方程组

$$\begin{cases} L_i u_i = F_i(t,x,u_i,[u]_{a_i},[u]_{b_i},[J*u]_{c_i},[J*u]_{d_i}), & (t,x) \in D_T, \\ u_i(t,x) = \eta_i(t,x), & (t,x) \in Q_0^{(i)}, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中 K_i, K_i' 是 (2.1) 中的 Lipchitz 常数. 用 $\bar{u}^{(0)} = \tilde{u}, \underline{u}^{(0)} = \hat{u}$ 作为初始值，可以构造满足下列线性迭代过程的序列 $\{\bar{u}^{(k)}\} = \{\bar{u}_1^{(k)}, \cdots, \bar{u}_N^{(k)}\}, \{\underline{u}^{(k)}\} = \{\underline{u}_1^{(k)}, \cdots, \underline{u}_N^{(k)}\}$.

$$\begin{array}{ll} L_i \bar{u}_i^{(k)} = F_i(t,x,\bar{u_i}^{(k-1)},[\bar{u}^{(k-1)}]_{a_i},[\underline{u}^{(k-1)}]_{b_i},[J*\bar{u}^{(k-1)}]_{c_i},[J*\underline{u}^{(k-1)}]_{d_i}) & (t,x) \in D_T, \\ L_i \underline{u}_i^{(k)} = F_i(t,x,\underline{u_i}^{(k-1)},[\underline{u}^{(k-1)}]_{a_i},[\bar{u}^{(k-1)}]_{b_i},[J*\underline{u}^{(k-1)}]_{c_i},[J*\bar{u}^{(k-1)}]_{d_i}) & (t,x) \in D_T, \\ \bar{u}_i^{(k)}(t,x) = \underline{u}_i^{(k)}(t,x) = \eta_i(t,x) & (t,x) \in Q_0^{(i)}. \end{array} \tag{2.8}$$

主要结果由下面的定理给出.

定理 2.1 假设 (H) 成立，如果 $\tilde{u}, \hat{u}$ 是 (1.1) 的一对耦合上下解，存在非负常数 c^*, 使得

$$\lim_{|x|\to\infty} |\tilde{u}(t,x) - \hat{u}(t,x)| \le c^* \quad (0 \le t \le T) \tag{2.9}$$

成立. 那么 (1.1) 存在唯一的解 $u^* \in S$. 而且以 $\bar{u}^{(0)} = \tilde{u}, \underline{u}^{(0)} = \hat{u}$ 为初始值，由 (2.7) 所构造的迭代序列 $\{\bar{u}^{(k)}\}, \{\underline{u}^{(k)}\}$ 单调收敛到 u^*. 对于每个 $k = 1, 2, \cdot, \{\bar{u}^{(k)}\}, \{\underline{u}^{(k)}\}$ 满足下列单调关系

$$\hat{u} \le \underline{u}^{(k)} \le \underline{u}^{(k+1)} \le u^* \le \bar{u}^{(k+1)} \le \bar{u}^{(k)} \le \tilde{u} \quad (t,x) \in \bar{Q}_T. \tag{2.10}$$

在定理 2.1 中，如果 $\tilde{u}, \hat{u}$ 是有界的耦合上下解，那么条件 (2.3),(2.9) 自然成立. 特别的，如果存在常向量 $M = (M_1, \cdots, M_N) \ge 0$ 使得下列成立

$$f_i(t,x,M_i,[M]_{a_i},[0]_{b_i},[J*M]_{c_i},[0]_{d_i}) \le 0, \quad f_i(t,x,0,[0]_{a_i},[M]_{b_i},[0]_{c_i},[J*M]_{d_i}) \ge 0. \tag{2.11}$$

当 (1.1) 的初值 $\eta_i(t,x) \in [0,M]$ 时， $\tilde{u} = M, \hat{u} = 0$ 是 (1.1) 的一对耦合上下解. 于是得出定理的一个推论.

推论 2.2 设假设 (H) 成立，如果条件 (2.11) 成立，那么对于 (1.1) 的初值 $\eta \in [0,M]$,(1.1) 存在唯一有界解 u^*, 而且 u^* 满足 (2.10).

注 2.3 当 $D_i=0$((1.1) 退化为常微系统) 时, 定理 2.1 的结论仍然适用. 当 $f_i(t,x,u,J*u)\equiv f_i(t,x,u)$ 时，即对于所有的 $i(i=1,\cdots,N), f_i(t,x,u)$ 与时滞项 $J*u$ 无关， (1.1) 退化为无时滞的耦合抛物系统，定理 2.1 的结论也适用.

3 定理的证明

在证明定理 2.1 之前，我们先要证明序列 $\{\bar{u}^{(k)}\},\{\underline{u}^{(k)}\}$ 是合适定义的，并且有下列性质

$$\hat{u}\le \underline{u}^{(k)}\le \underline{u}^{(k+1)}\le \bar{u}^{(k+1)}\le \bar{u}^{(k)}\le \tilde{u}\quad (t,x)\in \bar{Q}_T. \tag{3.1}$$

为了方便起见，对于 $C(\bar{Q_T})$ 中的向量函数 $\bar{w}=(\bar{w_1},\cdot,\bar{w_N}),\underline{w}=(\underline{w_1},\cdot,\underline{w_N})$. 记

$$F_i(\bar{w},\underline{w})\equiv F_i(\cdot,\bar{w_i},[\bar{w}]_{a_i},[\underline{w}]_{b_i},[J*\bar{w}]_{c_i},[J*\underline{w}]_{d_i}),$$

$$F_i(\underline{w},\bar{w})\equiv F_i(\cdot,\underline{w_i},[\underline{w}]_{a_i},[\bar{w}]_{b_i},[J*\underline{w}]_{c_i},[J*\bar{w}]_{d_i}). \tag{3.2}$$

引理 3.1 对于 (2.8) 所构造的迭代序列 $\{\bar{u}^{(k)}\},\{\underline{u}^{(k)}\}$. 如果 $\hat{u}\le \underline{u}^{(k)}\le \underline{u}^{(k+1)}\le \bar{u}^{(k+1)}\le \bar{u}^{(k)}\le \tilde{u}$, 那么下列成立.

$$F(\bar{u}^{(k)},\underline{u}^{(k)})\ge F(\bar{u}^{(k+1)},\underline{u}^{(k+1)})\ge F(\underline{u}^{(k+1)},\bar{u}^{(k+1)})\ge F(\underline{u}^{(k)},\bar{u}^{(k)}). \tag{3.3}$$

证明 由 (2.6) 以及假设 (H) 得

$$\begin{aligned}
&F_i(\bar{u}^{(k)},\underline{u}^{(k)})-F_i(\bar{u}^{(k+1)},\underline{u}^{(k+1)})\\
&\quad=K_i(\bar{u}^{(k)}-\bar{u}^{(k+1)})+[f_i(\cdot,\bar{u_i}^{(k)},[\bar{u}^{(k)}]_{a_i},[\underline{u}^{(k)}]_{b_i},[J*\bar{u}^{(k)}]_{c_i},[J*\underline{u}^{(k)}]_{d_i})-\\
&\quad\ [f_i(\cdot,\bar{u_i}^{(k+1)},[\bar{u}^{(k+1)}]_{a_i},[\underline{u}^{(k+1)}]_{b_i},[J*\bar{u}^{(k+1)}]_{c_i},[J*\underline{u}^{(k+1)}]_{d_i})]\\
&\quad\ge K_i(\bar{u}^{(k)}-\bar{u}^{(k+1)})+[f_i(\cdot,\bar{u_i}^{(k)},[\bar{u}^{(k)}]_{a_i},[\underline{u}^{(k)}]_{b_i},[J*\bar{u}^{(k)}]_{c_i},[J*\underline{u}^{(k)}]_{d_i})-\\
&\quad\ [f_i(\cdot,\bar{u_i}^{(k+1)},[\bar{u}^{(k)}]_{a_i},[\underline{u}^{(k)}]_{b_i},[J*\bar{u}^{(k)}]_{c_i},[J*\underline{u}^{(k)}]_{d_i})]\\
&\quad\ge K_i(\bar{u}^{(k)}-\bar{u}^{(k+1)})-K_i(\bar{u}^{(k)}-\bar{u}^{(k+1)})=0,
\end{aligned}$$

即 $F_i(\bar{u}^{(k)},\underline{u}^{(k)})\ge F_i(\bar{u}^{(k+1)},\underline{u}^{(k+1)})$. 用类似的方法 (3.3) 得证.

引理 3.2 由 (2.8) 所构造的迭代序列 $\{\bar{u}^{(k)}\},\{\underline{u}^{(k)}\}$ 是合适定义的， $\bar{u}^{(k)},\underline{u}^{(k)}$ 是 (1.1) 的耦合上下解，而且满足 (3.1).

证明 1^0. 由假设 (H) 以及 (2.4)(2.7), 任取 $\bar{w},\underline{w}\in S$, 存在常数 A_i',γ_i', 当 $|x|\to\infty$ 时，下列成立.

$$F_i(\bar{w},\underline{w})\le |F_i(\bar{w},\underline{w})-F_i(w^*,J*w^*)|+|F_i(w^*,J*w^*)|\le A_i'\exp(\gamma_i'|x|^2),$$

$F_i(\bar{w},\underline{w})$ 在 Q_T 也有局部 Hölder 连续性. 类似的， $F_i(\underline{w},\bar{w})$ 在 Q_T 局部 Hölder 连续. 根据 [5], 就推导出如果 $\bar{u}^{(k-1)},\underline{u}^{(k-1)}\in S$, (2.8) 的解 $\bar{u}_i^{(k)},\underline{u_i}^{(k)}$ 唯一存在. 而且当 $|x|\to\infty$ 时，存在正常数 A_i'',γ_i'', 使得下列成立.

$$|\bar{u}_i^{(k)}|\le A_i''\exp(\gamma_i''|x|^2),\quad |\underline{u_i}^{(k)}|\le A_i"\exp(\gamma_i''|x|^2). \tag{3.4}$$

特别的，取 $\bar{w}=\tilde{u},\underline{w}=\hat{u}.\bar{u}^{(1)}$ 和 $\underline{u}^{(1)}$ 存在而且有类似于 (3.4) 的增长条件限制.

2^0. 证明 $\underline{u}^{(0)} \le \underline{u}^{(1)} \le \bar{u}^{(1)} \le \bar{u}^{(0)}$.

令 $\bar{w_i}^{(0)} = \bar{u_i}^{(0)} - \bar{u_i}^{(1)}$, 其中 $\bar{u_i}^{(0)} = \tilde{u_i}$. 由 (2.3),(2.6),(2.8), $\bar{w}_i^{(0)}$ 满足下列关系

$$L_i\bar{w_i}^{(0)} = L_i\tilde{u_i} - F_i(\bar{u_i}^{(k)}, [\bar{u}^{(0)}]_{a_i}, [\underline{u}^{(0)}]_{b_i}, [J*\bar{u}^{(0)}]_{c_i}, [J*\underline{u}^{(0)}]_{d_i}) \ge 0 \qquad (t,x)\in D_T,$$

$$\bar{w_i}^{(0)}(0,x) = \tilde{u_i}(0,x) - \eta_i(0,x) \ge 0 \quad x\in\mathbf{R}^n \quad (i=1,\cdots,N).$$

由 (2.4),(3.3), 取 $\bar{A}_i = A_i + A_i'', \delta > \bar{\gamma_i} \equiv \max\{\gamma_i, \gamma_i''\}$. 那么

$$\lim_{R\to\infty}\sup[e^{-\delta_i R^2}\min_{|x|=R}(\bar{w_i}^{(0)}(t,x))] \ge \lim_{R\to\infty}(-A_i)e^{-\delta_i R^2}e^{\bar{\gamma_i}R^2} = 0. \tag{3.5}$$

根据 Phragman-Lindelöff 原理，在 $\bar{D_T}$ 中 $\bar{w_i}^{(0)} \ge 0$[5], 于是得到了在 $\bar{D_T}$ 中 $\bar{u_i}^{(1)} \le \bar{u_i}^{(0)} \quad (i=1,\cdots,N)$. 同理可以得到在 $\bar{D_T}$ 中 $\underline{u_i}^{(1)} \le \underline{u_i}^{(0)} \quad (i=1,\cdots,N)$. 而且由 (3.4), 当 $|x|\to\infty$ 时

$$|\bar{u}_i^{(1)} - \underline{u_i}^{(1)}| \le 2A_i''\exp(\gamma_i"|x|^2) \tag{3.6}$$

取 $w_i^{(1)} = \bar{u_i}^{(1)} - \underline{u_i}^{(1)}$. 由 (2.8),(3.2) 以及假设 (H)

$$L_i w_i^{(1)} = F_i(\bar{u}^0, \underline{u}^0) - F_i(\underline{u}^0, \bar{u}^0) \ge 0 \quad (t,x)\in D_T$$

$$w_i^{(1)}(0,x) = \eta_i(0,x) - \eta_i(0,x) = 0 \quad x\in\mathbf{R}^n.$$

由于 (3.6),$w_i^{(1)}$ 满足类似于 (3.4) 的增长条件限制．根据 Phragman-Lindelöff 原理，在 $\bar{D_T}$ 中 $\bar{u_i}^{(1)} \ge \underline{u_i}^{(1)}$.

3^0. 证明 $\bar{u_i}^{(1)}, \underline{u_i}^{(1)}$ 是 (1.1) 的耦合上下解.

根据引理 2.1,(2.8),(3.2)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar{u_i}^{(1)}}{\partial t} - D_i\Delta\bar{u_i}^{(1)} = L_i\bar{u_i}^{(1)} - K_i\bar{u_i}^{(1)} = F_i(\bar{u}^{(0)}, \underline{u}^{(0)}) - K_i\bar{u_i}^{(1)} \ge F_i(\bar{u}^{(1)}, \underline{u}^{(1)}) - K_i\bar{u_i}^{(1)}\\
&\quad = f_i(\cdot, \bar{u_i}^{(1)}, [\bar{u}^{(1)}]_{a_i}, [\underline{u}^{(1)}]_{b_i}, [J*\bar{u}^{(1)}]_{c_i}, [J*\underline{u}^{(1)}]_{d_i}) \quad (t,x)\in D_T,\\
&\bar{u_i}^{(1)}(t,x) = \eta_i(t,x) \le \tilde{u_i}(t,x) \quad (t,x)\in Q_0^{(i)}.
\end{aligned}$$

类似的方法，可以得到 $\bar{u}^{(1)}, \underline{u}^{(1)}$ 满足 (2.3).

4^0. 取 $\tilde{u} = \bar{u}^{(1)}, \hat{u} = \underline{u}^{(1)}$ 重复以上的步骤 $1^0, 2^0, 3^0$, 可以得到 $\bar{u}^{(2)}, \underline{u}^{(2)}$ 是合适定义的, $\underline{u}^{(1)} \le \underline{u}^{(2)} \le \bar{u}^{(2)} \le \bar{u}^{(1)}$. 而且 $\bar{u}^{(2)}, \underline{u}^{(2)}$ 是 (1.1) 的耦合上下解，无限重复以上步骤，则引理 3.2 得证.

定理 2.1 的证明　根据引理 3.2, 由 (2.8) 构造的 $\{\bar{u}^{(k)}\}, \{\underline{u}^{(k)}\}$ 满足 (3.1), 于是下列极限存在

$$\lim_{k\to\infty}\bar{u}^{(k)}(t,x) = \bar{u}(t,x), \quad \lim_{k\to\infty}\underline{u}^{(k)}(t,x) = \underline{u}(t,x), \tag{3.7}$$

那么在 $\bar{Q}_T$ 中 $\hat{u} \le \underline{u} \le \bar{u} \le \tilde{u}$. 为了证明 $\bar{u} = \underline{u}(\equiv u^*)$ 以及 u^* 是 (1.1) 的唯一解，应用线性方程组 (2.8) 的积分表达式．令 $\Gamma_i(t,x;\tau,\xi)$ 是具有如下形式的格林函数

$$\Gamma_i(t,x;\tau,\xi) \equiv \frac{\exp(-K_i t)}{[4\pi D_i(t-\tau)]^{\frac{n}{2}}}\exp(-\frac{|x-\xi|^2}{4D_i(t-\tau)}) \quad (0\le\tau<t.x,\xi\in\mathbf{R}^n). \tag{3.8}$$

定义

$$I_i(t,x) \equiv \int_{R_+^n} \Gamma_i(t,x;0,\xi)\eta_i(0,\xi)\mathrm{d}\xi \quad (i=1,\cdots,N). \tag{3.9}$$

根据线性抛物方程的积分表达式，(2.8) 的解 $\bar{u_i}^{(k)}, \underline{u_i}^{(k)}$ 具有如下形式

$$\bar{u_i}^{(k)}(t,x) = I_i(t,x) + \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma_i(t,x;\tau,\xi)(F_i(\bar{u_i}^{(k-1)}, \underline{u}^{(k-1)}))(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi,$$

$$\underline{u}^{(k)}(t,x) = I_i(t,x) + \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{R_+^n} \Gamma_i(t,x;\tau,\xi)(F_i(\underline{u}^{(k-1)}, \bar{u}^{(k-1)}))(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{3.10}$$

其中 $F_i(\bar{u},\underline{u}), F_i(\underline{u},\bar{u}), G_i(\bar{u},\underline{u}), G_i(\underline{u},\bar{u})$ 是 (3.2) 所给的形式. 由于 (3.1),(3.8) 和 (H), 积分形式 (3.10) 是有界的，根据控制收敛定理，在 (3.10) 式两边取极限

$$\bar{u_i}(t,x) = I_i(t,x) + \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma_i(t,x;\tau,\xi)(F_i(\bar{u}, \underline{u}^{(k-1)}))(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi,$$

$$\underline{u_i}^{(k)}(t,x) = I_i(t,x) + \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{R_+^n} \Gamma_i(t,x;\tau,\xi)(F_i(\underline{u}, \bar{u}))(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{3.11}$$

令 $w_i = \bar{u}_i - \underline{u}_i$, 对于向量函数 $w=(w_1,\cdots,w_N)$, 定义

$$\|w_i\|_t = \sup\{|w_i(\tau,\xi)|; 0 \le \tau \le t, \xi \in R_+^n\} \quad (i=1,\cdots,N)$$

$$\|w\|_t = \|w_1\|_t + \cdots + \|w_N\|_t. \tag{3.12}$$

比较 (3.11) 中的两个不等式并且利用 Lipschitz 条件

$$\begin{aligned} |w_i(t,x)| &\le K_i \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma_i(t,x;\tau,\xi)(|\bar{u}_i - \underline{u}_i|(\tau,\xi) + |\bar{u} - \underline{u}|(\tau,\xi) + |J*\bar{u} - J*\underline{u}|(\tau,\xi))\mathrm{d}\xi \\ &\le 2K_i(\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma_i(t,x;\tau,\xi)\mathrm{d}\xi)(\|w\|_t + \|J*w\|_t). \end{aligned} \tag{3.13}$$

根据 [5, P.311], 对于 $0 \le \tau \le t, x \in \mathbf{R}^n$, 存在常数 C_i, 使得

$$\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma_i(t,x;\tau,\xi)\mathrm{d}\xi \le C_i.$$

于是由 (3.13) 可以推导出

$$|w_i(t,x)| \le 4K_iC_i(t\|w\|_t). \tag{3.14}$$

(3.14) 两边取最大值

$$\|w\|_t \le 4K_iC_i(t\|w\|_t), \tag{3.15}$$

不妨取 $t_0 \le \frac{1}{4K_iC_i}$, 则在 $[0,t_0]$ 内 $\|w\|_{t_0} \le \|w\|_{t_0}$, 于是 $\|w\|_{t_0} \equiv 0$. 即在 $[0,t_0]$ 内 $\bar{u}_i \equiv \underline{u}_i$. 由于 C_i 与 t,x 的取值无关，我们可以取 w 在 t_0 点的值作为新的初始值，如此重复上述步骤，即得到在 $\bar{D}_T$ 内 $w \equiv 0$. 以上证明了在 Q_T 内 $\bar{u} \equiv \underline{u}$. 再根据积分表达式 (3.11),$\bar{u}(\underline{u})$ 是 (2.7) 的解，即 $\bar{u}(\underline{u})$ 是 (1.1) 的解.

下面假设 $v(t,x)\in S$ 是 (1.1) 的另一个解，则 $\tilde{u}(t,x)\ge v(t,x)$, 且 $\tilde{u}(t,x),v(t,x)$ 是 (1.1) 的一对耦合上下解. 取 $\bar{v}^{(0)}=\tilde{u},\underline{v}^{(0)}=v$ 作为新的初始值，构造迭代序列 $\{\bar{v}^{(m)}\},\{\underline{v}^{(m)}\}$. 由引理 3.2 得 $v\le\underline{v}^{(m)}\le\underline{v}^{(m+1)}\le\bar{v}^{(m+1)}\le\bar{v}^{(m)}\le\tilde{u}$. 于是 $v\le\bar{v}=\bar{u}$. 相应的有 $v\ge\underline{u}$, 得到 $\underline{v}\le v\le\bar{u}$. 故唯一性得证.

4 具体的应用

考虑一类特殊的 Volterra-Lotka 竞争模型

$$\begin{cases} u_{1t}-d_1\Delta u_1=u_1(a_1-b_{11}u_1-b_{12}u_2-e_1u_1J_2*u_2), & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}^n,\\ u_{2t}-d_2\Delta u_2=u_2(a_2-b_{21}u_1-b_{22}u_2-e_2u_2J_1*u_1), & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}^n,\\ u_1(t,x)=\eta_1(t,x), & (t,x)\in[-\tau_1,0]\times\mathbf{R}^n,\\ u_2(t,x)=\eta_2(t,x), & (t,x)\in[-\tau_2,0]\times\mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $d_i,a_i,e_i,b_{ij}(i,j=1,2)$ 是正常数， τ_i 是表示时滞的正常数. J_i*u_i 可以是公式 (1.2) 和 (1.3) 中的离散时滞或连续时滞. 初始值 $\eta_i(t,x)\ge0$ 且 $\eta_i(t,x)\in C^{\alpha}([-\tau_i,0]\times\mathbf{R}^n_+)$. 以上 $i,j=1,2$. 注意到当 $e_1=e_2=0$ 时， (4.1) 即为经典的 Volterra-Lotka 竞争模型.

问题 (4.1) 来源于水生生态系统中某两种植物种群不仅相互竞争, 而且产生毒素抑制对方生长的模型. 这里 u_1,u_2 是两个种群的密度， a_1,a_2 是种群的细胞增长率， b_{11},b_{22} 分别是两个种群的种内竞争率， b_{12} 是第二种群对第一种群的种群间竞争率， b_{21} 是第一种群对第二种群的种群间竞争率， e_1 是第二种群对第一种群的抑制毒素率， e_2 是第一种群对第二种群的抑制毒素率. A.Mukhopadhyay 在 [6] 首先提出该模型的常微系统，讨论了常微系统的渐近性质. 宋新宇和陈兰荪在 [7] 中研究了常微系统的周期解, 他们的结论是在种群内的竞争率足够大的条件下, 常微系统存在周期解. 下面我们应用定理 2.1, 研究偏微系统 (4.1) 的解.

定理 4.1 如果 $c_1c_2\le b_1b_2$, (4.1) 的初值 $\eta_i(t,x)(i=1,2)$ 有界，那么 (4.1) 存在唯一的非负解. 如果 $\eta_i(t,x)(i=1,2)$ 不恒为 0, 那么 (4.1) 存在唯一的正解.

证明 不妨令 $M_i=\sup_{[-\tau_i,0]\times\mathbf{R}^n}\eta_i(t,x)$

$$\tilde{u}_1=\max\{M_1,\frac{a_1}{b_{11}}\},\quad \tilde{u}_2=\max\{M_2,\frac{a_2}{b_{22}}\},$$

则 $\tilde{u}_1\ge\frac{a_1}{b_{11}},\tilde{u}_2\ge\frac{a_2}{b_{22}}$. 取 $\hat{u}_1=\hat{u}_2=0$. 于是在 $S=\langle\hat{u},\tilde{u}\rangle$ 内条件 (H) 成立，而且满足 (2.3)(2.4). 即 $\tilde{u},\hat{u}$ 是 (4.1) 的一对耦合上下解. 根据定理 2.1,(4.1) 存在唯一的全局解. 如果初值 $\eta_i(t,x)(i=1,2)$ 不恒为 0, 由抛物方程的比较原理， (4.1) 的解恒为正.

注 4.2 当 $e_1=e_2=0$ 时，定理 4.1 的条件自然成立，于是 (4.1) 恒有全局解. 与经典的 Volterra-Lotka 竞争模型的结论一致.

参考文献：

[1] LU X. *Persistence and existinction in a competition diffusion system with time delays* [J]. Canad. Appl. Math. Quart., 1994, **2**: 231–246.
[2] MARTIN H, SMITH H L. *Abstract functional differential equation and reaction diffuion systems* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1990, **321**: 1–44.
[3] PAO C V. *Coupled nonlinear parabolic systems with time delays* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, **196**: 237–265.

[4] PAO C V. *Reaction diffusion systems with time delays in a half-space domain* [J]. Nolinear Anal., 2001, **47**: 4365–4375.
[5] PAO C V. *Nolinear Parabolic and Ellipitic Equation* [M]. Plenum, New York, 1992.
[6] MUKHOPADHYAY A, CHATTOPADHYAY J, TAPASWI P K. *A delay differential equations models of plankton allelepathy* [J]. Math. Biosci., 1998, **149**: 167–189.
[7] 宋新宇, 陈兰荪. 一类浮游生物植化相克时滞微分方程的周期解 [J]. 数学物理学报 (A 辑), 2003, **23**(1): 8–13.
SONG Xin-yu, CHEN Lan-sun. *Periodic solution of a diffrential equation of plankton allelepathy* [J]. Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed., 2003, **23**(1): 8–13. (in Chinese)

Diffusion-Reaction Systems with Time Delays in R^n Domain

TIAN Can-rong[1,2]
(1. School of Mathematical Science, Yangzhou University, Jiangsu 225002, China;
2. Basic Deptartment, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu 224003, China)

Abstract: By the method of upper and lower solitions and the integral represention of its associated monotone iterative sequences, this paper gives the existence and uniquiness of a solution to a coupled boundary time delays reaction diffusion system in $\mathbf{R}^n$. Moreover, an application is given to a special Volterra-Lotka model.

Key words: Diffusion-Reaction; time delay; upper and lower solution; Volterra-Lotka model.