第26卷第3期 数学研究与评论 Vol.26, No.3
2006年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)03-0547-06 **文献标识码**: **A**

具有偏差变元的 Liénard 型方程的周期解

孟 华, 刘炳文
(湖南文理学院数学系, 湖南 常德 415000)
(E-mail: liubw007@yahoo.com.cn)

摘 要: 本文利用重合度理论研究了一类具偏差变元的 Liénard 型方程

$$x''(t)+f_1(t,x(t))|x'(t)|^2+f_2(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)+g(t,x(t-\tau_1(t)))=p(t).$$

获得了该方程存在 ω- 周期解的若干新结论, 改进和推广了已有文献中的相关结果.

关键词: Liénard 型方程; 偏差变元; 周期解; 重合度.
MSC(2000): 34C25, 34D40
中图分类: O175.12

1 引 言

考虑具偏差变元的 Liénard 型方程

$$x''(t)+f_1(t,x(t))|x'(t)|^{2n}+f_2(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)+g(t,x(t-\tau_1(t)))=p(t) \tag{1.1}$$

的 ω- 周期解的存在性问题. 其中 $\omega>0$ 为常数, f_2,τ_0,τ_1 , $p:R\to R$ 和 $f_1,g:R\times R\to R$ 为连续函数, τ, g 和 p 关于 t 为 ω- 周期的.

众所周知, Liénard 型方程

$$x''(t)+f(x(t))x'(t)+g(x(t))=p(t), \tag{1.2}$$

和

$$x''(t)+f_1(x(t))|x'(t)|^2+f_2(x(t))x'(t)+g(x(t))=p(t). \tag{1.3}$$

由于其具有广泛的应用背景, 人们对其周期解的存在性问题一直怀着强烈的兴趣, 现已有大量的研究工作 [1−7]. 相对来说, 对具偏差变元的 Liénard 型方程周期解存在性的研究还比较少 [8−10]. 在最近的文献 [8] 中, 鲁世平, 葛渭高研究了如下具偏差变元的 Liénard 型方程

$$x''+f(t,x(t),x(t-\delta(t)))x'+\beta(t)g(x(t-\tau(t)))=p(t), \tag{1.4}$$

的周期解问题. 通过利用 Mawhin 延拓定理, 该文首先获得了如下结果

定理 A 设 $F=\sup_{(t,x,y)\in R^3}|f(t,x,y)|<\frac{1}{\omega}$, $\beta_1=\max_{t\in[0,\ \omega]}\beta(t)\ge\beta_0=\min_{t\in[0,\omega]}\beta(t)>0$ 且条件 (H_0)

收稿日期: 2004-02-13 **接受日期**: 2005-12-10
基金项目: 国家自然科学基金 (10371034), 湖南省自然科学基金 (05JJ40009)

(i) $\limsup_{|x|\to+\infty}|x^{-1}g(x)|\le r$ 和 (ii) $\lim_{|x|\to+\infty}g(x)\mathrm{sgn}(x)=+\infty$.
满足，则当 $r<\frac{1-F\omega}{\beta_1\omega^2}$ 时，方程 (1.4) 存在 ω- 周期解.

然后，文献 [8] 又在条件 (H_0) 成立的前提下，得到了方程 (1.4) 周期解存在的若干充分性结论，并且文献 [8,9,10] 的主要结果也大多要求条件 (H_0)(i) 成立．据作者所知，当条件 (H_0) 不成立时，方程 (1.4) 周期解的存在性还未见文献进行研究．另外， (1.2), (1.3) 和 (1.4) 显然都是 (1.1) 的特殊情形．因此，继续研究方程 (1.1)–(1.4) 周期解的存在性既有理论意义又有实际意义．本文利用新的分析技巧估计 Mawhin 延拓定理中集合 Ω 的先验界，在不要求条件 (H_0) 成立的前提下，得到了方程 (1.1) 周期解存在的若干充分性判据，改进和扩展了已有文献中的相关结论．本文引入以下记号：

$$|x|_k=(\int_0^\omega|x(t)|^k\mathrm{d}t)^{1/k},\quad |x|_\infty=\max_{t\in[0,\omega]}|x(t)|, f_1'(x)=\frac{\mathrm{d}f_1(x)}{\mathrm{d}x},$$

$$h_i'(x)=\frac{\mathrm{d}h_i(x)}{\mathrm{d}x},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$X=\{x|x\in C^1(R,\ R),\ x(t+\omega)=x(t),\ \forall\ t\in R\},$$

定义范数为：

$$\|x\|_X=\max\{|x|_\infty,\ |x'|_\infty\},$$

$$Y=\{x|x\in C(R,\ R),\ x(t+\omega)=x(t),\ \forall\ t\in R\},$$

定义范数为：

$$\|x\|_Y=|x|_\infty.$$

则 X,Y 均为 Banach 空间．在 X 上定义线性算子：

$$L:D(L)\subset X\longrightarrow Y,\ Lx=x'',D(L)=\{x|x\in X,x''\in C(R,\ R)\},\tag{1.5}$$

定义非线性算子 $N:X\longrightarrow Y$,

$$Nx=-f_1(t,x(t))|x'(t)|^2-f_2(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)-g(t,x(t-\tau_1(t)))+p(t).\tag{1.6}$$

易得 $\mathrm{Ker}L=R$, $\mathrm{Im}L=\{x|x\in Y,\int_0^\omega x(s)\mathrm{d}s=0\}$. 因此 L 是指标为零的 Fredholm 算子．令投影算子 $P:X\to\mathrm{Ker}L$ 和 $Q:Y\to Y/\mathrm{Im}L$ 为

$$Px(t)=x(0)=x(\omega),\quad Qx(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(s)\mathrm{d}s.$$

则 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L$ 且 $\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L$. 令 $L_P=L|_{D(L)\cap\mathrm{Ker}P}$, 易证 L_P 是可逆的，且其逆为

$$L_P^{-1}:\mathrm{Im}L\to D(L)\cap\mathrm{Ker}P,\quad L_P^{-1}y(t)=-\frac{t}{\omega}\int_0^\omega(t-s)y(s)\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s.\tag{1.7}$$

2 几个引理

由 (1.4) 和 (1.5) 易知，算子方程 $Lx=\lambda Nx$ 与下列方程等价

$$x''+\lambda[f_1(t,x(t))|x'(t)|^2+f_2(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)+g(t,x(t-\tau_1(t)))]=\lambda p(t),\lambda\in(0,\ 1).\tag{2.1}$$

引理 2.1 (Mawhin 延拓定理)[11] 设 X, Y 均为 Banach 空间， $L: D(L)\subset X\to Y$ 是指标为零的 Fredholm 算子， $N:\overline{\Omega}\to Y$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L- 紧的，且 Ω 为 X 中的有界开集，又假设下列条件成立：

(1) $Lx\neq\lambda Nx, \forall x\in\partial\Omega\cap D(L), \forall\lambda\in(0,1)$;

(2) $Nx\notin \mathrm{Im}L, \forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$;

(3) $\deg\{QN,\ \Omega\cap\mathrm{Ker}L,\ 0\}\neq 0$.

则方程 $Lx=Nx$ 在 $\Omega\cap D(L)$ 中至少存在一个解.

引理 2.2 (Wirtinger 不等式)[11] 设 $x\in C^2(R,R)$ 且 $x(t+\omega)=x(t)$, 则

$$|x'(t)|_2^2\leq(\frac{\omega}{2\pi})^2|x''(t)|_2^2. \tag{2.2}$$

引理 2.3 假设

(H_1) 存在常数 $d>0$ 使

$$x(g(t,x)-p(t))>0(\text{或}x(g(t,x)-p(t))<0), \forall\ t\in R, |x|\geq d$$

成立，又设 $x(t)$ 为方程 $(2.1)_\lambda$ 的任意 $\omega-$ 周期解，则有

$$|x|_\infty\leq d+\sqrt{\omega}|x'|_2. \tag{2.3}$$

证明 证明类似于文献 [8], 此处从略.

3 主要结果

定理 3.1 假设下列条件成立.

(H_2) 存在正常数 d 和 M ，使 $x(g(t,x)-p(t))>0, \forall\ t\in R, |x|\geq d$, 并且使下列条件之一成立：

(i) 当 $t\in R, x\leq -d$ 时， $g(t,x)\geq -M$, 且 $\forall\ t\in R, f_1(t,x)\geq 0$,

(ii) 当 $t\in R, x\geq d$ 时， $g(t,x)\leq M$, 且 $\forall\ t\in R, f_1(t,x)\leq 0$;

(H_3) $F_2=\sup_{(t,\ x,\ y)\in R^3}|f_2(t,x,y)|<\frac{1}{4\omega}$.

则方程 (1.1) 至少存在一个 ω- 周期解.

证明 记 (2.1) 的所有 ω- 周期解组成的集合为 Ω_1. $\forall x(t)\in\Omega_1$, 将方程 (2.1) 两边从 0 到 ω 积分有

$$\int_0^\omega f_1(t,x(t))|x'(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^\omega f_2(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)\mathrm{d}t+ \int_0^\omega(g(t,x(t-\tau_1(t)))-p(t))\mathrm{d}t=0. \tag{3.1}$$

结合条件 (H_2), 证明 $|x'|_\infty$ 有界，我们仅考虑条件 (H_2)(i) 成立的情形 (条件 (H_2)(ii) 成立时可类似证明).

由条件 (H_2)(i) 成立和 (3.1) 有

$$\int_{[x(t-\tau_1(t))>d]}|g(t,x(t-\tau_1(t)))-p(t)|\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[x(t-\tau_1(t))>d]} (g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t))\mathrm{d}t \\
&= -\int_{[x(t-\tau_1(t))\le d]} [g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)]\mathrm{d}t - \int_0^\omega f_1(x(t))|x'(t)|^2\mathrm{d}t - \\
&\quad \int_0^\omega f_2(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)\mathrm{d}t \\
&\le \int_{[x(t-\tau_1(t))\le d]} |g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)|\mathrm{d}t + \int_0^\omega |f_2(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)|\mathrm{d}t \\
&\le \omega(\max\{|g(t,x)| : t\in R, |x|\le d\} + M) + \omega F_2|x'|_\infty.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\int_0^\omega |f_1(t,x(t))|x'(t)|^2|\mathrm{d}t &= |\int_0^\omega f_1(t,x(t))|x'(t)|^2\mathrm{d}t| \\
&= |\int_0^\omega (-f_2(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t) - (g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t))\mathrm{d}t| \\
&\le \int_0^\omega |f_2(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)|\mathrm{d}t + \int_0^\omega |g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t)|\mathrm{d}t \\
&\le \omega F_2|x'|_\infty + \int_{[x(t-\tau_1(t))>d]} |g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)|\mathrm{d}t + \\
&\quad \int_{[x(t-\tau_1(t))\le d]} |g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)|\mathrm{d}t \\
&\le 2\omega(\max\{|g(t,x)| : t\in R, |x|\le d\} + M) + 2\omega F_2|x'|_\infty.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

注意到 $x(0) = x(\omega)$, 从而必存在常数 $\zeta \in [0,\omega]$ 使得 $x'(\zeta) = 0$, 从而 Schwarz 不等式有

$$
|x'(t)| = |x'(\zeta) + \int_\zeta^t x''(s)\mathrm{d}s| \le \sqrt{\omega}|x''|_2. \tag{3.4}
$$

因此，由 (3.2), (3.3) 和 (3.4) 有

$$
\begin{aligned}
|x'|_\infty &\le \int_0^\omega |x''(s)|\mathrm{d}s \\
&= \lambda\int_0^\omega |f_1(t,x(t))|x'(t)|^2 + f_2(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t) + (g(t,x(t-\tau_1(t))) - p(t))|\mathrm{d}t \\
&\le 4\omega(\max\{|g(t,x)| : t\in R, |x|\le d\} + M) + 4\omega F_2|x'|_\infty.
\end{aligned}
$$

从而由条件 (H_3) 有

$$
|x'|_\infty \le \frac{4\omega(\max\{|g(t,x)| : t\in R, |x|\le d\} + M)}{1 - 4\omega F_2} := D_1. \tag{3.5}
$$

由 (2.3) 和 (3.5) 可得，存在与 λ 无关的正常数 M_1 使

$$
\|x\|_X \le |x|_\infty + |x'|_\infty < M_1.
$$

现设 $\forall x \in \Omega_2 = \{x | x \in KerL \cap X,\ \text{且}\ Nx \in ImL\}$, 则必存在常数 M_2 使得

$$x(t) \equiv M_2,\ \ \text{且}\ \int_0^{\omega} [g(t,\ M_2) - p(t)]\mathrm{d}t = \int_0^{\omega} g(t, M_2)\mathrm{d}t = 0.$$

由 (H_2) 可知

$$|x(t)| \equiv |M_2| < d, \forall\ x(t) \in \Omega_1. \tag{3.6}$$

令 $M = M_1 + d + 1$. 记

$$\Omega = \{x | x \in X,\ \|x\|_X < M\}.$$

由 (1.6) 和 (1.7) 易知 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L- 紧的. 注意到 $M > \max\{M_1,\ d\}$, 再由 (3.6) 可知引理 2.1 的条件 (1) 和 (2) 成立.

我们定义连续映射 $H(x,\mu)$:

$$H(x,\mu) = -(1-\mu)x - \mu \cdot \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} g(t,x)\mathrm{d}t;\ \mu \in [0\ \ 1].$$

由条件 (H_2) 可知

$$xH(x,\mu) \neq 0,\ \forall\ x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L.$$

故得 $H(x,\mu)$ 是同伦映射，从而有

$$\begin{aligned}\deg\{QN,\ \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\} &= \deg\{-\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} g(t,x)\mathrm{d}t, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\} \\ &= \deg\{-x,\ \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\} \neq 0.\end{aligned}$$

因此，根据引理 2.1 易知方程 (1.1) 至少存在一个 ω- 周期解. □

类似定理 1 的证明，我们可以证明下列结论成立.

定理 3.2 假设条件 (H_3) 成立. 且下列条件成立.

($\bar{\mathrm{H}}_2$) 存在正常数 d 和 M, 使 $x(g(t,x) - p(t)) < 0, \forall\ t \in R, |x| \geq d$, 并且使下列条件之一成立：

(i) 当 $t \in R, x \geq d$ 时， $g(t,x) \geq -M$, 且 $\forall\ t \in R, f_1(t,x) \geq 0$;

(ii) 当 $t \in R, x \leq -d$ 时， $g(t,x) \leq M$, 且 $\forall\ t \in R, f_1(t,x) \leq 0$,

则方程 (1.1) 至少存在一个 ω- 周期解.

类似于定理 3.1 的证明，我们也可以证明下列结论成立.

定理 3.3 假设 $f_2(t, x(t), x(t-\tau_0(t))) \equiv f_2(x(t))$, $f_1 = f_1(t, x(t-\tau_0(t)))$, 且条件 ($\mathrm{H}_2$)(或 ($\bar{\mathrm{H}}_2$)) 成立. 则方程 (1.1) 至少存在一个 ω- 周期解.

附注 1 显然，本文的结论放弃了定理 A 中所需的条件 (H_0), 并且本文虑的方程 (1.1) 比已有文献 [1–11] 中的方程更加广泛，因此本文的结论改进、推广了上述已有文献的相应结果.

参考文献：

[1] VILLARI G. *Periodic solutions of Liénard equation* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1982, **36**: 379–386

[2] MAWHIN J. *An extension a theorem of A.C.Lazer on forced nonlinear oscillations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1972, **40**: 20–29.

[3] VILLARI G. *On the existence of periodic solutions for Liénard equation* [J]. Nonlinear Anal., 1983, **7**: 71–78.
[4] OMARI P. VILLARI G, ZANOLIN F. *Periodic solutions of the Liénard equation with one-side growth restrictions* [J]. J. Differential Equations, 1987, **67**: 278–293.
[5] ZHANG Mei-rong. *Periodic solutions of Liénard equations with Singular forces of repulsive type* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1996, **203**: 254–269.
[6] WANG Zai-hong. *Periodic solutions of Liénard equations with subquabratic potential conditions* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2001, **256**: 127–141.
[7] IANNACCI R, NKASHAMA M N. *On Periodic Solutions of Forced Second Order Differential Equations with a Deviating Argument* [M]. Lecture Notes In Math., 151, Berlin: Springer-Verlag, 1984, 224–232.
[8] 鲁世平，葛渭高．具有偏差变元的二阶微分方程的周期解 [J]. 数学学报， 2002, **45**: 811–818.
LU Shi-ping, GE Wei-gao. *Periodic solutions of second order differential equations with deviating arguments* [J]. Acta Math. Sinica, 2002, **45**: 811–818. (in Chinese).
[9] LU Shi-ping, GE Wei-gao. *Periodic solutions for a kind of Liénard equations with deviating arguments* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2004, **249**: 231–243.
[10] LU Shi-ping, GE Wei-gao. *Some new results on the existence of periodic solutions to a kind of Rayleigh equation with a deviating argument* [J]. Nonlinear Anal., 2004, **56**: 501–514.
[11] GAINES R, MAWHIN J. *Coincide Degree and Nonlinear Differential Equation* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

Periodic Solutions for a Liénard-Type Equation with Deviating Arguments

MENG Hua, LIU Bing-wen
(Dept. Math., Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

Abstract: We use the coincidence degree theory to establish new results on the existence of ω-periodic solutions for the Liénard-type equation with deviating arguments

$$x''(t) + f_1(t, x(t))|x'(t)|^2 + f_2(t, x(t), x(t - \tau_0(t)))x'(t) + g(t, x(t - \tau_1(t))) = p(t).$$

The results improve and extend some existing ones in the literature.

Key words: Liénard-type equation; deviating arguments; periodic solution; coincidence degree.