第26卷第3期 数学研究与评论 Vol.26, No.3
2006年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)03-0623-04 **文献标识码**: A

关于一类 (g,f)-3- 覆盖图的判据

黄光鑫 [1], 尹凤 [2]

(1. 成都理工大学信息管理学院，四川 成都 610059; 2. 四川理工学院数学系，四川 自贡 643000)
(E-mail: cdut.hgx@163.com)

摘　要: 本文首先给出了 (g,f)-3- 覆盖图的定义，即一个图 G 称为 (g,f)-3- 覆盖图，如果 G 的任何三条边都属于它的一个 (g,f)- 因子；其次，黄光鑫曾先后给出了当 $g<f$ 时一个二部图分别是 (g,f)-2- 覆盖图和 (g,f)-3- 覆盖图的充分必要条件，在此基础上，本文进一步得到了，当 $g\le f$ 时一个二部图 $G=(X,Y)$ 是 (g,f)-3- 覆盖图的一个充分必要条件；最后，研究了 $f(X)=f(Y)$ 的情形，得到了当 $f(X)=f(Y)$ 时一个二部图 $G=(X,Y)$ 是 f-3- 覆盖图的一个充分必要条件.

关键词: 图；因子；覆盖图； (g,f)-3- 覆盖图.
MSC(2000): 05C70
中图分类: O157.5

1 引 言

本文所考虑的图均为有限无向简单图. 未说明的术语和符号见文献 [1]. 设 G 是一个图, 分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的顶点集和边集, 用 $d_G(x)$ 表示顶点 x 在 G 中的次数. 设 g,f 分别是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数, 若对每个 $x\in V(G)$ 有 $g(x)\le f(x)$, 则图 G 的一个 (g,f)- 因子是 G 的一个支撑子图 F, 使得对每个 $x\in V(G)$ 有 $g(x)\le d_F(x)\le f(x)$. 若对任意 $x\in V(G)$ 有 $g(x)\le f(x)(g(x)<f(x))$, 以下简记为 $g\le f(g<f)$. 设任意 $S,T\subseteq V(G)$, $G[S]$ 表示 G 的由 S 导出的子图, 记 $G-S=G[V(G)\backslash S]$. 若 $E_1\subseteq E(G)$, 用 $G-E_1$ 表示从 G 中去掉 E_1 中的全部边所得到的图. $E_G(S,T)=\{xy\in E(G)|x\in S,y\in T\}, e_G(S,T)=|E_G(S,T)|$. 为方便计, 对任意函数 f, 记 $f(S)=\sum_{x\in S}f(x)$, 并且令 $f(\Phi)=0$. 记 $\delta_G(S,T;g,f)=f(S)-g(T)+d_G(T)-e_G(S,T)$.

Folkman,Fulkerson 在 1970 年曾得到下面的结果:

引理 1.1[2] 设 $G=(X,Y)$ 是一个二部图， g 和 f 分别是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数，使对每个 $x\in V(G)$ 有 $g(x)\le f(x)$, 则 G 有一个 (g,f)- 因子当且仅当对任意 $S\subseteq X$ 和 $T\subseteq Y$ 有 $\delta_G(S,T;g,f)\ge 0$ 且 $\delta_G(T,S;g,f)\ge 0$.

在 1988 年刘桂真 [3] 引进了 (g,f)- 覆盖图的概念，即，过图 G 的任意一条边都有 G 的一个 (g,f)- 因子，则称图 G 为一个 (g,f)- 覆盖图，并且给出了一个图是 (g,f)- 覆盖图的一个充分必要条件，又给出了一个图有一个 (g,f)- 因子含有一条指定边的充要条件 [4]. 本文作者 [5−6] 推广了这一概念如下：如果过图 G 的任意 k 条边都有 G 的一个 (g,f)- 因子，则称 G 是一个 $(g,f)-k-$ 覆盖图，并且分别得到了当 $g<f$ 是一个图是 $(g,f)-2-$ 覆盖图和 (g,f)-3- 覆盖图的充分必要条件. 若 $\forall x\in V(G)$ 有 $f(x)=g(x)$, 则称一个 (g,f)-3- 覆盖图 G 是一个 f-3- 覆盖图. 当 $g\le f$ 时寻找图 G 是一个 (g,f)-3- 覆盖图的充要条件是一个相当困难的问题. 本文得到了如下结果:

收稿日期: 2004-05-17; **接受日期**: 2005-12-10
基金项目: 重庆市教委科学技术基金 (960384)

(i) 当 $g\leq f$ 时，一个二部图 $G=(X,Y)$ 是 (g,f)-3- 覆盖图的一个充分必要条件;

(ii) 当 $f(X)=f(Y)$ 时，一个二部图 $G=(X,Y)$ 是 f-3- 覆盖图的一个充分必要条件.

2 主要结果及其证明

定理 2.1 设 $G=(X,Y)$ 是一个二部图，g 和 f 分别是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数且 $g\leq f$, 则 G 是一个 (g,f)-3- 覆盖图，当且仅当对任意 $S\subseteq X,T\subseteq Y$, 有

$$\delta_G(S,T;g,f)=f(S)-g(T)+d_G(T)-e_G(S,T)\geq\varepsilon(S,T) \tag{1}$$

且

$$\delta_G(T,S;g,f)=f(T)-g(S)+d_G(S)-e_G(T,S)\geq\varepsilon(T,S), \tag{2}$$

其中，$\varepsilon(S,T)$ 定义如下： 若 $d_{G-T}(S)\geq 3$, 则 $\varepsilon(S,T)=3$; 若 $d_{G-T}(S)=2$, 则 $\varepsilon(S,T)=2$; 若 $d_{G-T}(S)=1$, 则 $\varepsilon(S,T)=1$; 否则 $\varepsilon(S,T)=0$

证明 设 $e_i=u_iv_i, i=1,2,3$ 为图 G 的任意三条边，记 $G'=G-\{e_1,e_2,e_3\}$. 定义 $V(G)$ 上的函数 f',g', 使

$$f'(x)=\begin{cases} f(x)-n(x), & x=u_i,v_i,\quad i=1,2,3\\ f(x), & \text{否则}\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} g(x)-n(x), & x=u_i,v_i,\quad i=1,2,3\\ g(x), & \text{否则}\end{cases}$$

其中，$n(x)$ 表示顶点 x 与 e_1,e_2,e_3 相关联的次数.

易见，G 是一个 (g,f)-3- 覆盖图 $\Longleftrightarrow$ 对 G 的任意三条边 e_1,e_2,e_3,G 有一个 (g,f)- 因子含 e_1,e_2, e_3 $\Longleftrightarrow$ G' 有一个 (g',f')- 因子. 根据引理 1.1, 只要证明对任意 $S\subseteq X$ 和 $T\subseteq Y$ 有

$$\delta_{G'}(S,T;g',f')=f'(S)-g'(T)+d_{G'}(T)-e_{G'}(S,T)\geq 0, \tag{3}$$

且

$$\delta_{G'}(T,S;g',f')=f'(T)-g'(S)+d_{G'}(S)-e_{G'}(T,S)\geq 0. \tag{4}$$

由 $e_i(i=1,2,3)$ 的任意性，(3) 式和 (4) 式成立，当且仅当对任意 $S\subseteq X$ 和 $T\subseteq Y$ 有下列两式成立

$$\min_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\delta_{G'}(S,T;g',f')\geq 0, \tag{5}$$

$$\min_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\delta_{G'}(T,S;g',f')\geq 0. \tag{6}$$

注意到以下事实:

$$d_{G'}(T)-g'(T)=d_G(T)-g(T), \tag{7}$$

$$d_{G'}(S)-g'(S)=d_G(S)-g(S). \tag{8}$$

由 $\varepsilon(S,T)$ 的定义及式 (7),(8) 可知

$$\begin{aligned}
\varepsilon(S,T) &= \max_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{d_{G-T}(S)-d_{G'-T}(S)\}\\
&= \max_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{[d_G(S)-e_G(S,T)]-[d_{G'}(S)-e_{G'}(S,T)]\}\\
&= \max_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{[f(S)-f'(S)]-[e_G(S,T)-e_{G'}(S,T)]\}\\
&= \max_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{[f(S)-e_G(S,T)]-[f'(S)-e_{G'}(S,T)]\}\\
&= \max_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{[f(S)-g(T)+d_G(T)-e_G(S,T)]-\\
&\qquad [f'(S)-g'(T)+d_{G'}(T)-e_{G'}(S,T)]\}\\
&= \max_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\{\delta_G(S,T;g,f)-\delta_{G'}(S,T;g',f')\}\\
&= \delta_G(S,T;g,f)-\min_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\delta_{G'}(S,T;g',f'),
\end{aligned}$$

从而

$$\min_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\delta_{G'}(S,T;g',f')=\delta_G(S,T;g,f)-\varepsilon(S,T).$$

同理可证

$$\min_{e_i\in E(G),i=1,2,3}\delta_{G'}(T,S;g',f')=\delta_G(T,S;g,f)-\varepsilon(T,S).$$

故 (5) 式和 (6) 式成立，当且仅当式 (1) 和式 (2) 成立. □

定理 2.2 设 $G=(X,Y)$ 是一个二部图， f 是定义在 $V(G)$ 上的非负整数值的函数且 $f(X)=f(Y)$, 则 G 是一个 f-3- 覆盖图的充要条件是对任意 $S\subseteq X,T\subseteq Y$ 有

$$\delta_G(S,T;f)=f(S)-f(T)+d_G(T)-e_G(S,T)\geq\varepsilon(S,T), \tag{9}$$

其中， $\delta_G(S,T;f)=\delta_G(S,T;f,f),\varepsilon(S,T)$ 的定义与定理 2.1 中 $\varepsilon(S,T)$ 的定义相同.

证明 对任意 $S\subseteq X,T\subseteq Y$, 据定理 2.1,$G$ 是 $f-3-$ 覆盖图，当且仅当式 (9) 成立，且

$$\delta_G(T,S;f)\geq\varepsilon(T,S), \tag{10}$$

其中， $\delta_G(T,S;f)=\delta_G(T,S;f,f)$. 现只需证明 (9) 式蕴涵 (10) 式即可.

事实上，当 $f(X)=f(Y)$ 时

$$\begin{aligned}
\delta_G(X\setminus S,Y\setminus T;f) =&f(X\backslash S)-f(Y\backslash T)+d_G(Y\backslash T)-e_G(X\backslash S,Y\backslash T)\\
=&(f(X)-f(S))-(f(Y)-f(T))+d_G(Y\backslash T)-(d_G(Y\backslash T)-d_{G-T}(S))\\
=&(f(X)-f(Y))-(f(T)-f(S))+d_{G-T}(S)\\
=&f(T)-f(S)+d_G(S)-e_G(T,S)=\delta_G(T,S;f).
\end{aligned}$$

由 $d_{G-(Y\backslash T)}(X\backslash S)=d_{G-S}(T)$ 及 $\varepsilon(T,S)$ 定义可知 $\varepsilon(X\backslash S,Y\backslash T)=\varepsilon(T,S)$. 据式 (9),$\delta_G(T,S;f)=\delta_G(X\backslash S,Y\backslash T;f)\geq\varepsilon(X\backslash S,Y\backslash T)=\varepsilon(T,S)$. 于是 (9) 隐含 (10). □

3 小 结

本文得到了当 $g\leq f$ 时一个二部图 $G=(X,Y)$ 是 (g,f)-3- 覆盖图的充要条件，同时给出了

当 $f(X)=f(Y)$ 时，一个二部图 $G=(X,Y)$ 是 (g,f)-3- 覆盖图的一个充分必要条件. 作为本文的结束，我们提出如下问题，它的解决有助于 Alspach 猜想 [7] 的进一步解决.

问题 对一般的图 G, g 和 f 分别是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数，使对每个 $x\in V(G)$ 有 $g(x)\leq f(x)$, 寻找图 G 是 (g,f)-3- 覆盖图的条件.

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. *Graphy Theory with Applications* [M]. London: MacMillan, 1976.

[2] FOLKMAN J, FULKERSON D R. *Flows in infinite graphs* [J]. J. Combin Theory, 1970, **8**: 30–44.

[3] LIU Gui-zhen. *On (g,f)-covered graphs* [J]. Math. Acta. Scienta, 1988, **8**(2): 170–176.

[4] 刘桂真. 与星正交的 (g,f)- 因子分解 [J]. 中国科学 (A 辑), 1995, **25**: 367–373.
LIU Gui-zhen. *(g,f)-factorizations orthogonal to a star in graphs* [J]. Sci. China Ser. A, 1995, **25**: 367–373. (in Chinese)

[5] 黄光鑫. 关于 (g,f)-2- 覆盖图 [J]. 贵州工业大学学报 (自然科学版), 2002, **31**(2): 1–3.
HUANG Guang-xin. *On (g,f)-2-covered graph* [J]. J. Guizhou University of Technology Nature Science Edition, 2002, **31**(2): 1–3. (in Chinese)

[6] 黄光鑫. 关于 (g,f)-3- 覆盖图 [J]. 重庆师范学院学报 (自然科学版), 2002, **19**(2): 24–25.
HUANG Guang-xin. *On (g,f)-3-covered graph* [J]. J. Chongqing Normal University Nature Science Edition, 2002, **19**(2): 24–25. (in Chinese)

[7] ALSPACH B. *Problem 89* [J]. Discrete Math., 1988, **69**: 106.

Criterion for a Type of (g,f)-3-Covered Graphs

HUANG Guang-xin[1], *YIN Feng*[2]

(1. School of Information and Management, Chengdu University of Technology, Sichuan 610059, China;
2. Dept. of Math., Sichuan University of Science and Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: First, (g,f)-3-covered graph is defined. A graph G is called a (g,f)-3-covered graph if every three edges belong to a (g,f)-factor. Then a necessary and sufficient condition for a bipartite graph $G=(X,Y)$ to be (g,f)-3-covered is given when $g\leq f$. Moreover, a necessary and sufficient condition for a bipartitle graph $G=(X,Y)$ to be f-3-covered is obtained.

Key words: graph; factor; covered graph; (g,f)-3-covered graph.