第26卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.4
2006年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)04-0744-13 **文献标识码**: **A**

Szász-Kantorovich-Bézier 算子在 $L_p[0,\infty)$ 上的逼近定理

郭顺生， 齐秋兰， 李清
(河北师范大学数学与信息科学学院，河北 石家庄 050016)
(E-mail: ssguo@hebtu.edu.cn)

摘 要: 本文利用 Ditzian-Totik 模得到了 Szász-Kantorovich-Bézier 算子在 $L_p[0,\infty)$ 空间逼近的正逆定理及等价定理.

关键词: Szász-Kantorovich-Bézier 算子；正逆定理； K- 泛函；光滑模.
MSC(2000): 41A25, 41A35
中图分类: O174.5

1 前 言

近年有一类称为 Bézier 型算子得到一系列的研究 [1−4]. Chang[1] 引进 Bernstein-Bézier 算子并研究了其收敛性质， Liu[2] 引入 Bernstein-Kantorovich-Bézier 算子并给出其逼近正定理. Zeng[3,4] 分别研究了 Bernstein-Bézier 型及 Szász-Bézier 型算子关于有界变差函数的收敛速度. 但总的来说, 对这类算子逼近性质的研究还很不充分, 比如用 Ditzian-Totik 模研究其逼近等价定理, 还未见有关结果. 本文将以 Szász-Kantorovich-Bézier 算子为例 (简称 SKB 算子) 在 $L_p[0,\infty)$ 空间中以 Ditzian-Totik 模为工具研究其逼近正定理、逆定理及等价定理. SKB 算子定义如下: 对 $f\in L_p[0,\infty)$ $(1\le p\le+\infty)$,

$$S_{n\alpha}(f,x)=n\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t\left(J_{n,k}^{\alpha}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha}(x)\right), \tag{1.1}$$

其中 $\alpha\ge1$, $J_{n,k}(x)=\sum\limits_{j=k}^{\infty}p_{n,j}(x)$, $p_{n,j}(x)=e^{-nx}\frac{(nx)^j}{j!}$.
易知，当 $\alpha=1$ 时， $S_{n1}(f,x)$ 即为通常的 Szász-Kantorovich 算子. $S_{n\alpha}$ 为线性正算子. 由于 $\alpha\ge1$ 时， $a^\alpha-b^\alpha\le\alpha(a-b)$ $(1\ge a\ge b\ge0)$, 故有

$$|S_{n\alpha}(f,x)|\le\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\left|n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t\right|p_{n,k}(x). \tag{1.2}$$

由此及 $\int_0^\infty p_{n,k}(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}$ 易知 $S_{n\alpha}(f,x)$ 在 $L_p[0,\infty)$ 上是有界线性算子.

为叙述我们的结果，这里给出光滑模和 K- 泛函的定义 [5].

设 $f\in L_p[0,\infty)$ $(1\le p\le\infty)$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$,

$$\omega_\varphi(f,t)_p=\sup_{0<h\le t}\left\|f\left(x+\frac{h\varphi(x)}{2}\right)-f\left(x-\frac{h\varphi(x)}{2}\right)\right\|_p,$$

收稿日期: 2005-01-03
基金项目: 国家自然科学基金 (10571040), 河北省自然科学基金 (Ai004000137).

$$K_\varphi(f,t)_p=\inf_{g\in W_p}\left\{\|f-g\|_p+t\|\varphi g'\|_p\right\},$$

$$\overline{K}_\varphi(f,t)_p=\inf_{g\in W_p}\left\{\|f-g\|_p+t\|\varphi g'\|_p+t^2\|g'\|_p\right\},$$

其中 $W_p=\{f|\ f\in A.C._{loc},\ \|\varphi f'\|_p<\infty,\ \|f'\|_p<\infty\}$.
由 [5] 知

$$\omega_\varphi(f,t)_p\sim K_\varphi(f,t)_p\sim \overline{K}_\varphi(f,t)_p. \tag{1.3}$$

这里 $a\sim b$ 是指存在 $C>0$, 使得 $C^{-1}a\le b\le Ca$.

本文得到如下等价定理

定理 设 $f\in L_p[0,\infty)$ $(1\le p\le\infty)$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $0<\beta<1$, $\alpha\ge 1$, 则

$$\|S_{n\alpha}(f)-f\|_p=O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\beta\right) \tag{1.4}$$

$$\Leftrightarrow\quad \omega_\varphi(f,t)_p=O\left(t^\beta\right). \tag{1.5}$$

本文中用 C 表示一个与 n,x 无关的正常数，不同地方可能代表不同的数值.

2 正定理

为后面的需要，我们先列出有关的一些性质，它们可以通过简单计算而得到.

(1)

$$1=J_{n,0}(x)>J_{n,1}(x)>\cdots>J_{n,k}(x)>J_{n,k+1}(x)>\cdots>0; \tag{2.1}$$

(2)

$$p'_{n,k}(x)=n(p_{n,k-1}(x)-p_{n,k}(x)),\ k=1,2,\cdots,\quad p'_{n,0}(x)=-np_{n,0}(x); \tag{2.2}$$

(3)

$$J'_{n,0}(x)=0,\ \ J'_{n,k}(x)=np_{n,k-1}(x)>0,\ k=1,2,\cdots; \tag{2.3}$$

(4)

$$p'_{n,k}(x)=\frac{n}{\varphi^2(x)}\left(\frac{k}{n}-x\right)p_{n,k}(x),\quad x\in(0,\infty); \tag{2.4}$$

由于 $S_{n1}((t-x)^2,x)=\frac{x}{n}+\frac{1}{3n^2}$, 我们可以得到

(5)

$$S_{n1}((\cdot-x)^2,x)\le 4\frac{\delta_n^2(x)}{n}, \tag{2.5}$$

其中 $\delta_n(x)=\max\left\{\varphi(x),\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$.

下面我们给出正定理.

定理 2.1 设 $f\in L_p[0,\infty)$ $(1\le p\le\infty)$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$, 则

$$\|S_{n\alpha}(f,x)-f(x)\|_p\le C\omega_\varphi\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p. \tag{2.6}$$

证明 根据 $\overline{K}_\varphi(f,t)_p$ 的定义及 (1.3) 知，对于固定的 n,x, 可选 g, 使得

$$\|f-g\|_p+\frac{1}{\sqrt{n}}\|\varphi g'\|_p+\frac{1}{n}\|g'\|_p\le C\omega_\varphi\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p. \tag{2.7}$$

由于

$$\begin{aligned}\|S_{n\alpha}(f,x)-f(x)\|_p&\le\|S_{n\alpha}(f-g,x)\|_p+\|f-g\|_p+\|S_{n\alpha}(g,x)-g(x)\|_p\\&\le C\|f-g\|_p+\|S_{n\alpha}(g,x)-g(x)\|_p.\end{aligned}$$

因而仅需估计上式右端第二项．据 Riesz-Thorin 插值定理，只需考虑 $p=\infty$ 和 $p=1$ 两种情况．

对于 $p=\infty$ 的情况，由于 $g(t)=g(x)+\int_x^t g'(u)du$, 及 $S_{n\alpha}(1,x)=1$, 故有

$$|S_{n\alpha}(g,x)-g(x)|\le\left|S_{n\alpha}\left(\int_x^t g'(u)\mathrm{d}u,x\right)\right|,$$

而

$$\left|\int_x^t g'(u)\mathrm{d}u\right|\le\|\delta_n g'\|_\infty\left|\int_x^t\varphi^{-1}(u)\mathrm{d}u\right|,$$

$$\left|\int_x^t\varphi^{-1}(u)\mathrm{d}u\right|=2\left|\sqrt{t}-\sqrt{x}\right|\le2\varphi^{-1}(x)|t-x|,$$

及

$$\left|\int_x^t g'(u)\mathrm{d}u\right|\le\|\delta_n g'\|_\infty\left|\int_x^t\sqrt{n}\mathrm{d}u\right|\le\sqrt{n}\|\delta_n g'\|_\infty|t-x|.$$

可推得 $|S_{n\alpha}(g,x)-g(x)|\le\|\delta_n g'\|_\infty\min\{2\varphi^{-1}(x),\sqrt{n}\}S_{n\alpha}(|t-x|,x)$.
注意到 $\min\{2\varphi^{-1}(x),\sqrt{n}\}\sim\delta_n^{-1}(x)$ 及

$$S_{n\alpha}(|t-x|,x)\le\alpha S_{n1}(|t-x|,x)\le\alpha\left(S_{n1}(|t-x|^2,x)\right)^{\frac{1}{2}}\le2\alpha\frac{\delta_n(x)}{\sqrt{n}},$$

有

$$\begin{aligned}\|S_{n\alpha}(g,x)-g(x)\|_\infty&\le C\frac{1}{\sqrt{n}}\|\delta_n g'\|_\infty\\&\le C\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\|\varphi g'\|_\infty+\frac{1}{n}\|g'\|_\infty\right)\le C\omega_\varphi(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_\infty.\end{aligned} \tag{2.8}$$

对于 $p=1$ 的情况，分两种情况考虑： $x\in E_n^c=[0,\frac{1}{n}]$ 和 $x\in E_n=(\frac{1}{n},\infty)$．首先考虑

$x \in E_n^c$ 的情况.

$$
\begin{aligned}
|S_{n\alpha}(g,x)-g(x)| &\le \sum_{k=0}^{\infty} n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |\int_x^t g'(u)\mathrm{d}u|\mathrm{d}t\alpha p_{n,k}(x)\\
&\le \alpha\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |\int_x^t \frac{1}{\varphi(u)}|\varphi(u)g'(u)|\mathrm{d}u|\mathrm{d}t\\
&\le \alpha\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\varphi^{-1}(t)+\varphi^{-1}(x)\right)\mathrm{d}t\int_0^1 |\varphi(u)g'(u)|\mathrm{d}u\\
&\le \alpha\|\varphi g'\|_1\sum_{k=0}^{\infty}\left(\varphi^{-1}(x)+2\sqrt{\frac{n}{k+1}}\right)p_{n,k}(x). \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

故有

$$
\int_{E_n^c} |S_{n\alpha}(g,x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \le \alpha\|\varphi g'\|_1\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x+2\int_0^{\frac{1}{n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{k+1}}p_{n,k}(x)\mathrm{d}x\right).
$$

下面分别计算上式右端两项. 由于 $\int_0^{\frac{1}{n}}\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{n}}$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{k+1}}p_{n,k}(x)\mathrm{d}x &\le \int_0^{\frac{1}{n}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n}{k+1}p_{n,k}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\frac{1}{n}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{x}p_{n,k+1}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\int_{E_n^c}|S_{n\alpha}(g,x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \le C\frac{1}{\sqrt{n}}\|\varphi g'\|_1. \qquad (2.10)
$$

关于 $x\in E_n$ 的情况，由 (2.9) 的推导过程可知

$$
\begin{aligned}
&\int_{E_n}|S_{n\alpha}(g,x)-g(x)|\,\mathrm{d}x\\
&\le \alpha\int_{E_n}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\varphi^{-1}(x)+\varphi^{-1}(t)\right)\mathrm{d}t\left|\int_x^{\frac{k^*}{n}}|\varphi(u)g'(u)|\mathrm{d}u\right|\mathrm{d}x\\
&\le C\left(\int_{E_n}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\left(\varphi^{-1}(x)+\sqrt{\frac{n}{k+1}}\right)\left|\int_x^{\frac{k^*}{n}}|\varphi(u)g'(u)|\mathrm{d}u\right|\mathrm{d}x\right)\\
&=: C(R_1+R_2). \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

其中 $\left|\int_x^{\frac{k^*}{n}}|\varphi(u)g'(u)|\mathrm{d}u\right|=\max\limits_{j=k,k+1}\left|\int_x^{\frac{j}{n}}|\varphi(u)g'(u)|\mathrm{d}u\right|$.

下面我们应用类似于 [5, p146-147] 的方法估计 R_1 和 R_2. 首先定义

$$
D(l,n,x)=\{k: l\varphi(x)n^{-\frac{1}{2}}\le |\frac{k}{n}-x|<(l+1)\varphi(x)n^{-\frac{1}{2}}\}.
$$

则

$$R_1=\int_{E_n}\varphi^{-1}(x)\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k\in D(l,n,x)}p_{n,k}(x)\left|\int_x^{\frac{k^*}{n}}|\varphi(u)g'(u)|\mathrm{d}u\right|\mathrm{d}x.$$

对于 $x\in E_n$ 及 [5, 引理 9.4.4], 有 ($l\geq 1$ 时)

$$\sum_{k\in D(l,n,x)}p_{n,k}(x)\leq\sum_{k\in D(l,n,x)}\left|\frac{k}{n}-x\right|^4 p_{n,k}(x)\frac{n^2}{l^4\varphi^4(x)}\leq\frac{C}{(l+1)^4}. \tag{2.12}$$

$l=0$ 时上式结果也成立.

现在定义

$$F(l,x)=\left\{v:\ v\in[0,\infty),\ |v-x|\leq(l+1)\varphi(x)n^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{n}\right\},$$

$$G(l,v)=\{x:\ x\in E_n,\ v\in F(l,x)\}.$$

类似于 [5, p147] 的推导过程，可知

$$\begin{aligned}R_1&\leq C\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(l+1)^4}\int_{E_n}\varphi^{-1}(x)\int_{F(l,x)}|\varphi(v)g'(v)|\mathrm{d}v\mathrm{d}x\\&\leq C\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(l+1)^4}\int_0^{\infty}|\varphi(v)g'(v)|\int_{G_{(l,v)}}\varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}v\leq C\frac{1}{\sqrt{n}}\|\varphi g'\|_1.\end{aligned} \tag{2.13}$$

另外对 R_2, 类似于 (2.12) 有

$$\begin{aligned}\sum_{k\in D(l,n,x)}p_{n,k}(x)\sqrt{\frac{n}{k+1}}&\leq\left(\sum_{k\in D(l,n,x)}p_{n,k}(x)\frac{n}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\varphi^{-1}(x)\left(\sum_{k\in D(l,n,x)}p_{n,k+1}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C}{(1+l)^4}\varphi^{-1}(x).\end{aligned}$$

于是，类似于 (2.13) 有

$$R_2\leq C\frac{1}{\sqrt{n}}\|\varphi g'\|_1. \tag{2.14}$$

这样得到

$$\int_{E_n}|S_{n\alpha}(g,x)-g(x)|\mathrm{d}x\leq\frac{C}{\sqrt{n}}\|\varphi g'\|_1. \tag{2.15}$$

由 (2.10) 和 (2.15) 知 $p=1$ 时 (2.6) 成立，结合 (2.8) 可知定理成立. 证完.

3 逆定理

为证明逆定理，需要两个引理.

引理 3.1 设 $f\in L_p[0,\infty)$ ($1\leq p\leq\infty$), $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $\delta_n(x)=\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{n}}$, 则有

$$\left\|\delta_n S'_{n\alpha}(f)\right\|_p\leq C\sqrt{n}\|f\|_p. \tag{3.1}$$

证明 分别证明 $p=\infty$ 和 $p=1$ 时 (3.1) 式成立. 首先写出 $S'_{n\alpha}(f,x)$ 的表达式:

$$\begin{aligned}S'_{n\alpha}(f,x)&=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t\left[J_{n,k}^{\alpha-1}(x)J'_{n,k}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)J'_{n,k+1}(x)\right]\\&=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t\left\{\left[J_{n,k}^{\alpha-1}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)\right]J'_{n,k+1}(x)+J_{n,k}^{\alpha-1}p'_{n,k}(x)\right\}.\end{aligned}$$

故由 (2.1) 和 (2.3) 可以看出

$$\begin{aligned}&\left|S'_{n,\alpha}(f,x)\right|\le\alpha\|f\|_\infty\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left[J_{n,k}^{\alpha-1}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)\right]J'_{n,k+1}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}J_{n,k}^{\alpha-1}(x)|p'_{n,k}(x)|\right)\\&=:\alpha\|f\|_\infty\left(J_1+J_2\right).\end{aligned}\tag{3.2}$$

对 $x\in E_n^c$, 应用 (2.2) 可得 (记 $p_{n,-1}(x)=0$)

$$\delta_n(x)J_2\le\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{\infty}n\left|p_{n,k-1}(x)-p_{n,k}(x)\right|\le\frac{4}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{\infty}np_{n,k}(x)=4\sqrt{n}.$$

对 $x\in E_n$, 应用 (2.4) 可得

$$\delta_n(x)J_2\le2\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n}{\varphi^2(x)}\left|\frac{k}{n}-x\right|p_{n,k}(x)\le\frac{2n}{\varphi(x)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|^2p_{n,k}(x)\right)^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{n}.$$

于是可得

$$\delta_n(x)J_2\le C\sqrt{n}.\tag{3.3}$$

注意到 $J'_{n,0}(x)=0$, 知

$$\begin{aligned}J_1&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(J_{n,k}^{\alpha-1}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)\right)J'_{n,k+1}(x)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}J_{n,k}^{\alpha-1}(x)\left(J'_{n,k}(x)-p'_{n,k}(x)\right)-\sum_{k=0}^{\infty}J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)J'_{n,k+1}(x)\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}J_{n,k}^{\alpha-1}(x)J'_{n,k}(x)-\sum_{k=0}^{\infty}J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)J'_{n,k+1}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}J_{n,k}^{\alpha-1}(x)|p'_{n,k}(x)|=J_2.\end{aligned}$$

因此知

$$\delta_n(x)J_1\le C\sqrt{n}.\tag{3.4}$$

由 (3.2)–(3.4) 可得

$$\|\delta_n(x)S'_{n\alpha}(f,x)\|_\infty\le C\sqrt{n}\|f\|_\infty.\tag{3.5}$$

下面考虑 $p=1$ 的情况. 记 $a_k(f)=n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$\begin{aligned}&\left|S'_{n,\alpha}(f,x)\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(f)|\left[J_{n,k}^{\alpha-1}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)\right]J'_{n,k+1}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(f)|J_{n,k}^{\alpha-1}(x)|p'_{n,k}(x)|\\&=:\left(\widetilde{J}_1+\widetilde{J}_2\right).\end{aligned}\tag{3.6}$$

令

$$\int_0^\infty |\delta_n(x)S'_{n\alpha}(f,x)|\,\mathrm{d}x \le \left(\int_{E_n^c}+\int_{E_n}\right)\delta_n(x)\left(\widetilde{J}_1+\widetilde{J}_2\right)\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

下面分别估计 (3.7) 中相关的四部分.

$$\int_{E_n^c}\delta_n(x)\widetilde{J}_2\mathrm{d}x \le \int_{E_n^c}\delta_n(x)\sum_{k=1}^\infty |a_k(f)|n\left(p_{n,k-1}(x)+p_{n,k}(x)\right)\mathrm{d}x+\int_{E_n^c}\delta_n(x)|a_0(f)|np_{n,0}(x)\mathrm{d}x.$$

当 $x\in E_n^c$, $\delta_n(x)\le \frac{2}{\sqrt{n}}$, 而 $\int_0^\infty p_{n,k}(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}$, 故有

$$\int_{E_n^c}\delta_n(x)\widetilde{J}_2\mathrm{d}x \le \frac{4}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^\infty n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(t)|\mathrm{d}t+\frac{2n}{\sqrt{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}|f(t)|\mathrm{d}t \le 4\sqrt{n}\|f\|_1. \tag{3.8}$$

由于 $J_{n,k}^{\alpha-1}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)\le 1$, $J'_{n,k+1}(x)=np_{n,k}(x)$, 故易知

$$\int_{E_n^c}\delta_n(x)\widetilde{J}_1\mathrm{d}x \le \int_{E_n^c}\delta_n(x)\sum_{k=0}^\infty |a_k(f)|np_{n,k}(x)\mathrm{d}x \le 2\sqrt{n}\|f\|_1. \tag{3.9}$$

为估计 $\int_{E_n}\delta_n(x)\widetilde{J}_2\mathrm{d}x$, 需要 [5, p129 (9.4.15)]

$$\int_{E_n}\frac{(\frac{k}{n}-x)^2}{\varphi^2(x)}p_{n,k}(x)\mathrm{d}x \le Cn^{-2}.$$

应用 (2.4), 得

$$\begin{aligned}\int_{E_n}\delta_n(x)\widetilde{J}_2\mathrm{d}x &\le 2\sum_{k=0}^\infty |a_k(f)|\int_{E_n}\varphi(x)\cdot\frac{n}{\varphi^2(x)}\left|\frac{k}{n}-x\right|p_{n,k}(x)\mathrm{d}x\\ &\le 2n\sum_{k=0}^\infty |a_k(f)|n^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{E_n}\frac{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2}{\varphi^2(x)}p_{n,k}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le C\sqrt{n}\sum_{k=0}^\infty\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(t)|\mathrm{d}t=C\sqrt{n}\|f\|_1.\end{aligned} \tag{3.10}$$

为估计 $\int_{E_n}\delta_n(x)\widetilde{J}_1\mathrm{d}x$, 考虑两种情况: $\alpha\ge 2$ 和 $1<\alpha<2$ (当 $\alpha=1$ 时, $\widetilde{J}_1=0$). 对于 $\alpha\ge 2$, $J_{n,k}^{\alpha-1}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)\le(\alpha-1)p_{n,k}(x)$ 且有 [3,p315]

$$p_{n,k}(x)\le\frac{1}{\sqrt{\pi nx}}\quad k=0,1,\cdots,\quad x\in E_n,$$

可知

$$\varphi(x)p_{n,k}(x)\le\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{3.11}$$

应用 (2.3) 有

$$\begin{aligned}\int_{E_n}\delta_n(x)\widetilde{J}_1\mathrm{d}x &\le C\sum_{k=0}^\infty |a_k(f)|\int_{E_n}\varphi(x)p_{n,k}(x)np_{n,k}(x)\mathrm{d}x\\ &\le C\sqrt{n}\sum_{k=0}^\infty\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(t)|\mathrm{d}t=C\sqrt{n}\|f\|_1.\end{aligned} \tag{3.12}$$

对于 $1<\alpha<2$, 应用微分中值定理知

$$J_{n,k}^{\alpha-1}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)=(\alpha-1)(\xi_k(x))^{\alpha-2}p_{n,k}(x),$$

其中 $J_{n,k+1}(x)<\xi_k(x)<J_{n,k}(x)$, 又 $\alpha-2<0$, 故有

$$J_{n,k}^{\alpha-1}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)\le(\alpha-1)J_{n,k+1}^{\alpha-2}(x)p_{n,k}(x).$$

于是当 $1<\alpha<2$ 时，应用 (3.11)

$$\begin{aligned}\int_{E_n}\delta_n(x)\widetilde{J}_1\mathrm{d}x&\le C\int_{E_n}\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(f)|p_{n,k}(x)(\alpha-1)J_{n,k+1}^{\alpha-2}(x)J'_{n,k+1}(x)\mathrm{d}x\\&\le C\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(f)|\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\infty}(\alpha-1)J_{n,k+1}^{\alpha-2}(x)J'_{n,k+1}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

而上式右端积分为有限数. 事实上

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)=[1-(p_{n,0}(x)+\cdots+p_{n,k}(x))]^{\alpha-1}\,|_0^{\infty},$$

注意到 $p_{n,0}(x)|_0^{\infty}=e^{-nx}|_0^{\infty}=-1,\ \ p_{n,k}(x)|_0^{\infty}=0,\ (k=1,2,\cdots)$, 故得

$$\int_{E_n}\delta_n(x)\widetilde{J}_1\mathrm{d}x\le C\sqrt{n}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(t)|\mathrm{d}t\le C\sqrt{n}\|f\|_1. \tag{3.13}$$

由 (3.12) 和 (3.13) 知，对 $\alpha\ge1$ 有

$$\int_{E_n}\delta_n(x)\widetilde{J}_1\mathrm{d}x\le C\sqrt{n}\|f\|_1. \tag{3.14}$$

联合 (3.6)–(3.10) 以及 (3.14) 得到

$$\int_0^{\infty}\delta_n(x)|S'_{n\alpha}(f,x)|\mathrm{d}x\le C\sqrt{n}\|f\|_1. \tag{3.15}$$

从 (3.5) 和 (3.15) 知引理 3.1 成立. 证完.

引理 3.2 设 $f\in W_p$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $\delta_n(x)=\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{n}}$, 则有

$$\left\|\delta_n(x)S_{n\alpha}^{'}(f,x)\right\|_p\le C\|\delta_nf'\|_p. \tag{3.16}$$

证明 我们仍分 $p=\infty$ 和 $p=1$ 两种情况证明.

当 $p=\infty$ 时，由于 $S_{n\alpha}(1,x)=1,\ f(x)S'_{n\alpha}(1,x)=0$, 故有

$$\begin{aligned}\left|S_{n,\alpha}^{'}(f,x)\right|&=\left|\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\int_x^t f'(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}t\left(J_{n,k}^{\alpha}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha}(x)\right)'\right|\\&\le\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|\int_x^t f'(u)\mathrm{d}u\right|\mathrm{d}t\alpha\left\{[J_{n,k}^{\alpha-1}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)]J'_{n,k+1}(x)+J_{n,k}^{\alpha-1}(x)|p'_{n,k}(x)|\right\}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\left|\int_x^t \delta_n^{-1}(u)\mathrm{d}u\right| &\le C\left|\int_x^t \min\left\{\varphi^{-1}(u),\sqrt{n}\right\}\mathrm{d}u\right|\\ &\le C\min\left\{\frac{|t-x|}{\varphi(x)},\sqrt{n}|t-x|\right\}\le C\delta_n^{-1}(x)|t-x|.\end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned}&|\delta_n(x)S'_{n\alpha}(f,x)|\\ &\le C\|\delta_n f'\|_\infty\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|t-x|\mathrm{d}t\left\{[J_{n,k}^{\alpha-1}(x)-J_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)]J'_{n,k+1}(x)+J_{n,k}^{\alpha-1}(x)|p'_{n,k}(x)|\right\}\\ &=: C\|\delta_n f'\|_\infty\left(I_1+I_2\right).\end{aligned}\tag{3.17}$$

对于 $x\in E_n^c$, 应用 (2.2) 及 (2.5)(记 $p_{n,-1}(x)=0$), 有

$$\begin{aligned}I_2&=\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|t-x|\mathrm{d}tJ_{n,k}^{\alpha-1}(x)|p'_{n,k}(x)|\\ &\le\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|t-x|\mathrm{d}tn\left(p_{n,k-1}(x)+p_{n,k}(x)\right)\\ &\le 1+2nS_{n1}(|t-x|,x)\le 1+2\sqrt{n}\delta_n(x)\le 5.\end{aligned}\tag{3.18}$$

对于 $x\in E_n^c$, 考虑 I_1, 注意到 $J'_{n,0}(x)=0$, 有

$$\begin{aligned}I_1=&\sum_{k=1}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|t-x|\mathrm{d}tJ_{n,k}^{\alpha-1}(x)J'_{n,k}(x)-\\ &\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|t-x|\mathrm{d}tJ_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)J'_{n,k+1}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|t-x|\mathrm{d}tJ_{n,k}^{\alpha-1}(x)|p'_{n,k}(x)|\\ \le&\sum_{k=1}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(|t-x|-|\frac{1}{n}+t-x|\right)\mathrm{d}tJ_{n,k}^{\alpha-1}(x)J'_{n,k}(x)+I_2\\ \le&\sum_{k=1}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{1}{n}\mathrm{d}tJ'_{n,k}(x)+I_2\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}np_{n,k-1}(x)+I_2\le 6.\end{aligned}\tag{3.19}$$

由 (3.17)–(3.19) 知，对 $x\in E_n^c$, 有

$$|\delta_n(x)S'_{n\alpha}(f,x)|\le C\|\delta_n f'\|_\infty.\tag{3.20}$$

对于 $x\in E_n$, 则 $\delta_n(x)\sim\varphi(x)$, 于是应用 (2.4) 知

$$\begin{aligned}I_2\le&\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|t-x|\mathrm{d}t\frac{n}{\varphi^2(x)}\left|\frac{k}{n}-x\right|p_{n,k}(x)\\ \le&\left(\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|t-x|^2\mathrm{d}tp_{n,k}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|^2p_{n,k}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\frac{n}{\varphi^2(x)}\\ \le&\frac{\delta_n(x)}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}}\cdot\frac{n}{\varphi^2(x)}\le 2.\end{aligned}$$

由 (3.19) 的推导过程知： $x\in E_n$， $I_1\le 3$.
从而当 $x\in E_n$, 有

$$|\delta_n(x)S'_{n\alpha}(f,x)|\le C\|\delta_n f'\|_\infty. \tag{3.21}$$

从而可以得出

$$\|\delta_n(x)S'_{n\alpha}(f,x)\|_\infty\le C\|\delta_n f'\|_\infty. \tag{3.22}$$

下面考虑 $p=1$ 的情况．注意到 $J'_{n,0}(x)=0$, 对 $f\in W_p$, 有

$$\begin{aligned}S'_{n,\alpha}(f,x)&=\alpha\left[\sum_{k=1}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}tJ_{n,k}^{\alpha-1}(x)J'_{n,k}(x)-\sum_{k=0}^{\infty}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}tJ_{n,k+1}^{\alpha-1}(x)J'_{n,k+1}(x)\right]\\&=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}n\left(\int_0^{\frac1n}f(\frac kn+t)\mathrm{d}t-\int_0^{\frac1n}f(\frac{k-1}{n}+t)\mathrm{d}t\right)J_{n,k}^{\alpha-1}(x)J'_{n,k}(x)\\&=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}n\int_0^{\frac1n}\int_0^{\frac1n}f'(\frac{k-1}{n}+u+t)\mathrm{d}u\mathrm{d}tJ_{n,k}^{\alpha-1}(x)J'_{n,k}(x),\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}&\left|S'_{n,\alpha}(f,x)\right|\le\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac2n}\left|f'(\frac{k-1}{n}+v)\right|\mathrm{d}vJ'_{n,k}(x)\\&=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\frac2n}\left|f'(\frac kn+v)\right|\mathrm{d}vJ'_{n,k+1}(x)\\&=\alpha\left(\int_0^{\frac2n}|f'(v)|\mathrm{d}vJ'_{n,1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac2n}\left|f'(\frac kn+v)\right|\mathrm{d}vJ'_{n,k+1}(x)\right)\\&=:\alpha\left(Q_1+Q_2\right).\end{aligned} \tag{3.23}$$

先估计 $\int_0^\infty\delta_n(x)Q_2\mathrm{d}x$, 对 $k\ge1, 0\le v\le\frac2n$, 有

$$\int_0^{\frac2n}\left|f'(\frac kn+v)\right|\mathrm{d}v\le\varphi^{-1}(\frac kn)\int_0^{\frac2n}\varphi(\frac kn+v)\left|f'(\frac kn+v)\right|\mathrm{d}v.$$

因而

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\delta_n(x)Q_2\mathrm{d}x&\le\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac kn}^{\frac{k+2}{n}}\varphi(u)\left|f'(u)\right|\mathrm{d}un\int_0^\infty\varphi^{-1}(\frac kn)\delta_n(x)p_{n,k}(x)\mathrm{d}x\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac kn}^{\frac{k+2}{n}}\varphi(u)\left|f'(u)\right|\mathrm{d}u\cdot n\left(\int_0^\infty\varphi^{-2}(\frac kn)\delta_n^2(x)p_{n,k}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\frac{1}{\sqrt n}.\end{aligned}$$

估计上式右端积分，对于 $k\ge1, \frac nkp_{n,k}(x)=\frac1x\frac{k+1}{k}p_{n,k+1}(x)$, 故

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac nk\left(\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt n}\right)^2p_{n,k}(x)\mathrm{d}x\le4\int_0^\infty\frac nk\left(\varphi^2(x)+\frac1n\right)p_{n,k}(x)\mathrm{d}x\\&\le4\left(\int_0^\infty\varphi^2(x)\frac nkp_{n,k}(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty\frac1kp_{n,k}(x)\mathrm{d}x\right)\le4\left(2\int_0^\infty p_{n,k+1}(x)\mathrm{d}x+\frac1n\right)=\frac9n.\end{aligned}$$

因而推得

$$\int_0^\infty \delta_n(x)Q_2\mathrm{d}x \le C\|\varphi f'\|_1. \tag{3.24}$$

对于 Q_1, 由于 $\delta_n(u)\sqrt{n} \ge 1$, 故

$$\begin{aligned}\delta_n(x)Q_1 &= \delta_n(x)\int_0^{\frac{2}{n}} |f'(u)|\mathrm{d}uJ'_{n,1}(x)\\ &\le \delta_n(x)\int_0^{\frac{2}{n}} \sqrt{n}\delta_n(u)|f'(u)|\mathrm{d}u \cdot np_{n,0}(x) \le n^{\frac{3}{2}}\|\delta_n f'\|_1\delta_n(x)p_{n,0}(x),\end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \delta_n(x)Q_1\mathrm{d}x &\le n^{\frac{3}{2}}\|\delta_n f'\|_1\int_0^\infty \left(\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)p_{n,0}(x)\mathrm{d}x\\ &\le n^{\frac{3}{2}}\|\delta_n f'\|_1\left[\left(\int_0^\infty \varphi^2(x)p_{n,0}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}+n^{-\frac{3}{2}}\right]\\ &= \|\delta_n f'\|_1\left[n\left(\int_0^\infty \frac{1}{n}p_{n,1}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+1\right] = 2\|\delta_n f'\|_1.\end{aligned}$$

于是得到

$$\int_0^\infty \delta_n(x)Q_1\mathrm{d}x \le 2\|\delta_n f'\|_1. \tag{3.25}$$

从 (2.23), (3.25) 得

$$\int_0^\infty \delta_n(x)\left|S'_{n\alpha}(f,x)\right|\mathrm{d}x \le C\|\delta_n f'\|_1. \tag{3.26}$$

结合 (3.22) 和 (3.26), 引理 3.2 得证.

在引理 3.1 和引理 3.2 的基础上，我们可证明逆定理.

定理 3.1 设 $f \in L_p[0,\infty)$ $(1 \le p \le \infty)$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $0<\beta<1$, 则有

$$\|S_{n\alpha}(f,x)-f(x)\|_p = O\left(n^{-\frac{\beta}{2}}\right)$$

蕴含 $\omega_\varphi(f,t)_p = O\left(t^\beta\right)$.

证明 应用引理 3.1 和 3.2, 可用常规的方法证明定理 [5,p122],[6,p165]. 对于适当选择的 g, 有

$$\begin{aligned}K_\varphi(f,t)_p &\le \|f-S_{n\alpha}(f)\|_p + t\|\varphi S'_{n\alpha}(f)\|_p\\ &\le Cn^{-\frac{\beta}{2}} + t\left(\|\delta_n S'_{n\alpha}(f-g)\|_p + \|\delta_n S'_{n\alpha}(g)\|_p\right)\\ &\le Cn^{-\frac{\beta}{2}} + t\sqrt{n}\left(\|f-g\|_p + \frac{1}{\sqrt{n}}\|\delta_n g'\|_p\right)\\ &\le Cn^{-\frac{\beta}{2}} + t\sqrt{n}\left(\|f-g\|_p + \frac{1}{\sqrt{n}}\|\varphi g'\|_p + \frac{1}{n}\|g'\|_p\right)\\ &\le C\left(n^{-\frac{\beta}{2}} + \frac{t}{n^{-\frac{1}{2}}}\overline{K}_\varphi(f,n^{-\frac{1}{2}})_p\right) \le C\left(n^{-\frac{\beta}{2}} + \frac{t}{n^{-\frac{1}{2}}}K_\varphi(f,n^{-\frac{1}{2}})_p\right).\end{aligned}$$

根据 Berens-Lorentz 引理，上式蕴含 $K_\varphi(f,t)_p = O(t^\beta)$. 由 (1.3) 式知 $\omega_\varphi(f,t)_p = O(t^\beta)$. 定理证完.

由定理 2.1 和定理 3.1 可推出我们的等价定理：

定理 3.2 设 $f\in L_p[0,\infty)$ $(1\le p\le\infty)$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $0<\beta<1$, $\alpha\ge 1$, 则

$$\|S_{n\alpha}(f)-f\|_p=O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\beta}\right)\Leftrightarrow\ \omega_\varphi(f,t)_p=O\left(t^{\beta}\right).$$

证明 "$\Rightarrow$" : 见定理 3.1.

"$\Leftarrow$" : 由于 $\omega_\varphi(f,t)_p=O\left(t^\beta\right)$, 根据定理 2.1 可以得到 $\|S_{n\alpha}(f)-f\|_p=O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\beta}\right)$.

5 二阶光滑模的一点注

本节我们将要说明不能用二阶光滑模来刻划 $S_{n\alpha}$ 的逼近问题.

引理 4.1 设 $a_i,\ b_i>0$ $(i=0,1,\cdots,n-1;\ j=n+1,\cdots)$, $e_0>e_1>\cdots>e_{n-1}>e_{n+1}>\cdots>0$ 且 $\sum_{i=0}^{n-1}a_i=\sum_{j=n+1}^{\infty}b_j$, 有

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_ie_i>\sum_{j=n+1}^{\infty}b_je_j. \tag{4.1}$$

证明 关系 (4.1) 等价于

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_i\frac{e_i}{e_{n-1}}>\sum_{j=n+1}^{\infty}b_j\frac{e_j}{e_{n-1}}.$$

由于 $\frac{e_i}{e_{n-1}}>1$ 和 $\frac{e_j}{e_{n-1}}<1$, 可以得到

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_i\frac{e_i}{e_{n-1}}>\sum_{i=0}^{n-1}a_i=\sum_{j=n+1}^{\infty}b_j>\sum_{j=n+1}^{\infty}b_j\frac{e_j}{e_{n-1}}.$$

(4.1) 证得.

现在解释在正结果 (2.6) 中 $\omega_\varphi(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_p$ 不能由 $\omega_\varphi^2(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_p$ 代替.

取 $f(t)=t-1,\ \alpha=2,\ x=1,\ p=\infty$. 对于 $t>0$, $\omega_\varphi^2(f,t)_p=0$. 如果对于二阶光滑模 (2.6) 成立，那么应有 $\|S_{n,2}(f,1)-f(1)\|_\infty=0$, 也就是

$$\|S_{n,2}(f,1)\|_\infty=0. \tag{4.2}$$

然而

$$S_{n,2}(f,1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k-2n+1}{2n}[J_{n,k}^2(1)-J_{n,k+1}^2(1)]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k-2n+1}{2n}p_{n,k}(1)[J_{n,k}(1)+J_{n,k+1}(1)].$$

根据 (4.2), 得到

$$\begin{aligned}I_1=:&\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2n-2i-1}{2n}p_{n,i}(1)[J_{n,i}(1)+J_{n,i+1}(1)]\\=&\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{2j-2n+1}{2n}p_{n,j}(1)[J_{n,j}(1)+J_{n,j+1}(1)]=:I_2.\end{aligned} \tag{4.3}$$

取 $a_i = \frac{2n-2i-1}{n} p_{n,i}(1)$, $e_i = J_{n,i}(1)+J_{n,i+1}(1)$, $b_j = \frac{2j-2n+1}{2n} p_{n,j}(1)$, $e_j = J_{n,j}(1)+J_{n,j+1}(1)$ $(i = 0, \cdots, n-1;\ j = n+1, \cdots)$, 由于 $S_{n,1}(t-1,1) = 0$, 故 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j$. 显然, $e_0 > e_1 > \cdots > e_{n-1} > e_{n+1} > \cdots > 0$, 根据引理 4.1, 得到 $I_1 > I_2$, 这与 (4.3) 矛盾.

参考文献:

[1] CHANG Geng-zhe. *Generalized Bernstein-Bézier polynomial* [J]. J. Comput. Math., 1983, **1**(4): 322–327.

[2] LIU Zhi-xin. *Approximation of the Kantorovich-Bézier operators in* $L_p(0,1)$ [J]. Northeastern Math. J., 1991, **7**(2): 199-205.

[3] ZENG Xiao-ming. *On the rate of convergence of the generalized Szász type operators for bounded variation functions* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, **226**: 309–325.

[4] ZENG Xiao-ming, PIRIOU A. *On the rate of convergence of two Bernstein-Bézier type operators for bounded variation functions* [J]. J. Approx. Theory, 1998, **95**: 369–387.

[5] DITZIAN Z, TOTIK V. *Moduli of Smoothness Springer-Verlag* [M]. New York, 1987.

[6] GUO Shun-sheng, et al. *Pointwise estimate for Szasz-type operators* [J]. J. Approx. Theory, 1998, **94**: 160–171.

Approximation Theorem for Szász-Kantorovich-Bézier Operators in $L_p[0,\infty)$

GUO Shun-sheng, QI Qiu-lan, LI Qing

(College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)

Abstract: In this note we give the direct approximation theorem, inverse theorem and equivalence theorem for Szász-Kantorovich-Bézier operators in the space $L_p[0,\infty)$ $(1 \le p \le \infty)$ with Ditzian-Totik modulus.

Key words: Szász-Kantorovich-Bézier operator; direct and inverse theorems; K-functional; modulus of smoothness.