第26卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.4
2006年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)04-0757-07 **文献标识码**: A

几类微分方程解的迭代增长级数与零点迭代收敛指数

涂 金[1], 陈宗煊[2,3], 曹廷彬[4]

(1. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875; 2. 江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330027;
3. 华南师范大学数学系, 广东 广州 510631; 4. 山东大学数学与系统科学学院, 山东 济南 250100)
(E-mail: tujin2008@sina.com)

摘 要: 本文研究了几类微分方程解的迭代增长级及零点迭代收敛指数.

关键词: 微分方程; 迭代增长级; 零点迭代收敛指数.
MSC(2000): 30D05, 30D35
中图分类: O174.52

1 引言与结果

本文使用值分布理论的标准记号 [1], 并引入以下几个定义 [2]:

定义 1 整函数 $f(z)$ 的迭代级 $\sigma_p(f)$ 定义为:

$$\sigma_p(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_{p+1}M(r,f)}{\log r}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p T(r,f)}{\log r}.$$

定义 2 整函数 $f(z)$ 的迭代级的增长指标 $i(f)$ 定义为:

$$i(f)=\begin{cases}0 & \text{若 } f \text{ 是多项式;}\\ \min\{n\in N:\sigma_n(f)<\infty\} & \text{若 } f \text{ 是超越整函数, 且存在某个}\\ & n\in N \text{ 使得 } \sigma_n(f)<\infty;\\ \infty & \text{对于所有的 } n\in N \text{ 都有 } \sigma_n(f)=\infty.\end{cases}$$

注 1 类似地, 我们可以定义亚纯函数 $f(z)$ 的迭代下级 $\mu_p(f)$ 及其增长指标 $i_\mu(f)$.

定义 3 整函数 $f(z)$ 零点迭代收敛指数 $\lambda_p(f,0)$ 定义为:

$$\lambda_p(f,0)=\lambda_p(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p n(r,\frac{1}{f})}{\log r}\quad (p\in N).$$

$f(z)$ 取不同零点迭代收敛指数 $\overline{\lambda}_p(f,0)$ 定义为:

$$\overline{\lambda}_p(f,0)=\overline{\lambda}_p(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p \overline{n}(r,\frac{1}{f})}{\log r}\quad (p\in N).$$

收稿日期: 2004-09-28
基金项目: 国家自然科学基金 (10161006), 广东省自然科学基金 (04010360)

定义 4 整函数 $f(z)$ 零点迭代收敛指数的增长指标 $i_\lambda(f,0)$ 定义为:

$$i_\lambda(f,0)=i_\lambda(f)=\begin{cases}0 & \text{若 } n(r,\frac{1}{f})=O(\log r);\\ \min\{n\in N:\lambda_n(f)<\infty\} & \text{若存在某个 } n\in N \text{ 使}\\ & \text{得 } \lambda_n(f)<\infty;\\ \infty & \text{对于所有的 } n\in N \text{ 都}\\ & \text{有 } \lambda_n(f)=\infty.\end{cases}$$

1998 年, L. Kinnunen 研究了方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=0, \tag{1.1}$$

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=F, \tag{1.2}$$

和

$$f''+A(z)f=0 \tag{1.3}$$

解的迭代增长级及零点迭代收敛指数, 在 [2] 中得到:

定理 A 假设 $A_j(z)$ 是整函数 $(j=0,1,\cdots,k-1)$, 其中 $i(A_0)=p, i(A_j)<p$, 或 $\sigma_p(A_j)<\sigma_p(A_0)=\sigma(j=1,\cdots,k-1), 0<p<\infty$, 那么对于微分方程 (1.1) 的任一个非零解 f 有 $\sigma_{p+1}(f)=\sigma$.

定理 B 假设 $A(z)$ 是整函数, 满足 $i(A)=p, \overline{\lambda}_p(A)<\sigma_p(A), 1<p<\infty$, 那么方程 (1.3) 的任一非零解 f, 有 $\lambda_{p+1}(f)\le\sigma_p(A)\le\lambda_p(f)$.

本文完善了定理 A 和定理 B 的结果, 得到以下面几个定理:

定理 1 假设 $A_j(z)=\exp_p\{c_{jn}z^n+\cdots+c_{j0}\}(j=0,1,\cdots,k-1)$, 其中 $c_{jn},\cdots,c_{j0}$ 为非零实常数, 令 $\rho_j=\frac{c_{jn}}{c_{0n}}$, 若 $0<\rho_j<1(j=1,2,\cdots,k-1), 0<p<\infty$, 则对于微分方程 (1.1) 的任一个非零解 f 有 $\sigma_{p+1}(f)=n$.

推论 1 假设 $A_j(z)=B_j(z)\exp_p\{c_{jn}z^n+\cdots+c_{j0}\}(j=0,1,\cdots,k-1)$, 其中 $c_{jn},\cdots,c_{j0}$ 为非零实常数, $B_j(z)$ 为整函数满足 $i(B_j)<p(j\ne0), i(B_0)=1, 0<p<\infty$, 令 $\rho_j=\frac{c_{jn}}{c_{0n}}$, 若 $0<\rho_j<1(j=1,2,\cdots,k-1)$, 则对于微分方程 (1.1) 的任一个非零解 f 有 $\sigma_{p+1}(f)=n$.

定理 2 假设 $A_j(z)=\exp_p\{c_{jn}z^n+\cdots+c_{j0}\}(j=0,1,\cdots,k-1)$, 其中 $c_{jn},\cdots,c_{j0}$ 为非零实常数, 令 $\rho_j=\frac{c_{jn}}{c_{0n}}$, 若 $0<\rho_j<1(j=1,2,\cdots,k-1), 0<p<\infty, F\not\equiv0$ 为整函数, 且 $i(F)=q$, 则对于微分方程 (1.2) 下面 2 个结论成立:

(i) 假设 $q\le p+1$, 或者 $q=p+1$ 且 $\sigma_{p+1}(F)<n$, 那么方程 (1.2) 的所有解 f 都满足 $\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(f)=n$, 至多除去一个例外解 f_0 满足 $\sigma_{p+1}(f_0)<n$ 或 $i(f_0)<p+1$.

(ii) 假设 $q\ge p+1$, 或者 $q=p+1$ 且 $\sigma_{p+1}(F)>n$, 那么方程 (1.2) 的所有解 f 都满足 $\sigma_q(f)=\sigma_q(F)$.

定理 3 假设 $A(z)$ 是只含有有限个极点的亚纯函数, 满足 $i(A)=p, \overline{\lambda}_p(A)<\sigma_p(A), 1<p<\infty$, 且 $A(z)$ 的下级满足 $0<\mu(A)$ 或 $1<i_\mu(A)\le p$, 那么方程 (1.3) 的任一非零亚纯解 f, 满足 $\lambda_{p+1}(f)\le\sigma_p(A)\le\lambda_p(f)$.

2 引 理

引理 1[3] 假设 $f(z)$ 是整函数, $\alpha>1$ 是一给定的实常数, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 有

(i) 存在一个常数 $c>0$ 仅依赖于 α 和集合 $E_1\subset[0,+\infty)$ 具有有穷线测度，满足对所有满足 $|z|=r\notin E_1$ 的点 z,

$$|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}|\le c[T(\alpha r,f)r^{\varepsilon}\log T(\alpha r,f)]^k\quad(k\in N).\tag{2.1}$$

(ii) 存在一个常数 $c>0$ 仅依赖于 α 和集合 $E_2\subset[0,2\pi)$, 其线测度为 0, 对任意 $\varphi_0\in[0,2\pi)-E_2$, 存在一个常数 $R_0=R_0(\varphi_0)>0$, 满足对所有满足 $\arg z=\varphi_0$ 及 $|z|=r>R_0$ 的点 z,

$$|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}|\le c[T(\alpha r,f)\log T(\alpha r,f)]^k\quad(k\in N).\tag{2.2}$$

引理 2[2] 若整函数 $f(z)$ 满足 $i(f)=p\ge1$, 则 $\sigma_p(f)=\sigma_p(f')$.

引理 3[4] 设 $A_0,\dots,A_{k-1},F\not\equiv0$ 都是整函数， $f(z)$ 是方程 (1.2) 的任一整函数解，满足下面两个条件之一：

(1) $\max\{i(F)=q,i(A_j)(j=0,\cdots,k-1)\}<i(f)=n(0<n<\infty)$;

(2) $\max\{\sigma_n(F),\sigma_n(A_j)(j=0,\dots,k-1)\}\le b<\sigma_n(f)=\sigma$.

那么 $i_{\overline{\lambda}}(f)=i_\lambda(f)=i(f)=n$ 且 $\overline{\lambda}_n(f)=\lambda_n(f)=\sigma_n(f)=\sigma$.

引理 4[5] 假设 $f(z)$ 为整函数， $\sigma(f)=\beta<+\infty$, 那么对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个线测度和对数测度都为有穷的集合 $E_3\subset(1,+\infty)$, 当 $|z|=r\notin[0,1]\bigcup E_3$, 且 r 充分大时，有

$$\exp\{-r^{\beta+\varepsilon}\}\le|f(z)|\le\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}.\tag{2.3}$$

引理 5[6] 假设亚纯函数 $f(z)=g(z)/d(z)$, 其中 $g(z),d(z)$ 是整函数且满足 $\mu(g)=\mu(f)=\mu\le\sigma(g)=\sigma(f)\le+\infty,\lambda(d)=\sigma(d)=\lambda(\frac{1}{f})=\beta<\mu$. 当 $|z|=r$ 时， $|g(z)|=M(r,g)$, $\nu_g(r)$ 为 g 的中心指标，则当 $|z|=r\notin E_4$ 时，有

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n(1+o(1))\quad(n\in N).\tag{2.4}$$

其中 E_4 为对数测度有限的集合.

由引理 4 相同的证明方法我们容易得到下面这个引理：

引理 6 假设亚纯函数 $f(z)$ 满足 $i(f)=p(0<p<\infty)$ 且 $\sigma_p(f)=\sigma,i_\lambda(\frac{1}{f})=1$. 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在一个有限线性测度和有限对数测度集合 $E_5\subset(1,\infty)$, 当 $|z|=r\notin[0,1]\bigcup E_5$ 且 r 充分大时，有

$$|f(z)|\le\exp_p\{r^{\sigma+\varepsilon}\}.\tag{2.5}$$

引理 7[5] 假设 $g(z)$ 无穷级整函数，满足 $\sigma_2(g)=\sigma$, 则

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\nu_g(r)}{\log r}=\sigma.\tag{2.6}$$

其中 $\nu(r)$ 为 g 的中心指标.

由引理 7 相同的证明方法我们容易得到下面这个引理：

引理 8 假设整函数 $g(z)$ 满足 $i(g)=p(0<p<\infty)$, $\sigma_p(g)=\sigma$, 则

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p\nu_g(r)}{\log r}=\sigma_p(g)=\sigma.\tag{2.7}$$

其中 $\nu(r)$ 为 g 的中心指标.

引理 9[7] 假设 $f(z)$ 是开平面上的超越亚纯函数，则当 $r\to\infty$ 时,

$$T(r,f)\le(2+\frac{1}{k})N(r,\frac{1}{f})+(2+\frac{2}{k})\overline{N}(r,\frac{1}{f^{(k)}-1})+S(r,f). \tag{2.8}$$

其中 k 是任一正整数.

引理 10[8] 假设 $F(r)$ 与 $G(r)$ 是 $(0,\infty)$ 中的非减函数，如果 (1)$F(r)\le G(r)$ n.e.; 或 (2) 当 $r\notin[0,1]\bigcup E_6$ 时， $F(r)\le G(r)$, 其中 E_6 为对数测度有限的集合，则对任给常数 $\alpha>1$, 存在 $r_0>0$, 当 $r>r_0$ 时，有 $F(r)\le G(\alpha r)$ (其中 n.e. 表示在 $(0,\infty)$ 中除去一测度为有限的集合).

3 定理的证明

定理 1 的证明 我们分成 $c_{0n}>0$ 与 $c_{0n}<0$ 两种情况来证明:

(i) 假设 $c_{0n}>0$, 由方程 (1.1) 可得

$$|A_0|\le|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}|+\cdots+|A_j||\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}|+\cdots+|A_1||\frac{f'(z)}{f(z)}|. \tag{3.1}$$

由引理 1 可得，存在一个集合 E_1 具有有穷线测度，当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 时，有

$$|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}|\le M[rT(2r,f)]^{2k}\quad (j=1,2,\cdots,k), \tag{3.2}$$

其中 M 为正常数. 对于整函数 $A_0(z)$ 有

$$M(r,A_0)\ge\exp_p\{(1-\varepsilon)c_{0n}r^n\}, \tag{3.3}$$

由不等式 $|e^z|\le e^{|z|}$, 可知当 $|z|=r$ 充分大时，有

$$|A_j(z)|\le\exp_p\{|c_jz^n+\cdots|\}<\exp_p\{(1+\varepsilon)cr^n\}\quad (j=1,2,\cdots,k-1), \tag{3.4}$$

其中 $c=\max\{c_{jn},j\neq0\}$. 故对任意给定的 $\varepsilon(0<\varepsilon<\frac{c_{0n}-c}{c_{0n}+c})$, 当 $z=|r|$ 充分大且 $|A_0(z)|=M(r,A_0)$ 时，由 (3.1)–(3.4) 得

$$\exp_p\{(1-\varepsilon)c_{0n}r^n\}\le k\exp_p\{(1+\varepsilon)cr^n\}M[rT(2r,f)]^{2k}. \tag{3.5}$$

由 (3.5) 得

$$\sigma_{p+1}(f)\ge n.$$

另一方面，由 Wiman-Valiron[9−11] 理论可知，存在一个对数测度为有穷的集合 $E_7\subset(1,+\infty)$, 当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_7$ 且 $|f(z)|=M(r,f)$ 时，有

$$|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}|=(\frac{\nu_f(r)}{r})^j(1+o(1))\quad (j=1,\cdots,k). \tag{3.6}$$

因此，由 (1.1) 及 (3.6) 可知当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_7$ 且 $|f(z)|=M(r,f)$ 时，有

$$(\frac{\nu_f(r)}{r})^k|1+o(1)|\le k\exp_p\{(1+\varepsilon)c_{0n}r^n\}\}(\frac{\nu_f(r)}{r})^{k-1}|1+o(1)|. \tag{3.7}$$

由 (3.7) 可得 $\sigma_{p+1}(f) \le n$, 从而方程 (1.1) 的任一非零解 f 满足 $\sigma_{p+1}(f)=n$.

(ii) 假设 $c_{0n}<0$, 由 (i) 中同样的证明方法可得到结论.

推论 1 的证明 由引理 4 及定理 1 相同的证明方法容易证得推论 1.

定理 2 的证明 假设 f 是方程 (1.2) 的任一解， $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 是方程 (1.2) 所对应的齐次方程 (1.1) 的一个基础解系，则由定理 1 的证明可知 $\sigma_{p+1}(f_j)=n(j=1,2,\cdots,k)$ 且 $f(z)$ 可以表示为

$$f=D_1f_1+D_2f_2+\cdots+D_kf_k, \tag{3.8}$$

其中 $D_1,\cdots,D_k$ 为整函数满足

$$D_j^{'}=F\cdot G_j(f_1,\cdots,f_k)\cdot W(f_1,\cdots,f_k)^{-1} \quad (j=1,\cdots,k), \tag{3.9}$$

其中 $G_j(f_1,\cdots,f_k)$ 是 $f_1,\cdots,f_k$ 的常系数微分多项式， $W(f_1,\cdots,f_k)$ 是 $f_1,\cdots,f_k$ 的 Wronsky 行列式.

(i) 因为 $i(F)=q, q\le p+1$, 且当 $q=p+1$ 时有 $\sigma_{p+1}(F)<n$, 由 (3.9) 可得 $\sigma_{p+1}(D_j')\le n$, 又由 (3.8) 可得 $\sigma_{p+1}(f)\le n$.

我们断言方程 (1.2) 至多有一个例外解 f_0 满足 $\sigma_{p+1}(f_0)<n$ 或 $i(f_0)<p+1$, 对于满足 $\sigma_{p+1}(f)=n$ 的解 $f(z)$, 由引理 3, 可知 $\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(f)=n$. 事实上，假设方程 (1.2) 还有另外一个解 $f^*\not\equiv f_0$ 满足 $i(f^*)<p+1$ 或 $\sigma_{p+1}(f^*)<n$, 那么 $i(f_0-f^*)<p+1$ 或 $\sigma_{p+1}(f_0-f^*)<n$, 但 f_0-f^* 是方程 (1.1) 的解，这与定理 1 的结论 $\sigma_{p+1}(f_0-f^*)=n$ 矛盾.

(ii) 由 (3.8),(3.9), 已知条件, 可得 $\sigma_q(f)\le\sigma_q(F)$, 比较方程 (1.2) 两边的增长级可知 $\sigma_q(f)\ge\sigma_q(F)$, 故 $\sigma_q(f)=\sigma_q(F)$.

定理 3 的证明 我们分成 $\lambda_{p+1}(f)\le\sigma_p(A)$ 与 $\sigma_p(A)\le\lambda_p(f)$ 两部分来证明：

(i) 为了证明 $\lambda_{p+1}(f)\le\sigma_p(A)$, 先证明对于方程 (1.3) 的任一非零亚纯解 f 有 $\sigma_{p+1}(f)=\sigma_p(A)$.

(a) 由方程 (1.3) 及对数导数引理可得

$$m(r,A)=m(r,\frac{f''}{f})=O\{\log(rT(r,f))\}. \tag{3.10}$$

因为 $\lambda(\frac{1}{A})<\sigma(A)=\infty$, 故可得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log m(r,A)}{\log r}=\sigma_p(A). \tag{3.11}$$

由 (3.10),(3.11) 得 $\sigma_{p+1}(f)\ge\sigma_p(A)$.

(b) 由方程 (1.3) 可知任一亚纯解 f 的极点必为 A 的极点，因此 f 的极点为有限个，故 $\lambda(\frac{1}{f})=\lambda(\frac{1}{A})=0$, 根据 Hadamard 定理，设 $f(z)=\frac{g(z)}{d(z)}$, 这里 $g(z)$ 为整函数， $d(z)$ 为多项式，由方程 (1.3) 及定理条件可得

$$0<\mu(A)\le\mu(f)=\mu(g)\le\infty,$$

由 (3.10) 可知

$$i(g)=i(f)\ge p+1.$$

由引理 5, 存在集合 $E_4\subset(1,+\infty), lmE_4<\infty$, 当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_4, |g(z)|=M(r,g)$ 时，有

$$\frac{f^{(2)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^2(1+o(1)). \tag{3.12}$$

由引理 6, 存在集合 $E_5\subset(1,+\infty), lmE_5<\infty$, 当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_5$ 时有,

$$|A(z)|\le \exp_p\{r^{\sigma_p(A)+\varepsilon}\}. \tag{3.13}$$

将 (3.12),(3.13) 代入 (1.3) 得

$$\left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^2(1+o(1))\le \exp_p\{r^{\sigma_p(A)+\varepsilon}\}. \tag{3.14}$$

由引理 8 和 (3.14) 得

$$\sigma_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(g)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_{p+1}\nu_g(r)}{\log r}\le\sigma_p(A)+\varepsilon,$$

由 ε 的任意性, 可得 $\sigma_{p+1}(f)\le\sigma_p(A)$. 综合 (a),(b) 可得对于方程 (1.3) 的亚纯解 f 有 $\sigma_{p+1}(f)=\sigma_p(A)$, 故 $\lambda_{p+1}(f)\le\sigma_p(A)$.

(ii) 设 f 为方程 (1.3) 的亚纯解，故 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 不可能为有理函数，否则 $f(z)$ 就会具有 $f(z)=P_1(z)\exp(P_2(z))$, 其中 P_1,P_2 是多项式，从而 $f(z)$ 是有限级的，矛盾．因此，我们应用函数 $B(z)=\frac{f(z)}{f'(z)}$ 于引理 9, 于是有

$$T(r,B)\le 3N(r,\frac{1}{B})+4\overline{N}(r,\frac{1}{B'-1})+S(r,B),$$

或

$$T(r,B)=O\{N(r,\frac{1}{B})+\overline{N}(r,\frac{1}{B'-1})\}\quad r\notin E_8.$$

其中 E_8 的线测度 $mE_8<+\infty$. 但

$$N(r,\frac{1}{B})=N(r,\frac{f'}{f})=\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{f}),$$

$$\overline{N}(r,\frac{1}{B'-1})=\overline{N}(r,-\frac{f'^2}{ff''})=O\{\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f''})\},$$

故上式化为

$$T(r,\frac{f}{f'})=O\{\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{f''})\}\quad r\notin E_8. \tag{3.15}$$

此外，由 (1.3) 得

$$\overline{N}(r,\frac{1}{f''})\le\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{A}).$$

由于 $\lambda(\frac{1}{f})=\lambda(\frac{1}{A})=0$, 故 $\overline{N}(r,f)<\overline{N}(r,A)<r^M$, 其中 M 为任意小的正常数．于是 (3.15) 化为

$$T(r,\frac{f'}{f})=O\{\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{A})+r^M\}\quad r\notin E_8. \tag{3.16}$$

根据假设 $\overline{\lambda}_p(A) < \sigma_p(A)$ ，如果 $\sigma_p(A) \le \lambda_p(f)$ 不成立，即 $\lambda_p(f) < \sigma_p(A)$ 或 $0 < i_\lambda(f) < p$, 则由 (3.16) 及引理 10 得 $\sigma_p(\frac{f}{f'}) < \sigma_p(A)$, 令 $\varphi = \frac{f'}{f}$, 由于

$$T(r, \frac{f'}{f}) = T(r, \frac{f}{f'}) + o(1),$$

故有 $\sigma_p(\varphi) < \sigma_p(A)$, 然而从 (1.3) 易知 $-A = \varphi' + \varphi^2$, 因此我们得到

$$\sigma_p(A) \le \sigma_p(\varphi) < \sigma_p(A),$$

推出矛盾，故结论成立.

参考文献：

[1] 杨乐．值分布论及其新研究 [M]. 北京：科学出版社， 1982.
YANG Le. *Value Distribution Theory and Its New Researches* [M]. Beijing: Science Press, 1982. (in Chinese)

[2] KINNUNEN L. *Linear differential equations with solutions of finite iterated order* [J]. Southeast Asian Bull. Math., 1998, **22**: 385–405.

[3] GUNDERSEN G. *Estimates for the logarithmic derivate of a meromorphic function, plus similar estimates* [J]. London Math. Soc., 1988, **37**: 88–104.

[4] 曹廷彬．一类高阶微分方程解的复振荡性质 [D]. 江西师范大学硕士研究生学位论文， 2004.
CAO Ting-bin. *The Borel dirction of meromorphic function with iterated order and the complex oscillation theory of solutions of differential equations* [D]. The Dissertation of Mastor of Jiangxi Normal University, 2004. (in Chinese)

[5] CHEN Zong-xuan. *On the hyper-order of solutions of some second-order liner differential equations* [J]. Acta Math. Sinica, 2002, **1**: 79–88.

[6] CHEN Zong-xuan. *Some oscillation theorems for linear differential equations with meromorphic coefficients* [J]. Southeast Asian Bull. Math., 1999, **223**: 409–417.

[7] HAYMAN W. *Meromorphic Functions* [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[8] 高仕安，陈宗煊，陈特为．线性微分方程的复振荡理论 [M]. 武汉：华中理工大学出版社， 1998.
GAO Shi-an, CHEN Zong-xuan, CHEN Te-wei. *Complex Oscillation Theory of Linear Differential Equations* [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1998. (in Chinese)

[9] HAYMAN W. *The local growth of power series: a survey of the Wiman-Valiron method* [J]. Canad. Math. Bull., 1974, **17**: 317–358.

[10] 何育赞，萧修治．代数体函数与常微分方程 [M]. 北京：科学出版社， 1988.
HE Yu-zan, XIAO Xiu-zhi. *Algebroid Functions and Ordinary Differential Equations* [M]. Beijing : Science Press, 1988. (in Chinese)

[11] VALIRON G. *Lectures on the General Theory of Integral Functions* [M]. Chelsea, New York, 1949.

The Iterated Order and Iterated Convergence Exponent

TU Jin[1], *CHEN Zong-xuan*[2,3], *CAO Ting-bin*[4]

(1. School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, 100875, China;
2. Institute of Mathematics and Informations, Jiangxi Normal University, Nanchang, 330027, China;
3. Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou, 510631, China;
4. School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Ji'nan, 250100, China)

Abstract: In this paper, we investigate the iterated order and iterated convergence exponent to zero sequence of the solutions of some classes of differential equations.

Key words: differential equation; iterated order; iterated convergence exponent to zero sequence.