文章编号: 1000-341X(2006)04-0769-09 **文献标识码**: **A**

广义生灭最小 Q 过程的可配称性

吴群英
(桂林工学院数理系, 广西 桂林 541004)
(E-mail: base@glite.edu.cn)

摘 要: 研究全稳定广义生灭最小 Q 过程的可配称性, 获得广义生灭最小 Q 过程是可配称的充分必要条件, 以及最小 Q 过程是唯一的可配称 Q 过程的充分必要条件.

关键词: 广义生灭最小 Q 过程; 可配称; 唯一.
MSC(2000): 60J27, 60J99
中图分类: O211.62

1 引 言

设状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}$, 由于在许多现实模型中, 从任一状态 i 出发, 下一步不但能达相邻的状态 $i+1$ 或 $i-1$, 且能回到初始状态 0, 从 0 出发可以达到任意状态, 即它的 (拟)Q-矩阵具有如下形式

$$Q=\begin{pmatrix} -q_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\ d_1 & -(\lambda_1+d_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ d_2 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2+d_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ d_3 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3+d_3) & \lambda_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 $\lambda_i>0, d_i\ge 0, c_i\ge 0, i\ge 1; \mu_i>0, i\ge 2$, 如 $q_0<\infty$, 则 Q 是全稳定的, Q 过程一定存在, 例如 Feller 最小 Q 过程, 参见文献 [1–3]; 否则 Q 是单瞬时的, 这时 Q 过程不一定存在 [3−7], (1.1) 式的 Q- 矩阵可以看成是具有突变率 d_i 的广义生灭过程 (特别当 $d_1>0, c_1>0, d_i=0, c_i=0, i\ge 2$ 时, Q 即为通常的生灭过程); 有关生灭过程的研究已获得许多深刻的理想结果, 其主要结果被总结在侯振挺等的专著 [3]. 近几年我们系统研究了具有 (1.1) 式的 (拟)Q- 矩阵, 取得了一系列的结果, 关于单瞬时情形 Q 过程存在的充分必要条件, Q 过程的构造及其性质的结果见 [4–7], 全稳定情形的研究结果见 [8–11]; 文 [11] 具体构造了全稳定广义生灭最小 Q 过程, 本文在 [11] 的基础上, 研究全稳定广义生灭最小 Q 过程 $\Phi(\lambda)$ 的可配称性, 获得了 $\Phi(\lambda)$ 是可配称的充分必要条件, 以及 $\Phi(\lambda)$ 是唯一的可配称过程的充分必要条件.

2 若干引理

为方便, 以下简记形如 (1.1) 式的 Q- 矩阵和由此确定的 Q 过程为 Q- 矩阵和 Q 过程, 且记 $E_0=E-\{0\}, Q_{E_0}=\{q_{ij}; j\in E_0\}$ 是 Q 在 E_0 上的限制.

收稿日期: 2004-11-17
基金项目: 广西高校百名中青年学科带头人资助计划 (桂教人 [2005]64 号), 广西省自然科学基金 (桂科自 0447096)

引理 2.1[10] 记

$$z_1=0, z_2=\frac{1}{\lambda_1},\cdots, z_n=\frac{1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{\mu_2\mu_3\cdots\mu_{n-1}}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}}, n\geq 3,$$

$$z\hat{=}\lim_{n\to\infty} z_n=\frac{1}{\lambda_1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n};$$

$$\pi_1=1, \pi_n=\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}, n\geq 2.$$

则

(1) 方程

$$Q_{E_0}u=\mathbf{0}$$

的解 u 存在且解为

$$u_i=u_1+\sum_{j=1}^{i-1}(z_i-z_j)d_ju_j\pi_j.$$

方程

$$(\lambda I-Q_{E_0})u=\mathbf{0}, \lambda>0$$

的解 $u(\lambda)$ 存在且解为

$$u_i(\lambda)=u_1(\lambda)+\sum_{j=1}^{i-1}(z_i-z_j)(\lambda+d_j)u_j(\lambda)\pi_j. \tag{2.1}$$

(2) Q- 矩阵零流出的充分必要条件是

$$\overline{R}\hat{=}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+d_n}{\lambda_n}+\frac{\mu_n(1+d_{n-1})}{\lambda_n\lambda_{n-1}}+\cdots+\frac{\mu_n\cdots\mu_2(1+d_1)}{\lambda_n\cdots\lambda_2\lambda_1}+\frac{\mu_n\cdots\mu_2}{\lambda_n\cdots\lambda_1}\right)=\infty.$$

引理 2.2[10] 设 $u(\lambda)$ 是方程 $(\lambda I-Q_{E_0})u=\mathbf{0}, \lambda>0$ 的解，即由 (2.1) 给出，令

$$v_i(\lambda)=u_i(\lambda)\sum_{j=i}^{\infty}\frac{z_{j+1}-z_j}{u_j(\lambda)u_{j+1}(\lambda)}, i\geq 1,$$

$$\varphi_{ij}^*(\lambda)=\begin{cases} u_i(\lambda)v_j(\lambda)\pi_j, & j>i;\\ v_i(\lambda)u_j(\lambda)\pi_j, & j\leq i.\end{cases}$$

则 $\Phi^*(\lambda)=\{\varphi_{ij}^*(\lambda);\ i,j\in E_0\}$ 是最小 Q_{E_0} 过程.

引理 2.3[11] 设

$$\Phi(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Phi^*(\lambda)\end{pmatrix}+r_{00}(\lambda)\begin{pmatrix} 1\\ \xi(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \eta(\lambda)\end{pmatrix},$$

其中 $\Phi^*(\lambda)$ 是最小 Q_{E_0} 过程，即由引理 2.2 给出，

$$\eta(\lambda)=\mathbf{e}\Phi^*(\lambda), \mathbf{e}=(q_{0j}; j\in E_0)=(c_1,c_2,\cdots),$$

$$\xi(\lambda) = \mathbf{1} - \lambda\Phi^*(\lambda)\mathbf{1},$$

$$r_{00}(\lambda) = (c + \lambda + \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1})^{-1},$$

$$c = q_0 - \sum_{i=1}^{\infty} c_i.$$

则 $\Phi(\lambda)$ 是最小 Q 过程.

定义 2.1　称 $W = (w_i; i \in E)$ 是正分布，如果 $w_i > 0, i \in E$, 且 $\sum_{i\in E} w_i = 1$.

称 Q- 矩阵可配称，如果存在正分布 $W = (w_i; i \in E)$, 使

$$w_i q_{ij} = w_j q_{ji}, i, j \in E.$$

此时称 W 为 Q 的配称分布.

定义 2.2　称 Q 过程 $P(t) = (p_{ij}(t); i, j \in E, t \geq 0)$ 是可配称的，如果存在正分布 $W = (w_i; i \in E)$, 使

$$w_i p_{ij}(t) = w_j p_{ji}(t), i, j \in E, t \geq 0$$

等价于

$$w_i \psi_{ij}(\lambda) = w_j \psi_{ji}(\lambda).$$

其中 $\psi_{ij}(\lambda)$ 是 $p_{ij}(t)$ 的拉氏变换. 此时称 W 是 $P(t)$ 或 $\Psi(\lambda)$ 的配称分布.

引理 2.4　Q- 矩阵可配称的充分必要条件是

$$\pi_j = \frac{c_j}{d_j}\frac{d_1}{c_1}, j \geq 1; \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j < \infty. \tag{2.2}$$

且其唯一的可配称分布为

$$w_0 = (1 + \frac{c_1}{d_1}\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j)^{-1}, w_j = \frac{c_j}{d_j} w_0 = \pi_j w_1, j \geq 1. \tag{2.3}$$

证明　设 Q- 矩阵可配称，则存在正分布

$$W = (w_0, w_1, w_2, \cdots),$$

使

$$w_i q_{ij} = w_j q_{ji}, i, j \in E,$$

取 $i = 1$, 由 $\pi_1 = 1$ 得 $w_1 = \pi_1 w_1$; 当 $i \geq 2$, 取 $j = i - 1 \geq 1$, 得

$$w_i q_{i,i-1} = w_{i-1} q_{i-1,i}$$

即

$$w_i \mu_i = w_{i-1}\lambda_{i-1},$$

所以有

$$w_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} w_{i-1} = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\frac{\lambda_{i-2}}{\mu_{i-1}} w_{i-2} = \cdots = \frac{\lambda_{i-1}\lambda_{i-2}\cdots\lambda_1}{\mu_i\mu_{i-1}\cdots\mu_2} w_1 = \pi_i w_1,$$

取 $i=0,\ j\geq 1$, 有 $w_0c_j=w_jd_j$, 综合即得

$$w_j=\frac{c_j}{d_j}w_0,\pi_j=\frac{w_j}{w_1}=\frac{c_j}{d_j}\frac{d_1}{c_1},j\geq 1,$$

又由于 W 是分布，因此,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j=\frac{1}{w_1}\sum_{j=1}^{\infty}w_j=\frac{w_0}{w_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{d_j}<\infty,$$

即 (2.2) 成立．又由

$$1=\sum_{i=0}^{\infty}w_i=w_0+\sum_{i=1}^{\infty}w_i=w_0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{d_i}w_0=w_0(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{d_i}),$$

得

$$w_0=(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{d_j})^{-1}=(1+\frac{c_1}{d_1}\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j)^{-1},$$

故可配称分布 $W=(w_0,w_1,w_2,\cdots)$ 必由 (2.3) 所给出.

反之，如 (2.2) 成立，则由 (2.3) 定义的 W 有意义，且可验证

$$w_iq_{ij}=w_jq_{ji},i,j\in E,$$

及

$$\sum_{j=0}^{\infty}w_j=w_0+\sum_{j=1}^{\infty}w_j=w_0(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{d_j})=1,$$

即 $(w_0,w_1,w_2,\cdots)$ 是 Q 的可配称分布.

3 最小 Q 过程的可配称性

本节研究全稳定广义生灭最小 Q 过程的可配称性，获得广义生灭最小 Q 过程是可配称的充分必要条件，以及最小 Q 过程是唯一的可配称 Q 过程的充分必要条件.

定理 3.1 Q 可配称的充分必要条件是其最小 Q 过程 $\Phi(\lambda)$(由引理 2.3 给出) 可配称，且由 (2.3) 确定的 $(w_0,w_1,w_2,\cdots)$ 是它们的配称分布.

证明 设 $\Phi(\lambda)$ 可配称， $(w_0,w_1,w_2,\cdots)$ 是它的配称分布，则有

$$w_if_{ij}(t)=w_jf_{ji}(t),i,j\in E,t\geq 0,$$

其中， $F(t)$ 是对应的最小 Q 过程，由此得

$$w_if'_{ij}(0)=w_jf'_{ji}(0),i,j\in E,t\geq 0,$$

即

$$w_iq_{ij}=w_jq_{ji},i,j\in E.$$

故 $W=(w_0,w_1,w_2,\cdots)$ 是 Q 的配称分布.

反之，设 Q 可配称，由引理 2.4 知 (2.2) 成立，且 Q 的配称分布必为 (2.3), 下只要证 (2.3) 也是 $\Phi(\lambda)$ 的配称分布即可.

由 [3] 最小 Q 过程的构造知

$$\varphi_{ij}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{ij}^{(n)}(\lambda),$$

其中

$$\varphi_{ij}^{(0)}(\lambda)=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i},$$

$$\varphi_{ij}^{(n+1)}(\lambda)=\sum_{k\neq j}\frac{\varphi_{ik}^{(n)}(\lambda)q_{kj}}{\lambda+q_j}=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}\varphi_{kj}^{(n)}(\lambda)}{\lambda+q_i}.$$

令

$$\widetilde{\varphi}_{ij}^{(n)}(\lambda)=\varphi_{ji}^{(n)}(\lambda)\frac{w_j}{w_i},\tag{3.1}$$

$$\widetilde{\varphi}_{ij}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{ij}^{(n)}(\lambda).$$

则有

$$\widetilde{\varphi}_{ij}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{ji}^{(n)}(\lambda)\frac{w_j}{w_i}=\varphi_{ji}(\lambda)\frac{w_j}{w_i},\tag{3.2}$$

下归纳证明

$$\widetilde{\varphi}_{ij}^{(n)}(\lambda)=\varphi_{ij}^{(n)}(\lambda),\forall n.\tag{3.3}$$

当 $n=0$ 时，有

$$\widetilde{\varphi}_{ij}^{(0)}(\lambda)=\varphi_{ji}^{(0)}(\lambda)\frac{w_j}{w_i}=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}\frac{w_j}{w_i}=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}=\varphi_{ij}^{(0)}(\lambda);$$

归纳假设 (3.2) 对 n 时已成立. 则由 (3.1) 及 $w_jq_{jk}=w_kq_{kj}$ 得

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_{ij}^{(n+1)}(\lambda)&=\varphi_{ji}^{(n+1)}(\lambda)\frac{w_j}{w_i}=\sum_{k\neq j}\frac{q_{jk}\varphi_{kj}^{(n)}(\lambda)}{\lambda+q_j}\frac{w_j}{w_i}\\&=\sum_{k\neq j}\frac{q_{jk}\widetilde{\varphi}_{kj}^{(n)}(\lambda)}{\lambda+q_j}\frac{w_j}{w_i}=\sum_{k\neq j}\frac{q_{jk}\varphi_{ik}^{(n)}(\lambda)\frac{w_j}{w_k}}{\lambda+q_j}\frac{w_j}{w_i}\\&=\sum_{k\neq j}\frac{\varphi_{ij}^{(n)}(\lambda)q_{kj}}{\lambda+q_j}=\varphi_{ij}^{(n+1)}(\lambda).\end{aligned}$$

故 (3.3) 成立，从而得 $\widetilde{\varphi}_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)$, 再由 (3.2) 得

$$w_i\varphi_{ij}(\lambda)=w_j\varphi_{ji}(\lambda).$$

故 $\{w_i\}$ 也是 $\Phi(\lambda)$ 的可配称分布.

定理 3.2 设 Q 可配称，则其最小 Q 过程 $\Phi(\lambda)$ 是唯一的可配称 Q 过程的充分必要条件是 $\overline{R}=\infty$.

证明 如 $\overline{R}<\infty$, 设 $\overline{X}(\lambda)$ 是 Q 的最大流出解, 则 $\lambda\sum_{i\in E}w_i\overline{X}_i(\lambda)$ 关于 λ 单调上升. 又由引理 2.1(2) 得 $\overline{X}(\lambda)\neq\mathbf{0}$.

(i) 如 $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum_{i\in E}w_i\overline{X}_i(\lambda)=\infty$, 令

$$z_i(\lambda)=(\mathbf{1}-\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1})_i,\eta_i(\lambda)=w_iz_i(\lambda),i\in E,$$

显然 $z_i(\lambda)$ 是列协调族, 由 $\varphi_{ij}(\lambda)$ 可配称得

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}\eta_k(\lambda)\varphi_{kj}(\mu)&=(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}w_kz_k(\lambda)\varphi_{kj}(\mu)=(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}w_j\varphi_{jk}(\mu)z_k(\lambda)\\&=w_j(z_j(\mu)-z_j(\lambda))=\eta_j(\mu)-\eta_j(\lambda).\end{aligned}$$

故

$$\eta(\lambda)\in L_{\Phi(\lambda)},$$

且

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}=\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{i\in E}\lambda w_iz_i(\lambda)=\infty.$$

由文献 [1] 定理 2.6 知

$$\psi_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+\frac{z_i(\lambda)w_jz_j(\lambda)}{c+\lambda\sum\limits_{k\in E}w_kz_k(\lambda)}$$

是 Q 过程. 又由

$$\begin{aligned}w_i\psi_{ij}(\lambda)&=w_i\varphi_{ij}(\lambda)+\frac{w_iz_i(\lambda)w_jz_j(\lambda)}{c+\lambda\sum\limits_{k\in E}w_kz_k(\lambda)}=w_j\varphi_{ji}(\lambda)+w_j\frac{z_j(\lambda)w_iz_i(\lambda)}{c+\lambda\sum\limits_{k\in E}w_kz_k(\lambda)}\\&=w_j\psi_{ji}(\lambda),\end{aligned}$$

故 $\Psi(\lambda)=(\psi_{ij}(\lambda);i,j\in E)$ 是可配称 Q 过程.

(ii) 如 $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum\limits_{i\in E}w_i\overline{X}_i(\lambda)<+\infty$, 则

$$A\hat{=}\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum_{i\in E}w_i\overline{X}(\lambda)(1-\overline{X}_i)<\infty,$$

其中 $\overline{X}_i=\lim_{\lambda\to0}\overline{X}_i(\lambda)$, 由可配称性, 易得 $\eta_j(\lambda)\hat{=}w_j\overline{X}_j(\lambda)$ 是行协调族. 取 $C>A$, 令

$$\psi_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+\frac{\overline{X}_i(\lambda)w_j\overline{X}_j(\lambda)}{C+\lambda\sum\limits_{k\in E}w_k\overline{X}_k(\lambda)(1-\overline{X}_k)},$$

则由文献 [1] 定理 2.6 知 $\Psi(\lambda)$ 是 Q 过程, 直接验证可得 $\Psi(\lambda)=(\psi_{ij}(\lambda);i,j\in E)$ 是不同于 $\Phi(\lambda)$ 的可配称 Q 过程.

综合即得如 $\overline{R}<\infty$, 则可配称 Q 过程不唯一.

反之, 如 $\overline{R}=\infty$, 即 Q 零流出, 下证可配称 Q 过程唯一. 类似于 [11] 定理 3.1 可得, 任意 Q 过程具有下列式

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\Phi^*(\lambda)\end{pmatrix}+r_{00}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\\xi(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad\eta(\lambda)),$$

其中

$$(\eta(\lambda), \xi(\lambda)) \in D_{\Phi^*(\lambda)}, \xi(\lambda) = \mathbf{1} - \lambda\Phi^*(\lambda)\mathbf{1},$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda) = \mathbf{e}, \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\xi(\lambda) = \mathbf{d},$$

$$r_{00}(\lambda) = (c + \lambda + \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1})^{-1}.$$

即

$$r_{ij}(\lambda) = \varphi^*_{ij}(\lambda) + r_{00}(\lambda)\xi_i(\lambda)\eta_j(\lambda), i, j \geq 1,$$

$$r_{0j}(\lambda) = r_{00}(\lambda)\eta_j(\lambda), j \geq 1,$$

$$r_{i0}(\lambda) = r_{00}(\lambda)\xi_i(\lambda), i \geq 1.$$

所以，当 $i > 1$ 时，有

$$\sum_{j\in E} r_{ij}(\lambda) = r_{i0}(\lambda) + \sum_{j\in E_0} \left(\varphi^*_{ij}(\lambda) + r_{00}(\lambda)\xi_i(\lambda)\eta_j(\lambda)\right),$$

由此得

$$\lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E} r_{ij}(\lambda)) = -\lambda r_{00}(\lambda)\lambda\xi_i(\lambda) + \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E_0} \varphi^*_{ij}(\lambda)) - \lambda r_{00}(\lambda)\lambda\xi_i(\lambda)\sum_{j\in E_0} \eta_j(\lambda),$$

由

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda r_{00}(\lambda) = 1,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\xi_i(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E_0} \varphi^*_{ij}(\lambda)) = d_i,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{j\in E_0} \eta_j(\lambda) = 0,$$

得

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E} r_{ij}(\lambda)) = 0, i \geq 1; \tag{3.4}$$

当 $i = 0$ 时，由 $R(\lambda)$ 可配称得

$$w_0 r_{00}(\lambda)\eta_j(\lambda) = w_0 r_{0j}(\lambda) = w_j r_{j0}(\lambda) = w_j r_{00}(\lambda)\xi_j(\lambda),$$

即

$$w_0\eta_j(\lambda) = w_j\xi_j(\lambda), \tag{3.5}$$

所以

$$\begin{aligned} w_0 \sum_{j\in E} r_{0j}(\lambda) &= w_0 r_{00}(\lambda) + \sum_{j\in E_0} r_{00}(\lambda) w_0 \eta_j(\lambda) \\ &= r_{00}(\lambda) + r_{00}(\lambda) \sum_{j\in E_0} w_j\xi_j(\lambda). \end{aligned}$$

由此得

$$w_0\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}r_{0j}(\lambda))=w_0\lambda(1-\lambda r_{00}(\lambda))-\lambda r_{00}(\lambda)\sum_{j\in E_0}w_j\lambda\xi_j(\lambda). \tag{3.6}$$

又因为

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\xi_j(\lambda)=d_j, j\in E_0,$$

所以，当 λ 充分大时，有

$$\lambda\xi_j(\lambda)\le d_j+1.$$

而由引理 2.4 知

$$w_j=\frac{c_j}{d_j}w_0,$$

所以有

$$\sum_{j\in E_0}w_j(d_j+1)=w_0\sum_{j\in E_0}c_j+\sum_{j\in E_0}w_j<\infty.$$

故由控制收敛定理， Q 条件即

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(1-\lambda r_{00}(\lambda))=q_0, \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta_i(\lambda)=c_i,$$

及 (3.6), (3.5) 得

$$\begin{aligned}w_0\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}r_{0j}(\lambda))&=w_0q_0-\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda r_{00}(\lambda)\sum_{j\in E_0}\lim_{\lambda\to+\infty}w_j\lambda\xi_j(\lambda)\\&=w_0q_0-\sum_{j\in E_0}\lim_{\lambda\to+\infty}w_0\lambda\eta_j(\lambda)=w_0q_0-\sum_{j\in E_0}c_j.\end{aligned}$$

即

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}r_{0j}(\lambda))=q_0-\sum_{j=1}^{\infty}c_j.$$

结合 (3.4) 知， $R(\lambda)$ 是 B 型 Q 过程，而 $\overline{R}=\infty$ 的充分必要条件是 B 型 Q 过程唯一，即 $R(\lambda)$ 是最小 Q 过程.

例 在形如 (1.1) 的 Q- 矩阵中，设

$$\lambda_n=4^{2n+1}, d_n=2^n, c_n=\frac{1}{2^{n-1}}, n\ge1, \mu_n=4^{2n}, n\ge2, q_0\ge2.$$

则可算出

$$\pi_j=\frac{c_j}{d_j}\frac{d_1}{c_1}=\frac{1}{4^{j-1}}, j\ge1,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{4^{j-1}}=\frac{4}{3}<\infty.$$

所以，由引理 2.4 知 Q- 矩阵可配称．又

$$\overline{R}=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{4^{n+2}}-\frac{1}{4^{2n-2}})+\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{2^{2n+4}}-\frac{1}{2^{3n+2}})<\infty.$$

由定理 3.2 知，可配称 Q 过程不唯一．且 $w_0=\frac{3}{5}, w_n=\frac{3}{5\cdot 2^{2n-1}}$，$n\geq 1$, 是可配称 Q 过程的配称分布.

参考文献：

[1] ANDERSON W J. *Continuous-Time Markov Chains* [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
[2] FELLER W. *On the integro-differential equations of purely discontinuous Markov processes* [J]. Trans. Ann. Math. Soc., 1940, **48**: 488–515.
[3] 侯振挺，刘再明，张汉君．等．生灭过程 [M]. 长沙：湖南科学技术出版社， 2000.
HOU Zhen-ting, LIU Zai-ming, ZHANG Han-jun. et al. *Birth-Death Process* [M]. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 2000. (in Chinese)
[4] WU Qun-ying, ZHANG Han-jun, HOU Zhen-ting. *An extended birth-death Q-matrix with instantaneous state (I)* [J]. Chinese J. Contemp. Math., 2003, **24**(2): 159–168.
[5] 吴群英，张汉君，侯振挺. 具有突变率、含瞬时态的广义生灭矩阵 (I) [J]. 数学年刊 (A 辑), 2003, **24**(2): 187–192.
WU Qun-ying, ZHANG Han-jun, HOU Zhen-ting. *An extended birth-death Q-matrix with instantaneous state (I)* [J]. Chinese Ann. Math. Ser.A, 2003, **24**(2): 187–192. (in Chinese)
[6] WU Qun-ying, ZHANG Han-jun, HOU Zhen-ting. *An extended birth-death Q-matrix with instantaneous state (II)* [J]. Chinese J. Contemp. Math., 2003, **24**(4): 317–328.
[7] 吴群英，张汉君，侯振挺．具有突变率、含瞬时态的广义生灭矩阵 (II) [J]. 数学年刊 (A 辑), 2003, **24**(5): 555–564.
WU Qun-ying, ZHANG Han-jun, HOU Zhen-ting. *An extended birth-death Q-matrix with instantaneous state (II)* [J]. Chinese Ann. Math. Ser.A, 2003, **24**(5): 555–564. (in Chinese)
[8] 吴群英，张汉君．广义全稳定生 - 灭过程 [J]. 系统科学与数学， 2003, **23**(4): 517–528.
WU Qun-ying, ZHANG Han-jun. *An extended birth-death process* [J]. J. Systems Sci. Math. Sci., 2003, **23**(4): 517–528. (in Chinese)
[9] 吴群英．广义生灭过程 – 强遍历性 [J]. 工程数学学报， 2002, **19**(1): 104–108.
WU Qun-ying. *An extended birth-death process with catastrophes–strong ergodicity* [J]. Gongcheng Shuxue Xuebao, 2002, **19**(1): 104–108. (in Chinese)
[10] WU Qun-ying. *The minimal Q-process and its properties for an extended birth-death Q-matrix* [J]. Math. Appl.(Wuhan), 2002, **15**(4): 79–84.
[11] 吴群英，林亮．全稳定广义生 - 灭最小 Q 过程的构造 [J]. 广西科学， 2005, **12**(1): 10–13.
WU Qun-ying, LIN Liang, *The minimal Q-process for a stable extended birth-death Q-matrix* [J]. Guangxi Sciences, 2005, **12**(1): 10-13. (in Chinese)

Symmetric Properties for an Extended Birth-Death Minimal Q-Process

WU Qun-ying
(Dept. of Math. and Phys., Guilin University of Technology, Guangxi 541004, China)

Abstract: A new structure with the special property that catastrophes is imposed to ordinary birth-death processes is considered. The symmetric properties for the Markov minimal Q-process are presented.

Key words: stable extended birth-death minimal Q-process; symmetric; uniqueness.