

$R(G) \geq -1$ 的图族伴随多项式最小根极值的刻画

任海珍, 刘儒英

(青海师范大学数学与信息科学系, 青海 西宁 810008)

(E-mail: qhsdrhz@sina.com)

摘要: 本文引入了图族伴随多项式的最小根极值, 用它刻画了特征标不小于 -1 的图族伴随多项式的最小根极值, 给出了其对应的极图, 并由此得到了一些有关这些图族伴随多项式最小根序关系的新结果.

关键词: 伴随多项式; 特征标; 最小根; 序.

MSC(2000): 05C15

中图分类号: O157.5

1 引言

本文仅考虑有限、无向的简单图. 设图 G 阶为 n , 把每个分支都是完全图的 G 的生成子图称作 G 的理想子图, 多项式 $h(G, x) = \sum_{i=1}^n N(G, i)x^i$ 被定义为图 G 的伴随多项式 [2], 这里 $N(G, i)$ 表示图 G 的具有 i 个分支的理想子图的个数.

伴随多项式是色多项式的一种代数变形, 这使得我们可利用图 G 的伴随多项式来研究 $K_n - E(G)$ 的色等价划分、色唯一性. 尤其是对于边数较多的图这方面已取得许多成果, 可参见综述文献 [2]. 文 [8]–[10] 说明利用伴随多项式的最小根可促使这一工作的简化, 因此寻找图的伴随多项式最小根的序是有意义的. 本文主要给出了一个比较一元实系数多项式最小实根的方法 (见定理 1), 从而推广了文献 [8] 和 [9] 所给出的主要判断方法. 另外, 引入了图族伴随多项式的最小根极值, 用它刻画了特征标不小于 -1 的图族伴随多项式的最小根极值, 给出了其对应的极图, 并由此得到了一些有关这些图族伴随多项式最小根序关系的新结果.

以下用 $R(G)$, $V(G)$, $E(G)$ 分别表示图 G 的特征标、顶点集和边集. $P_n (n \geq 2)$ 和 $C_n (n \geq 4)$ 分别表示有 n 个顶点的路和圈, 未说明的术语和记号可参见文献 [1] 和 [2].

2 预备知识

定义 $h(G, x) = x^{\alpha(G)} h_1(G, x)$, 其中 $\alpha(G)$ 是 $h(G, x)$ 的最低次项的次数.

约定: $h(G, x) = h(G)$, $h_1(G, x) = h_1(G)$, $h(P_0) = 1$, $h(P_1) = x$, $h(D_3) = h(C_3) = h(K_3)$.

定义 1 图 G 的一条简单路是指其内部顶点在 G 中均为 2 度的路. 若此简单路的端点在 G 中的度均不小于 3, 则称其为图 G 的一条内部路.

由伴随多项式的定义知, 伴随多项式 $h(G, x)$ 一定有实根, 用 $\beta(h(G, x))$ 表示 $h(G, x)$ 的最小实根, 简记为 $\beta(G)$.

收稿日期: 2004-06-28

基金项目: 国家自然科学基金 (10461009), 教育部自然科学重点研究项目 (205170)

定义 2 设 $e \in E(G)$, 若在边 e 上相继插入 k 个二度点, 则表示对图 G 的边 e 进行了 k -剖分 (特别地, $k=0$ 意指未剖分), $k+1$ 为边 e 的剖分数. 选取 $e_i \in E(G)$, $(1 \leq i \leq t)$, 对 e_i 进行 $(l_i - 1)$ -剖分 ($l_i \geq 1$), 将得到的所有阶为 n 的同胚图族记为 $G_n = G_n(l_1, l_2, \dots, l_t)$. 定义 $h(G_n, x)$ 的最小根极值分别为

$$\beta_{\max}(G_n) = \max\{\beta(H) | H \in G_n\}, \quad \beta_{\min}(G_n) = \min\{\beta(H) | H \in G_n\}.$$

我们将 $\beta_{\max}(G_n)$, $\beta_{\min}(G_n)$ 在 G_n 中对应的图称为 G_n 的极图, 分别记为 $\max(G_n)$, $\min(G_n)$. 易知 $t=1$ 时, 有 $\beta_{\max}(G_n) = \beta(G_n) = \beta_{\min}(G_n)$.

引理 1^[2-4] 设 G 为阶 n 的连通图, 则 $R(G) \leq 1$, 等号成立当且仅当 $G \in \{P_n, K_3 | n \geq 2\}$; 并且 (1) $R(G) = 0$ 当且仅当 $G \in \{C_n, D_n, T_n, K_1 | n \geq 4\}$; (2) $R(G) = -1$ 当且仅当 $G \in \{F_n, \xi_n^1, \xi_n^2, \xi_n^3, K_4^-\}$, 如图 1 所示.

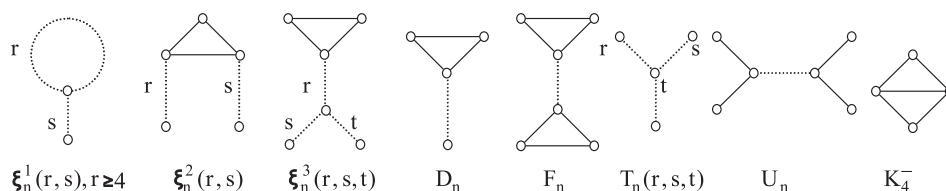


图 1 虚线部分代表简单路, 如不特别说明其路长 r, s, t 均大于等于 1

引理 2^[3] 设 e 是图 G 的任意一条边, 则 $h(G, x) = h(G - e) + h(G * e)$.

引理 3^[5] 对图 G , 选取 $v \in V(G)$, $N_G(v) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. 设 $H|_v$ 是图 G 的点 v 分裂图, 则 $h_1(G) = h_1(H|_v)$, 当且仅当 $\forall x \in A, y \in B$, 均有 $xy \in E(G)$.

引理 4^[6] 设 uv 是连通图 G 的任意一条边, 则有

- (1) 若 uv 不属于图 G 的内部路且 $G \neq C_n$, 则 $\lambda_1(G_{uv}) > \lambda_1(G)$;
- (2) 若 uv 属于图 G 的内部路且 $G \neq U_n$, 则 $\lambda_1(G_{uv}) < \lambda_1(G)$.

引理 5^[7] 设 $1 \leq r_1 \leq r_2, r_1 < s_1 \leq s_2, r_1 + r_2 = s_1 + s_2$, 其中 r_1, r_2, s_1, s_2 皆为正整数, 则 $h(P_{r_1})h(P_{r_2}) - h(P_{s_1})h(P_{s_2}) = (-1)^{r_1} x^{r_1+1} h(P_{s_1-r_1-1})h(P_{s_2-r_1-1})$.

引理 6^[8,9] (1) $\beta(P_{n+1}) < \beta(P_n), n \geq 2$;

(2) $\beta(K_4^-) < \beta(C_{n+1}) < \beta(C_n), n \geq 3$;

(3) $\beta(D_{n+1}) < \beta(D_n), n \geq 4$;

(4) $\beta(F_m) < \beta(F_{m+1}) < \beta(D_n) < \beta(C_n) < \beta(P_n), n \geq 5, m \geq 6$.

引理 7^[3,9] 设 n 阶树 T 邻接矩阵的正特征根依次为 $\lambda_1(T) \geq \lambda_2(T) \geq \dots \geq \lambda_q(T)$, q 为 T 的边独立数. 那么 T 的伴随多项式的所有非零根为 $\beta_i(T) = -\lambda_i^2, i = 1, 2, \dots, q$.

引理 8^[10] 设图 G_1 是连通图 G 的真子图, 则 $\beta(G_1) > \beta(G)$.

引理 9 设边 $uv \in E(G)$, G_{uv} 表示对 uv 进行了 1-剖分而得到的图. 若图 G 是一棵树 (或图 G 的三角形二度点分裂图是一棵树, 记为 $T|_G$), 则

- (i) 若 uv 不属于树 G (或 $T|_G$) 的内部路, 则 $\beta(G_{uv}) < \beta(G)$;
- (ii) 若 uv 属于树 G (或 $T|_G$) 的内部路且 $G \neq U_n$, 则 $\beta(G_{uv}) > \beta(G)$.

证明 由引理 3、4 和 7 易证.

3 主要结果及其证明

定理 1 设 $f_3(x) = f_2(x) \pm f_1(x)$, 其中 $f_i(x) (i = 1, 2, 3)$ 是首项系数为正的一元实系数多项式, $f_1(x), f_2(x)$ 均有实根. 用 β_i 表示 $f_i(x)$ 的最小实根, ∂_i 表示 $f_i(x)$ 的次数.

(1) 若 $\beta_2 > \beta_1, \partial_2, \partial_3$ 奇偶性相异, 则 $f_3(x) = f_2(x) \pm f_1(x)$ 有实根且 $\beta_3 < \beta_1$;

(2) 若 $\beta_2 < \beta_1, \partial_1, \partial_3$ 奇偶性相同, 则 $f_3(x) = f_2(x) - f_1(x)$ 有实根且 $\beta_3 < \beta_2$.

证明 (1) 由 $f_1(\beta_1) = 0, \beta_2 > \beta_1$ 知 $f_3(\beta_1) = f_2(\beta_1) \neq 0$. 因 ∂_2, ∂_3 奇偶性相异, 则 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f_3(x)$ 与 $f_2(x)$ 符号相反, 即当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f_3(x)$ 与 $f_3(\beta_1) (= f_2(\beta_1))$ 符号相反, 因而必存在 $\beta_3 \in (-\infty, \beta_1)$, 从而 (1) 得证. 同理可证 (2).

推论 1 设 $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}x^j, (i = 1, 2)$ 是首项系数为正的实系数多项式, β_i 表示 $f_i(x)$ 的最小实根, ∂_i 表示 $f_i(x)$ 的次数. 若 $\beta_1 \neq \beta_2$, 且下列条件之一满足:

(1) $f_3(x) = f_2(x) - f_1(x)$, 且 ∂_1, ∂_2 奇偶性相异;

(2) $f_3(x) = f_2(x) + f_1(x)$, 且 ∂_1, ∂_2 奇偶性相同,

则存在 $\beta_3 > \min\{\beta_1, \beta_2\}$.

证明 若条件 (1) 满足, 易知 $\beta_i (i = 1, 2, 3)$ 存在. 不妨假设 $\beta_2 = \min\{\beta_1, \beta_2\}$, 若 $\beta_3 = \beta_2$, 则有 $f_1(\beta_2) = 0$, 矛盾; 若 $\beta_3 < \beta_2$, 由 $f_3(\beta_3) = 0$ 知, $f_2(\beta_3) = f_1(\beta_3) \neq 0$. 因 ∂_1, ∂_2 奇偶性相异, 则当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 符号相反, 即当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f_1(x)$ 或 $f_2(x)$ 在 $(-\infty, \beta_3)$ 内必有根, 矛盾. 同理可证条件 (2) 满足的情形.

定理 2 设连通图 G 阶为 n , 点 $u \in V(G)$ 且 $d(u) = 1$. 若用 $H_m(G, P_{s+1}, P_{t+1})$, 其中 $m = n + s + t, 2 \leq s \leq t$ 表示 G 的点 u 分别与路 P_{s+1} 和 P_{t+1} 的一个一度点相粘接而得到的图. 则 $\beta(H_m(G, P_{s+1}, P_{t+1})) < \beta(H_m(G, P_s, P_{t+2}))$.

证明 根据引理 2 得

$$h(H_m(G, P_{s+1}, P_{t+1})) = h(G)h(P_s)h(P_t) + xh(G-u)[h(P_{s-1})h(P_t) + h(P_{t-1})h(P_s)],$$

$$h(H_m(G, P_s, P_{t+2})) = h(G)h(P_{s-1})h(P_{t+1}) + xh(G-u)[h(P_{s-2})h(P_{t+1}) + h(P_t)h(P_{s-1})].$$

又由引理 5 得

$$\begin{aligned} & h(H_m(G, P_{s+1}, P_{t+1})) - h(H_m(G, P_s, P_{t+2})) \\ &= (-1)^s x^s h(P_{t-s})[h(G) - xh(G-u)] = (-1)^s x^{s+1} h(P_{t-s})h(G-u - N_G(u)), \end{aligned}$$

这里 $N_G(u)$ 表示 u 的邻点集. 讨论 s 的奇偶性并根据推论 1 和引理 8 易知定理 2 成立.

引理 10 设 $\xi_n^1(r, s), r \geq 5, s \geq 1, n = r + s$. 则

(1) 当 $s = r - 3$ 时, $\beta(\xi_n^1(r, s)) = \beta(\xi_n^1(r - 1, s + 1))$,

(2) 当 $s < r - 3$ 时, $\beta(\xi_n^1(r, s)) > \beta(\xi_n^1(r - 1, s + 1))$,

(3) 当 $s > r - 3$ 时, $\beta(\xi_n^1(r, s)) < \beta(\xi_n^1(r - 1, s + 1))$.

证明 根据引理 2 得

$$h(\xi_n^1(r, s)) = h(P_{r+s}) + xh(P_s)h(P_{r-2}), \quad h(\xi_n^1(r - 1, s + 1)) = h(P_{r+s}) + xh(P_{s+1})h(P_{r-3}).$$

显然 (1) 成立. 当 $s \neq r - 3$ 时, 由引理 5 可得

$$h(\xi_n^1(r, s)) - h(\xi_n^1(r - 1, s + 1)) = \begin{cases} (-1)^s x^{s+2} h(P_{r-s-4}), & s < r - 3; \\ (-1)^{r-2} x^{r-1} h(P_{s-r+2}), & s > r - 3. \end{cases}$$

类似于定理 2 的证明, 易知 (2) 和 (3) 成立.

定理 3 设 $\xi_n^1(r, s), r \geq 4, s \geq 1, n = r + s$. 则

(1) $\max(\xi_n^1) = \xi_n^1(n - 1, 1)$.

(2) $n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, $\min(\xi_n^1) = \xi_n^1(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} - 1)$; $n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, $\min(\xi_n^1) = \xi_n^1(\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2})$.

证明 当 $n = 2k, k \geq 3$ 时, 根据引理 10 有

$$\beta(\xi_n^1(k + 1, k - 1)) < \beta(\xi_n^1(k, k)) < \cdots < \beta(\xi_n^1(4, n - 4)),$$

$$\beta(\xi_n^1(k + 1, k - 1)) < \beta(\xi_n^1(k + 2, k - 2)) < \cdots < \beta(\xi_n^1(n - 1, 1)).$$

由引理 2、5 及推论 1, 易验 $\beta(\xi_n^1(4, n - 4)) < \beta(\xi_n^1(n - 1, 1))$, 则

$$\beta_{\min}(\xi_n^1) = \beta(\xi_n^1(k + 1, k - 1)), \beta_{\max}(\xi_n^1) = \beta(\xi_n^1(n - 1, 1)).$$

同理可证 $n = 2k + 1, k \geq 2$ 的情形.

定理 4 设 $\xi_n^2(r, s), s \geq r \geq 1, n = r + s + 3$. 则

(1) $\max(\xi_n^2) = \xi_n^2(1, n - 4)$.

(2) $n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, $\min(\xi_n^2) = \xi_n^2(\frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 1)$; $n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, $\min(\xi_n^2) = \xi_n^2(\frac{n-3}{2}, \frac{n-3}{2})$.

证明 当 $2 \leq r \leq 3$ 时, 由引理 2 得

$$h(\xi_n^2(r, s)) = h(P_n) + h(P_2)h(P_s)h(P_r), h(\xi_n^2(r - 1, s + 1)) = h(P_n) + h(P_2)h(P_{s+1})h(P_{r-1}).$$

又由引理 5

$$h(\xi_n^2(r, s)) - h(\xi_n^2(r - 1, s + 1)) = (-1)^r x^r h(P_2)h(P_{s-r}).$$

讨论 r 的奇偶性并根据推论 1 和引理 8 易知 $\beta(\xi_n^2(r, s)) < \beta(\xi_n^2(r - 1, s + 1))$. 类似于定理 3 的证明, 知定理 4 成立.

定理 5 设 $\xi_n^3(r, s, t), t \geq s \geq 1, n = r + s + t + 3, r \geq 1$. 则

(1) $\max(\xi_n^3) = \xi_n^3(n - 5, 1, 1)$.

(2) $n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, $\min(\xi_n^3) = \xi_n^3(1, \frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 2)$; $n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, $\min(\xi_n^3) = \xi_n^3(1, \frac{n-5}{2}, \frac{n-3}{2})$.

证明 由于对 $\xi_n^3(r, s, t)$ 进行一个三角形二度点分裂后得到点分裂树 $T_{n+1}(1, 2, r, s, t)$, 由引理 3, $h_1(\xi_n^3(r, s, t)) = h_1(T_{n+1}(1, 2, r, s, t))$. 又根据引理 9 得

$$\beta(T_{n+1}(1, 2, r - 1, s + 1, t)) < \beta(T_n(1, 2, r - 1, s, t)) < \beta(T_{n+1}(1, 2, r, s, t)), r \geq 2, t \geq s \geq 1.$$

于是有 $\beta(\xi_n^3(r - 1, s + 1, t)) < \beta(\xi_n^3(r, s, t))$. 由此易知 $\max(\xi_n^3) = \xi_n^3(n - 5, 1, 1)$.

另外, 由定理 2 知 $\beta(\xi_n^3(r, s, t)) < \beta(\xi_n^3(r, s - 1, t + 1)), r \geq 1, t \geq s \geq 2$. 类似于定理 3 的证明, 知

$$\beta_{\max}(\xi_n^3) = \beta(n - 5, 1, 1), \beta_{\min}(\xi_n^3) = \begin{cases} \beta(\xi_n^3(1, k, k)), & n - 4 = 2k; \\ \beta(\xi_n^3(1, k, k + 1)), & n - 4 = 2k + 1. \end{cases}$$

这里 k 为正整数.

定理 6 设 $T_n(r, s, t), r \geq s \geq t \geq 1, n = r + s + t + 1$. 则

$$(1) \max(T_n) = T_n(1, 1, n-3).$$

$$(2) n \equiv 0(\pmod{3}) \text{ 时, } \min(T_n) = T_n(\frac{n}{3}-1, \frac{n}{3}, \frac{n}{3}); n \equiv 1(\pmod{3}) \text{ 时, } \min(T_n) = T_n(\frac{n-1}{3}, \frac{n-1}{3}, \frac{n-1}{3}); n \equiv 2(\pmod{3}) \text{ 时, } \min(T_n) = T_n(\frac{n-2}{3}, \frac{n-2}{3}, \frac{n+1}{3}).$$

证明 由定理 2 知 $\beta(T_n(r, s, t)) < \beta(T_n(r+1, s-1, t)), t \geq 1, r \geq s \geq 2$. 又根据引理 9, 易知定理 6 成立.

推论 2 $\beta_{\max}(\xi_n^2) < \beta_{\max}(\xi_n^1) \leq \beta_{\max}(\xi_n^3) < \beta_{\max}(T_n), n \geq 7$.

特别地, $n = 5$ 时, $\beta_{\max}(\xi_n^2) = \beta_{\max}(\xi_n^1)$; $n = 6$ 时, $\beta_{\max}(\xi_n^3) = \beta_{\max}(\xi_n^2) < \beta_{\max}(\xi_n^1)$; $n = 7$ 时, $\beta_{\max}(\xi_n^3) = \beta_{\max}(\xi_n^1)$.

证明 根据定理 3-6, 由引理 2 知

$$h(\xi_n^1(n-1, 1)) = h(P_n) + x^2h(P_{n-3}) = xh(P_{n-1}) + xh(P_{n-2}) + x^2h(P_{n-3}),$$

$$h(\xi_n^2(1, n-4)) = h(P_n) + xh(P_2)h(P_{n-4}) = xh(D_{n-1}) + xh(P_{n-2}),$$

$$\begin{aligned} h(\xi_n^3(n-5, 1, 1)) &= h(T_n(n-3, 1, 1)) + h(P_2)h(T_{n-3}(n-6, 1, 1)) \\ &= xh(P_{n-1}) + x^2h(P_{n-3}) + h(P_2)[xh(P_{n-4}) + x^2h(P_{n-6})]. \end{aligned}$$

又由引理 5 得

$$h(\xi_n^2(1, n-4)) - h(\xi_n^1(n-1, 1)) = x[h(P_2)h(P_{n-4}) - xh(P_{n-3})] = x^3h(P_{n-6}),$$

$$h(\xi_n^3(n-5, 1, 1)) - h(\xi_n^1(n-1, 1)) = -x^2[xh(P_{n-5}) - h(P_2)h(P_{n-6})] = x^4h(P_{n-8}).$$

于是, 根据推论 1 及引理 8 知结论成立.

推论 3 $\beta_{\min}(\xi_n^3) \leq \beta_{\min}(\xi_n^2) \leq \beta_{\min}(\xi_n^1) < \beta_{\min}(T_n), n \geq 6$.

证明 (1) 根据定理 3-5, 当 $n = 2k, k \geq 3$ 时, 由引理 2 得

$$h(\xi_n^1(k+1, k-1)) = h(P_n) + xh(P_{k-1})h(P_{k-1}), h(\xi_n^2(k-2, k-1)) = h(P_n) + h(P_2)h(P_{k-2})h(P_{k-1}),$$

$$\begin{aligned} h(\xi_n^3(1, k-2, k-2)) &= h(T_n(3, k-2, k-2)) + h(P_2)h(P_{2k-3}) \\ &= h(P_3)h(P_{2k-3}) + h(P_2)[xh^2(P_{k-2}) + h(P_{2k-3})]. \end{aligned}$$

又由引理 5 得

$$h(\xi_n^2(k-2, k-1)) - h(\xi_n^1(k+1, k-1)) = [h(P_2)h(P_{k-2}) - xh(P_{k-1})]h(P_{k-1}) = x^2h(P_{k-1})h(P_{k-4}),$$

$$h(\xi_n^3(1, k-2, k-2)) - h(\xi_n^2(k-2, k-1)) = x^2h(P_2)h(P_{k-3})h(P_{k-4}),$$

易知 $k = 3$ 时, 有 $\beta_{\min}(\xi_n^3) = \beta_{\min}(\xi_n^2) = \beta_{\min}(\xi_n^1)$; $k > 3$ 时, 根据推论 1 和引理 8 知

$$\beta_{\min}(\xi_n^3) < \beta_{\min}(\xi_n^2) < \beta_{\min}(\xi_n^1).$$

同理可证, 当 $n = 2k + 1, k \geq 3$ 时, 亦有 $\beta_{\min}(\xi_n^3) < \beta_{\min}(\xi_n^2) < \beta_{\min}(\xi_n^1)$.

(2) 根据定理 6, 当 $n = 3k$, $k \geq 2$ 时, 由引理 2

$$h(\xi_n^1(n-k+1, k-1)) = h(T_n(k-1, k, k)) + xh(T_{n-2}(k-1, k-1, k-1)),$$

由引理 8 及定理 1(1) 知 $\beta(\xi_n^1(n-k+1, k-1)) < \beta(T_n(k-1, k, k))$. 因而 $\beta_{\min}(\xi_n^1) \leq \beta(\xi_n^1(n-k+1, k-1)) < \beta_{\min}(T_n)$. 同理可证 $n = 3k+1, 3k+2, (k \geq 2)$ 时, 亦有 $\beta_{\min}(\xi_n^1) < \beta_{\min}(T_n)$ 成立.

参考文献:

- [1] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Applications* [M]. North-Holland, 1976.
- [2] LIU Ru-ying. *Adjoint polynomials and chromatically unique graphs* [J]. Discrete Math., 1997, **172**: 85–92.
- [3] 刘儒英. 图的伴随多项式 [J]. 青海师范大学学报, 1990, **3**: 1–8.
LIU Ru-ying. *Adjoint polynomials of graphs* [J]. J. Qinghai Normal Univ., 1990, **3**: 1–8. (in Chinese)
- [4] 杜清晏. 图的参数 $\pi(G)$ 及其图的分类 [J]. 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1990, **26**(3): 258–262.
DU Qing-yan. *On the parameter $\pi(G)$ of graph G and graph classification* [J]. Nei Monggol Daxue Xuebao Ziran Kexue, 1990, **26**(3): 258–262. (in Chinese)
- [5] DU Qing-Yan. *On σ -equivalence and χ -equivalence of graphs* [J]. J. Graph Theory, 1996, **21**(2): 211–217.
- [6] CVETKOVIĆ D, ROWLINSON P. *The largest eigenvalue of a graph: A survey* [J]. Linear and Multilinear Algebra, 1990, **28**: 3–33.
- [7] 刘儒英. 一类树的补图的色唯一性 [J]. 应用数学 (增刊), 1996, **9**: 170–173.
LIU Ru-ying. *Chromatic uniqueness of complementary graphs of a kind of tree* [J]. Math. Appl. (Wuhan), Suppl., 1996, **9**: 170–173. (in Chinese)
- [8] 王守中, 刘儒英. 圈和 D_n 图的补图的色唯一性 [J]. 数学研究与评论, 1998, **2**: 296.
WANG Shou-zhong, LIU Ru-ying. *Chromatic uniqueness of complementary graphs of cycle and D_n* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1998, **2**: 296. (in Chinese)
- [9] ZHAO Hai-xing, HUO Bo-feng, LIU Ru-ying, Chromaticity of the complements of paths[J]. J. Math. Study, 2000, **4**: 345–353.
- [10] ZHAO Hai-xing, LI Xue-liang, ZHANG Sheng-gui. et al. *On the minimum real roots of the σ -polynomials and chromatic uniqueness of graphs* [J]. Discrete Math., 2004, **281**: 277–294.

On Extremes of Minimum Real Roots of Adjoint Polynomials of Graphs with $R(G) \geq -1$

REN Hai-zhen, LIU Ru-ying

(Department of Mathematics and Information Science, Qinghai Normal University, Xining 810008, China)

Abstract: In this paper, the extremes of the minimum real roots of the adjoint polynomials of graphs are defined, and the graphs with $R(G) \geq -1$ are characterized by the extremes of the minimum real roots of its adjoint polynomials. Moreover, the root extreme graphs of the adjoint polynomials of graphs with $R(G) \geq -1$ are given. Then, some new results on the order of the minimum real roots of the adjoint polynomials of graphs are obtained.

Key words: adjoint polynomial; character; minimum roots; order.