第26卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.4
2006年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)04-0831-04 **文献标识码**: A

解非凸规划问题动边界组合同伦方法

于波 [1], 商玉凤 [2]
(1. 大连理工大学应用数学系, 辽宁 大连 116024; 2. 空军航空大学数学教研室, 吉林 长春 130022)
(E-mail: yubo@dlut.edu.cn)

摘　要: 本文给出了一个新的求解非凸规划问题的同伦方法, 称为动边界同伦方程, 并在较弱的条件下, 证明了同伦路径的存在性和大范围收敛性. 与已有的拟法锥条件、伪锥条件下的修正组合同伦方法相比, 同伦构造更容易, 并且不要求初始点是可行集的内点, 因此动边界组合同伦方法比修正组合同伦方法及弱法锥条件下的组合同伦内点法和凝聚约束同伦方法更便于应用.

关键词: 非线性规划; 非凸规划; 同伦算法.
MSC(2000): 65K, 90C
中图分类: O221.1

本文考虑如下的非线性规划问题:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x), \\ \text{s.t.} & g_i(x) \le 0,\ i \in \{1,\cdots,m\}. \end{array} \tag{1}$$

其中 $x \in R^n$, 并且 $f, g_i \in C^r(r > 2)$.

记 $\Omega = \{x|g_i(x) \le 0, i = 1,\cdots,m\}$ 为 (1) 的可行集; $\Omega^0 = \{x|g_i(x) < 0, i = 1,\cdots,m\}$ 为 (1) 的严格可行集; $I(x) = \{i|g_i(x) = 0, i = 1,\cdots,m\}$ 为 (1) 的紧指标集.

如果点 $x^* \in \Omega$ 是 (1) 的解, 并且在 x^* 处 Abadie 约束规格成立, 那么存在 $y^* \in R^m_+$ 使得 (x^*, y^*) 满足

$$\begin{array}{l} \nabla f(x) + \nabla g(x)y = 0, \\ Yg(x) = 0, g(x) \le 0, y \ge 0, \end{array} \tag{2}$$

其中 $Y = \mathrm{diag}(y)$. 系统 (2) 称为 (1) 的 K-K-T 系统或一阶必要条件. 如果点 (x^*, y^*) 满足 (2), 那么称 x^* 为 (1) 的 K-K-T 点, y^* 为 Lagrange 乘子. 如果 f, g_i 是凸函数, 那么 K-K-T 点也是最优解点.

在文 [1] 和 [2](亦见 [3],[4],[5]) 中, 提出了解非凸 Brouwer 不动点问题和非凸规划问题的同伦算法, 称为组合同伦内点法 (Combined Homotopy Interior Point Method, 简称 CHIP 方法), 发现了法锥条件, 并在此条件下证明了同伦路径的存在性和大范围收敛性. 在文 [6],[7] 及 [8] 中, 给出了求解非凸规划问题的凝聚约束同伦方法 (Aggregate Constraint Homotopy, 简称 ACH 方法) 和修正 CHIP 方法, 分别在弱法锥条件、拟法锥条件和伪锥条件下证明了同伦路径的存在性和收敛性. 可是, 在弱法锥条件下, 要求初始点取在可行集的一个子集中, 在拟法锥条件和伪锥条件下, 同伦的构造需要一些辅助映射, 一般来说比较困难, 因此不便于应用. 在文 [9] 中, 给出了另一种解非凸规划问题的同伦方法, 并且在较弱的条件下证明了同伦路径的存在性和收

收稿日期: 2006-03-12
基金项目: 国家自然科学基金 (10671029)

敛性. 但这个条件是加在同伦映射上，而不是所求的问题上的，什么样问题满足该条件是不清楚的，受文 [2] 和 [9] 的启发，本文提出动边界组合同伦法 (Boundary Moving Homotopy Method, 简称 BMH 方法), 在较弱的条件下证明了同伦路径的存在性和收敛性. 与拟法锥条件、伪锥条件下的修正 CHIP 方法相比，同伦构造更容易，并且不要求初始点是可行集的内点，因此动边界组合同伦方法比修正 CHIP 方法及弱法锥条件下的 CHIP 方法和 ACH 方法更便于应用.

在本文中我们使用如下假设条件:

假设条件 存在函数 $\tilde{g}(x,t): R^n \times [0,1] \to R^m$ 使得下面的条件成立:

(A_1) $\tilde{g}(x,t) \in C^r(r>2)$;

(A_2) $\tilde{g}(x,0) = g(x)$;

(A_3) 对于任意的 $t \in [0,1]$, $\Omega(t)$ 是有界闭集，且 $\Omega^0(t)$ 非空;

(A_4) 对任意的 $t \in [0,1]$, $x \in \partial\Omega(t)$, $\{\nabla_x \tilde{g}_i(x,t) | i \in I(x,t)\}$ 是正独立的, 即如果存在 $v_i \geq 0$, 使得

$$\sum_{i \in I(x,t)} v_i \nabla_x \tilde{g}_i(x,t) = 0 \tag{3}$$

成立，那么必有 $v_i = 0 (i \in I(x,t))$, 其中 $\nabla_x \tilde{g}(x,t)$ 表示 $\tilde{g}(x,t)$ 对 x 的梯度.

(A_5) $\Omega(1)$ 满足法锥条件，即对任意的 $x \in \partial\Omega(1)$,

$$\left\{x + \sum_{i \in I(x,1)} v_i \nabla_x \tilde{g}_i(x,1) | v_i \geq 0\right\} \cap \Omega(1) = \{x\}. \tag{4}$$

其中

$$\Omega(t) = \{x \in R^n | \tilde{g}_i(x,t) \leq 0, i=1,\ldots,m\}, \Omega^0(t) = \{x \in R^n | \tilde{g}_i(x,t) < 0, i=1,\ldots,m\},$$
$$\partial\Omega(t) = \Omega(t) \setminus \Omega^0(t), I(x,t) = \{i | \tilde{g}_i(x,t) = 0, i=1,\cdots,m\}.$$

为求解 (2), 构造动边界组合同伦:

$$H(x,y,t) = \begin{pmatrix} (1-t)\left(\nabla f(x) + \nabla_x \tilde{g}(x,t) y\right) + t(x - x^{(0)}) \\ Y\tilde{g}(x,t) - tY^{(0)}\tilde{g}(x^{(0)},1) \end{pmatrix} = 0, \tag{5}$$

其中 $Y = \mathrm{diag}(y)$, $Y^{(0)} = \mathrm{diag}(y^{(0)})$, $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \Omega^0(1) \times R^m_{++}$.

对于给定的 $x^{(0)} \in \Omega^0(1)$, $y^{(0)} \in R^m_{++}$, $H(x,y,t)$ 的零点集记为 $H^{-1}(0)$, 即

$$H^{-1}(0) = \left\{t \in (0,1], x \in \Omega(t), y \in R^m_+ : H(x,y,t) = 0\right\}. \tag{6}$$

定理 设 $f, g_i \in C^r(r>2)$ $(i=1,\ldots,m)$, $\tilde{g}(x,t)$ 满足假设条件，映射 H 由 (5) 定义，则对几乎所有的 $x^{(0)} \in \Omega^0(1)$, $y^{(0)} \in R^m_{++}$, 同伦映射 H 的零点集 $H^{-1}(0)$ 包含一条从 $(x^{(0)}, y^{(0)}, 1)$ 出发的有界光滑曲线 Γ, Γ 的另一端的极限点必为 $(x^*, y^*, 0)$ 的形式，其中 (x^*, y^*) 是 (2) 的解.

证明 容易证明，0 是作为以 $(x, y, x^{(0)}, y^{(0)}, t)$ 为变量的映射 H 的正则值, 由参数化的 Sard 定理, 对几乎所有的 $x^{(0)} \in \Omega^0(1)$, $Y^{(0)} \in R^m_{++}$, 0 是作为以 (x,y,t) 为变量的同伦映射 H 的正则值. 此时，由隐含数定理， H 的零点集 $H^{-1}(0)$ 中包含一条从 $(x^{(0)}, y^{(0)}, 1)$ 出发的光滑曲线 Γ. 令 (x^*, y^*, t^*) 为 Γ 的另一端的极限点，则存在点列 $\{(x^{(k)}, y^{(k)}, t_k)\}_{k=1}^{+\infty}$, 使得 $(x^{(k)}, y^{(k)}, t_k) \to (x^*, y^*, t^*)$, 且满足

$$(1-t_k)\left(\nabla f(x^{(k)}) + \nabla_x \tilde{g}(x^{(k)}, t_k) y^{(k)}\right) + t_k(x^{(k)} - x^{(0)}) = 0, \tag{7}$$

$$Y^{(k)}\tilde{g}(x^{(k)},t_k)-t_kY^{(0)}\tilde{g}(x^{(0)},1)=0, \tag{8}$$

那么只有以下几种情况可能发生：

(i) $t^*\in[0,1]$, $x^*\in\Omega(t^*)$, $y^*\in R_+^m$, $\|y^*\|=+\infty$;

(ii) $t^*=1$, $x^*\in\Omega(t^*)$, $y^*\in R_+^m$, $\|y^*\|<+\infty$;

(iii) $t^*\in(0,1)$, $x^*\in\partial\Omega(t^*)$, $y^*\in R_{++}^m$, $\|y^*\|<+\infty$;

(iv) $t^*\in(0,1)$, $x^*\in\Omega(t^*)$, $\|y^*\|<+\infty$, 且存在 $i\in\{1,\cdots,m\}$ 使得 $y_i^*=0$;

(v) $t^*=0$, $x^*\in\Omega$, $y^*\in R_+^m$, $\|y^*\|<+\infty$.

由 $H(x,y,1)=0$ 只有一个单根 $(x^{(0)},y^{(0)})$, 情况 (ii) 不可能发生．由 Γ 的连续性以及方程 (8), 我们知道情况 (iii) 和 (iv) 不可能发生．若 (i) 发生，则由 (8) 知当且仅当 $y_i^*=+\infty$ 时，$\tilde{g}_i(x^*,t^*)=0$, 即 $i\in I(x^*,t^*)$, 从而 $I(x^*,t^*)$ 非空，即 $x^*\in\partial\Omega(t^*)$. 下面分两种情况讨论 (i).

情形 1. $t^*=1$. 由方程 (7), 有

$$\sum_{i\in I(x^*,1)}(1-t_k)y_i^{(k)}\nabla_x\tilde{g}_i(x^{(k)},t_k)$$
$$=-(1-t_k)\Big(\nabla f(x^{(k)})+\sum_{i\notin I(x^*,1)}y_i^{(k)}\nabla_x\tilde{g}_i(x^{(k)},t_k)\Big)-t_k(x^{(k)}-x^{(0)}). \tag{9}$$

由 (9) 右端有极限及假设条件 (A_4) 知，当 $i\in I(x^*,1)$ 时， $(1-t_k)y_i^{(k)}$ 有界，因此不妨设 $v_i=\lim_{k\to\infty}(1-t_k)y_i^{(k)}$ 存在，则 $v_i\ge 0$.

当 $k\to+\infty$ 时，方程 (9) 两端同时取极限得到

$$\sum_{i\in I(x^*,1)}v_i\nabla_x\tilde{g}_i(x^*,1)=-x^*+x^{(0)}.$$

若 $\forall i\in I(x^*,1)$ 均有 $v_i=0$, 则 $x^*=x^{(0)}$, 但 $x^*\in\partial\Omega(1)$, 而 $x^{(0)}\in\Omega^0(1)$, 矛盾．这样得到 $v_i\ge 0$ $(i\in I(x^*,1))$, 且不全为零．这又与假设条件 (A_5) 矛盾.

情形 2. $t^*\in[0,1)$. 将方程 (9) 整理为

$$\sum_{i\in I(x^*,t^*)}y_i^{(k)}\nabla_x\tilde{g}_i(x^{(k)},t_k)$$
$$=-\Big(\nabla f(x^{(k)})+\sum_{i\notin I(x^*,t^*)}y_i^{(k)}\nabla_x\tilde{g}_i(x^{(k)},t_k)\Big)-\frac{t_k}{(1-t_k)}(x^{(k)}-x^{(0)}). \tag{10}$$

不妨设

$$\lambda_i=\lim_{k\to+\infty}\frac{y_i^{(k)}}{\|y_I^{(k)}\|},i\in I(x^*,t^*)$$

存在，其中 $y_I^{(k)}$ 是由 $y_i^{(k)}$ $(i\in I(x^*,t^*))$ 所构成的向量．则 $\lambda_i\ge 0$ $(i\in I(x^*,t^*))$, 且 $\|\lambda\|=1$. 方程 (10) 左右两端同除以 $\|y_I^{(k)}\|$, 并令 $k\to+\infty$, 可得

$$\sum_{i\in I(x^*,t^*)}\lambda_i\nabla_x\tilde{g}_i(x^*,t^*)=0.$$

这与假设条件 (A_4) 矛盾．结合情形 1 和 2, 说明 (i) 不能发生.

综上可知，只有情况 (v) 发生，定理得证. □

我们的假设条件不要求 Ω 满足法锥条件，而只要求 $\Omega(1)$ 满足法锥条件 (A_5), 即只需要 Ω 能从一个满足法锥条件的集合 (比如凸集) 连续形变过去 (当然，在形变过程中，应保持边界正则性 (A_4). 若 Ω 本身满足法锥条件，则取 $g(x,t)\equiv g(x)$ 即可). 这个条件比法锥条件弱得多，而比起 [7] 及 [8] 中的拟法锥条件和伪锥条件下的修正同伦中的辅助映射的构造，本文的约束形变更容易实现．另外，因为只要求 $x^{(0)}\in\Omega^0(1)$, 适当选取 $\Omega(1)$, 可以去掉原来的组合同伦方法要求 $x^{(0)}\in\Omega^0$ 的限制.

参考文献:

[1] YU Bo, LIN Zheng-hua. *Homotopy method for a class nonconvex Brouwer fixed point problems* [J]. Appl. Math. Comput., 1996, 74: 65-77.

[2] FENG Guo-chen, LIN Zheng-hua, YU Bo. *Existence of an interior pathway to a Karush-Kuhn-Tucker point of a nonlinear programming problem* [J]. Nonlinear Anal., 1998, **32**: 761-768.

[3] FENG Guo-chen, YU Bo. *Combined homotopy interior point method for nonlinear programming problems* [J]. Lecture Notes in Numer. Anal., 1995, **14**: 9-16.

[4] LIN Zheng-hua, LI Yong, YU Bo. *A combined homotopy interior method for general nonlinear programming problem* [J]. Appl. Math. Comput., 1996, **80**: 209-224.

[5] LIN Zheng-hua, YU Bo, FENG Guo-chen. *A combined homotopy interior method for convex nonlinear programming* [J]. Appl. Math. Comput., 1997, **84**: 193-211.

[6] YU Bo, FENG Guo-chen, ZHANG Shao-liang. *The aggregate constraint homotopy method for nonconvex nonlinear programming* [J]. Nonlinear Anal., 2001, **45**: 839-847.

[7] LIU Qing-huai, YU Bo, FENG Guo-chen. *An interior point path-following method for nonconvex programming with quasi normal cone condition* [J]. Adv. Math., 2000, **29**: 281-282.

[8] YU Bo, LIU Qing-huai, FENG Guo-chen. *A combined homotopy interior method for nonconvex programming with pseudo cone condition* [J]. Northeast. Math., 2000,**16**: 383-386.

[9] WATSON, L T. *Theory for globally convergent probability-one homotopies for nonlinear programming* [J]. SIAM J. Optim., 2000, **11**: 761-780.

Boundary Moving Combined Homotopy Method for Nonconvex Nonlinear Programming

YU Bo[1], *SHANG Yu-feng*[2]

(1. Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China;
2. Teaching and Research Section of Mathematics, Aviation University of Air Force, Changchun 130022, China)

Abstract: A new homotopy method, called boundary moving combined homotopy method, for solving nonconvex programming is given, and the existence and convergence of the homotopy path is proved under some weak conditions. The homotopy is easier to be constructed than the modified combined homotopy under quasi-normal cone condition and pseudo-cone condition. Moreover, it need not to choose the start point inside the interior part of the feasible set, so the method is more convenient to be implemented than the modified combined homotopy method as well as the combined homotopy interior point method and the aggregate constraint homotopy method under weak normal cone condition.

Key words: Nonlinear programming; nonconvex programming; homotopy method.