第26卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.4
2006年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2006

**文章编号**: 1000-341X(2006)04-0835-08 **文献标识码**: **A**

# 恰有 $k$ 条非基本边的极小 3 连通图

刘育兴 [1]， 苏健基 [2]

(1. 赣南师范学院数学与计算机系，江西 赣州 341000;
2. 广西师范大学数学与计算机科学学院，广西 桂林 541004)
(E-mail: yxliu2005@163.com)

**摘　要**: 设 $G$ 是简单 3 连通图. $G\backslash e$(删除边 $e$) 和 $G/e$(收缩边 $e$) 都不是简单 3 连通图, 则 $e$ 称为 $G$ 的基本边. 对于 3 连通图中的非基本边. Tutte[1] 证明了：唯一没有非基本边的简单 3 连通图是轮. Oxley 和 Wu 确定了至多有 3 条非基本边的所有极小 3 连通图以及恰有 4 条非基本的极小 3 连通图. Reid 与 Wu 确定了至多有 5 条非基本边的极小 3 连通图. 在本文中，我们在极小 3 连通图中定义了三种运算，然后通过轮利用这些运算的逆运算给出恰有 $k(k\geq 2)$ 条非基本边的极小 3 连通图的一种构造方法.

**关键词**: 极小 3 连通图；非基本边；扇；轮.
**MSC(2000)**: 05C40
**中图分类**: O157.5

本文考虑的都是简单图. 设 $G$ 是简单 3 连通图，若 $G\setminus e$(即 $G$ 中去掉边 $e$) 仍是 3 连通图，则称 $e$ 是可删除边. $G/e$(即 $G$ 中收缩边 $e$) 仍是简单 3 连通图，则称 $e$ 是简单可收缩边. 若 $e$ 既不是可删除边也不是简单可收缩边，则称 $e$ 是基本边. 因而，如果 $e$ 是 $G$ 的非基本边，则 $e$ 是 $G$ 的可删除边或简单可收缩边. 若 $G$ 是极小 3 连通图，则 $G$ 中的非基本边就是简单可收缩边. 容易看出，当 $G$ 不是完全图时， $G$ 中的边 $e=xy$ 是不可收缩的，当且仅当 $G$ 中有包含 $\{x,y\}$ 的 3 点割.

Tutte[1] 证明不是轮的简单 3 连通图至少存在一条非基本边. 非基本边的存在已成为研究 3 连通图的一个有力的归纳工具. 非基本边作为归纳工具，有它独特的优势. 首先，它处理起来简单方便，不会产生重边；其次，它的改变不会影响其他边的存在. 因而，非基本边的应用更加广泛. 正因为如此，对非基本边的研究自从上个世纪九十年代开始在国内外比较活跃. 然而，在研究 3 连通图时，不仅知道非基本边的存在，而且了解非基本边的分布情况，有时显得很重要而且非常必要. Oxley 和 Wu 在 [2] 中已经证明了下面的定理和推论：

**定理 1**　设 $G$ 是极小 3 连通图且不是轮，则 $G$ 中至少有 3 条非基本边. 而且， $G$ 中恰有 3 条非基本边的充分必要条件为 $G$ 是分割轮或交叉分割轮； $G$ 中恰有 4 条非基本边的充分必要条件为 $G$ 是三扇或双锁轮.

Reid 和 Wu 在 [3] 中已经确定了最多有 5 条非基本边的所有极小 3 连通图.

我们这里并不按照他们的思路去考虑，而是换一种方法来处理，即利用图的运算，由轮开始把所有的恰含 $k(k\geq 3)$ 条非基本边的极小 3 连通图都构造出来. 我们采用归纳的方法，首先将恰有 $k(k\geq 4)$ 条非基本边的极小 3 连通图通过一系列运算得到非基本边更少的极小 3 连通图，由归纳假定，非基本边少于 $k$ 条的极小 3 连通图可以由轮通过这些运算的一系列逆运算而

**收稿日期**: 2005-11-03
**基金项目**: 国家自然科学基金 (10171022)

得到. 因此, 恰有 $k$ 条非基本边的极小 3 连通图也可以由轮通过这些运算的一系列逆运算而得到. 这样, 恰有 $k$ 条非基本边的极小 3 连通图就能够完全刻画出来.

轮记作 $W$, 恰有 $k$ 条非基本边的极小 3 连通图记作 $G_k$. 这篇论文的主要结论是下面的定理

**定理 2** $G_k(k\geq 3)$ 通过一系列运算一, 二, 三及去边可以得到 $W$, 由此, $G_k$ 可以由 $W$ 经过一系列运算一, 二, 三的逆运算及添边而得到.

其中的运算一, 二, 三将在第三部分中给出.

## 1 一些概念和定理

设 $G$ 是简单 3 连通图, $A$ 是 $G$ 的子图, $S\subseteq V(G)$, 为方便记, 以下有时把 $V(A)$ 与 $A$ 等同, 有时把 $S$ 与它在 $G$ 中导出的子图等同. 在简单图中, 长为 3 的圈的边集称为三边形, 与一个 3 度点关联的边集称为三边组.

设 $G$ 为不是轮的极小 3 连通图, 假定 $k\geq 1$ 是奇数, $F=\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+2}\}\subseteq E(G)$, 并且 $F$ 是满足以下条件的极大子集:

(1) 当 $i$ 为奇数时, $\{a_i,a_{i+1},a_{i+2}\}$ 为一三边组;

(2) 当 $i$ 为偶数时, $\{a_i,a_{i+1},a_{i+2}\}$ 为一三边形.

则称 $F$ 是一个 **扇**. 当 $k=1$ 时, $F$ 就是一个三边组, 则称 $F$ 是 **平凡扇**.

与扇 $F$ 中的边 $a_2,a_4,\cdots,a_{k+1}$ 关联的顶点称为扇 $F$ 的 **扇心**, 与 $a_1$ 关联但不与 $a_3$ 关联的顶点以及与 $a_{k+2}$ 关联但不与 $a_k$ 关联的顶点称为扇 $F$ 的 **外端点**, 除扇心与外端点外其余与扇 $F$ 中的边关联的顶点称为扇 $F$ 的 **内点**. $a_1$,$a_{k+2}$ 称为扇 $F$ 的 **端边**, $a_2,a_4,\cdots,a_{k+1}$ 称为扇 $F$ 的 **弦**,$a_3,a_5,\cdots,a_k$ 称为扇 $F$ 的 **弧**. 端边为 $x$ 和 $y$ 的扇称作 $xy-$ **扇**, 记作 $F_{xy}$.

设 $G$ 是极小 3 连通图, $v\in V(G)$. 若 $G-v$ 仍 3 连通, 则 $x$ 称为 **可删除点**. 设 $G$,$H$ 为任意两个图, 定义图 $G+H$ 为: $V(G+H)=V(G)\cup V(H)$,$E(G+H)=\{xy|x\in V(G),y\in V(H)\}\cup E(G)\cup E(H)$. 设 $G$ 是一个图, $A$ 是其顶点集的子集, $A$ 的导出子图的边集记为 $E_G[A]$. $G$ 中的边数记为 $e(G)$,$G$ 中非基本边的数目记为 $f(G)$. 其余概念和符号参见 [4].

在 3 连通图中, 容易证明下面几个简单的事实:

(1) 若简单可收缩边在两个不同的扇上, 则这两个扇有不同的扇心.

(2) 3 连通图中的简单可收缩边 $e$ 在扇 $F$ 上, 则 $e$ 与 $F$ 的一个 3 度点关联.

(3) 若边 $e$ 在三边形中且关联一个 3 度点, 则 $e$ 是基本边.

(4) 若 $e$ 是极小 3 连通图中的基本边, 则 $e$ 既在一个三边形中又与一个 3 度点关联, 或 $e$ 在不在三边形中但与一个 3 度点关联, 或 $e$ 不在三边形中但与两个 3 度点关联. 换言之, 极小 3 连通图中的任一条基本边至少关联一个 3 度点.

(5) 收缩一条简单可收缩边, 不会增加新的简单可收缩边.

(6) 去掉一条可删除边, 不会增加新的可删除边.

(7) 在极小 3 连通图中, 去掉可删除点后, 仍得极小 3 连通图.

(8) 极小 3 连通图中的可删除点不可能是扇上的内点或扇心. 因而可删除点至少关联一条非基本边.

(9) 平凡扇的三边组中至少有一条可收缩边 (因而是简单可收缩边)[5].

为了证明本文的主要结论, 先给出证明中要用到的引理和定理. 其中图 $G$ 是简单 3 连通图.

**引理 3** 设 $uv$ 是 $G$ 中的简单可收缩边, $G' = G/uv$, $u$ 与 $v$ 在 $G'$ 中的重合点为 $u'$. 则 $G$ 中不与 $u$ 或 $v$ 关联的基本边在 $G'$ 中仍是基本边.

**证明** 设 $e = xy$ 是 $G$ 中不与 $uv$ 关联的基本边, 则 $x$,$y$,$u$,$v$ 是 $G$ 中的相异四点. 由事实 4, $e$ 不是 $G'$ 的简单可收缩边. 下面证明 $e$ 也不是 $G'$ 的可删除边, 因而 $e$ 是 $G'$ 中的基本边. 由于 $e$ 是 $G$ 中的基本边, 所以 $G-e$ 中有 2 点割, 设为 $S$. 在 $G-e-S$ 中, $x$ 与 $y$ 所在分支分别设为 $A$ 与 $B$. 则 $uv \in E_G[A\cup S]$ 或 $uv \in E_G[B\cup S]$. 不失一般性, 设 $uv \in E_G[A\cup S]$. 下面分三种情况加以讨论: 若 $S=\{u,v\}$, 则 $u'$ 是 $G'-e$ 的点割, 与 $G'$ 是 3 连通矛盾; 若 $u$ 与 $v$ 中只有一点属于 $S$, 不妨设 $S=\{u,y\}$,$y\neq v$. 则 $|A|\geq 2$, 于是 $\{u',y\}$ 是 $G'-e$ 的 2 点割, 从而 $e$ 不是 $G'$ 的可删除边; 若 $\{u,v\}\cap S=\emptyset$, 则 $|A|\geq 3$, 于是 $S$ 也是 $G'-e$ 的 2 点割, 从而 $e$ 不是 $G'$ 的可删除边. □

**引理 4** 将 $G$ 中的一条可删除边去掉后, 若有新增的非基本边, 则这些新增的非基本边与这条可删除边处在 $G$ 中的同一个三边形中.

**证明** 设 $uv$ 是 $G$ 的一条可删除边, 令 $G' = G-uv$, $e = xy$ 是 $G$ 中不与 $uv$ 在同一三边形中的基本边, $e$ 是 $G'$ 中的非基本边. 由事实 4, $e$ 不是 $G'$ 的可删除边. 因此 $e$ 是 $G'$ 中的简单可收缩边. 若 $e$ 在 $G$ 中的某个三边形中, 则 $e$ 也在 $G'$ 中的相应三边形中, 这与 $e$ 是 $G'$ 中的简单可收缩边矛盾. 因此 $e$ 不在 $G$ 中的任一三边形中. 又因为 $e$ 是 $G$ 的基本边, 所以 $G$ 中存在 3 点割 $S\supset\{x,y\}$. 这时 $S$ 也是 $G'$ 中的 3 点割. 因此 $e$ 不是 $G'$ 中的简单可收缩边, 矛盾. □

在 [6] 中, Oxley 和 Wu 已经证明了下面的定理:

**定理 5** 设 $G$ 是极小 3 连通图且不是轮. 若 $e$ 是 $G$ 的基本边, 则 $e$ 在一个两条端边是非基本边的扇中. 而且, 若 $e$ 是在平凡扇上, 则 $e$ 在唯一一个扇上或者 $e$ 恰在两个扇 $F_1$ 和 $F_2$ 上, $F_1$ 和 $F_2$ 都是三边组, $e$ 是它们的唯一公共边, $F_1$ 和 $F_2$ 的其他四条边都是非基本边.

## 2 三种运算

在极小 3 连通图中, 定义以下三种运算:

**运算一** 去掉可删除点.

**运算二** 若非平凡扇的扇心与该扇外的唯一一条边关联, 则将非平凡扇上的所有内点和扇心收缩为一点. 若此点是可删除点, 则将其去掉.

**运算三** 若非平凡扇的扇心与该扇外的两条或两条以上的边关联, 则将非平凡扇变为三边组 (即在非平凡扇中, 把所有的弧收缩后, 去掉环和重边). (1) 若该三边组的这三条边都是简单可收缩边, 则将其中的与原非平凡扇的扇心关联的这条简单可收缩边收缩. 再依次去掉产生的可删除边, 直到图中无可删除边为止. (2) 若该三边组上只有两条简单可收缩边, 则任意收缩其中一条. 再依次去掉产生的可删除边, 直到图中无可删除边为止. 对平凡扇, 取其三边组中的一条可收缩边, 使用运算 (1).

下面, 就这三种运算对图所产生的影响加以讨论. 在以下的讨论中, 如未特别说明, 图中所有顶点的记号不论进行何种运算均不发生改变. 对于边, 作如下规定: 设图 $G$ 经过某种运算后得图 $G'$, 若 $e=uv\in E(G)$, $e=uv\in E(G')$, 则称 $G$ 中的边 $e=uv$ 在 $G'$ 中出现; 若 $e=uv\in E(G')$ 但 $e=uv\notin E(G)$, 则称 $e$ 是 $G'$ 中的新增边.

**1). 对图的连通性和极小性的影响.**

(1) 运算一对图的连通性和极小性的影响.

由可删除点的定义和性质 1 可知，运算一保持图的极小 3 连通性.

(2) 运算二对图的连通性和极小性的影响.

考察极小 3 连通图 $G$ 中的非平凡扇 $F$, 设其扇心为 $v$, 两端边分别为 $ux_1, x_kw(k \geq 2)$, 内点为 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k$. 并且 $v$ 在 $G$ 中与扇 $F$ 外仅一条边 $e = vp$ 关联. 将扇的所有内点和扇心收缩为一点，设扇 $F$ 的所有内点和扇心收缩为 $G'$ 中的点记为 $v$. 我们有 $G'$ 仍是极小 3 连通图. 否则，若 $G'$ 不是 3 连通图，则存在 2 点割 $S'$, 使 $G' - S'$ 不连通. 这时， $v \in S'$, 不然, $S'$ 也是 $G$ 的 2 点割，这与 $G$ 是 3 连通图矛盾.

① 若 $\{u, v\} \cap S' \neq \emptyset$, 由对称性可设 $u \in S'$, 即 $S' = \{u, v\}$. 则 $S = \{u, v\}$ 也是 $G$ 的 2 点割，矛盾.

② 若 $p \in S'$, 即 $S' = \{p, v\}$. 则 $S = \{p, x_1\}$ 是 $G$ 的 2 点割，矛盾.

因此， $S' = \{v, y\}$, $y \neq u, w, p$. 由于 $d'_G v = 3$, 所以， $G' - S'$ 中必有一分支只含 $u$,$w$,$p$ 中的一个点：若 $G' - S'$ 有一个分支只含 $u$, 不含 $w$,$p$. 则 $S = \{x_1, y\}$ 是 $G$ 的 2 点割，矛盾；若 $G' - S'$ 有一个分支只含 $w$, 不含 $u$,$p$, 类似可得出矛盾；若 $G' - S'$ 有一个分支只含 $p$, 不含 $u$,$w$. 则 $S = \{v, y\}$ 是 $G$ 的 2 点割，矛盾.

若 $G'$ 不是极小 3 连通图，则存在 $G'$ 中的边 $e$, 使 $G' - e$ 仍 3 连通. 由于 $e$ 不可能是三边组上的边，将 $G' - e$ 中对应的点恢复为 $G$ 中的非平凡扇. 易知，所得到的图 (即 $G - e$) 仍是 3 连通图. 从而， $e$ 是 $G$ 的可删除边，这与 $G$ 是极小 3 连通图矛盾.

总之，上述运算保持图的极小 3 连通性. 从而，运算二保持图的极小 3 连通性.

(3) 运算三对图的连通性和极小性的影响.

设 $F$ 是极小 3 连通图 $G$ 中的非平凡扇，其扇心为 $v$, 两端边分别为 $ux_1, x_kw(k \geq 2)$, 内点为 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k$, 并且 $v$ 在 $G$ 中与扇 $F$ 外至少两条边关联. 将扇 $F$ 的所有内点收缩为一点，设该点为 $x$, 把环和重边去掉，得图 $G'$. 我们有 $G'$ 仍是极小 3 连通图. 否则，若 $G'$ 不是 3 连通图，则存在 2 点割 $S'$, 使 $G' - S'$ 不连通. 易见 $S' \cap \{v, x\} \neq \emptyset$.

这时若 $S' = \{x, v\}$, 则 $S = \{x_1, v\}$ 是 $G$ 的 2 点割，这与 $G$ 是 3 连通图，矛盾；若 $x \in S', v \notin S'$, 设 $S' = \{x, y\}, y \neq v$, 当 $y = u$ 时， $S = \{x_k, u\}$ 是 $G$ 的 2 点割，矛盾，当 $y = w$ 时， $S = \{x_1, w\}$ 是 $G$ 的 2 点割，矛盾；若 $x \notin S'$,$v \in S'$, 设 $S' = \{v, y\}, y \neq x$, 则 $S = \{v, y\}$ 是 $G$ 的 2 点割，矛盾.

若 $G'$ 不是极小 3 连通图，则存在 $G'$ 中的边 $e$, 使 $G' - e$ 仍 3 连通. 由于 $e$ 不可能是三边组上的边，将 $G' - e$ 中对应的三边组恢复为 $G$ 中的非平凡扇. 易知，所得到的图 (即 $G - e$) 仍是 3 连通图. 从而， $e$ 是 $G$ 的可删除边，这与 $G$ 是极小 3 连通图矛盾.

再由可删除边和简单可收缩边的定义知，运算三保持图的极小 3 连通性.

**2). 对图的基本边和非基本边数的影响.**

(1) 运算一对图的基本边和非基本边数的影响.

设 $G$ 是极小 3 连通图， $x$ 是 $G$ 中的可删除点. 令 $G' = G - x$. 由性质 1 可知， $G'$ 也是极小 3 连通图. 设 $e = uv$ 是 $G$ 中的基本边，则 $G$ 中有包含 $\{u, v\}$ 的 3 点割 $S$. 由于 $G - x$ 仍 3 连通，所以 $x \notin S$. 因此， $x$ 在 $G - S$ 的一个分支中，设为 $A$. 又因为 $x$ 是 $G$ 中的可删除点，我们有 $G[N[x]] \cong K_{1,3}$. 否则，设 $N(x) = \{a, b, c\}, ab \in E(G)$, 显然 $ab$ 是 $G$ 的基本边. 根据定理 5,$ab$ 在唯一一个非平凡扇上. 于是 $G - x$ 必有 2 度点，这与 $G - x$ 仍是 3 连通矛盾. 因此 $|A| \geq 2$,

从而 $G'$ 中仍有 3 点割 $S\supset\{u,v\}$. 于是 $e$ 不是 $G'$ 中的简单可收缩边. 故有 $f(G')\le f(G)$.

(2) 运算二对图的基本边和非基本边数的影响.

考察极小 3 连通图 $G$ 中的非平凡扇 $F$, 设其扇心为 $v$, 两端边分别为 $ux_1, x_kw(k\ge 2)$, 内点为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$, 并且 $v$ 在 $G$ 中与扇 $F$ 外仅一条边 $e=vp$ 关联. 将扇 $F$ 的所有内点和扇心收缩为一点. 设扇 $F$ 的所有内点和扇心收缩为 $G'$ 中的点 $v$. 我们首先撇开边 $e$ 来讨论. 由于该运算对在 $G'$ 中出现的 $G$ 中所有基本边的性质不发生根本性的改变, 所以, $G$ 中的这些基本边在 $G'$ 中仍是基本边. 下面来讨论 $e$. 若 $e$ 是 $G$ 的基本边, 显然 $e$ 不在 $G$ 中的任何三边形中, 于是 $G$ 中有包含 $\{v,p\}$ 的 3 点割 $S=\{v,p,y\}$. 设 $G-S$ 的一个分支是 $A$, 其余的分支并为 $B$, 则 $A\cap\{u,w,x_1,\cdots,x_k\}\ne\emptyset\ne B\cap\{u,w,x_1,\cdots,x_k\}$, 因而 $A\cap\{u,w\}\ne\emptyset\ne B\cap\{u,w\}$. 由于 $G$ 中有不通过 $F$ 的内点的 3 条内部不相交的 $u-w$ 路, 所以 $y\notin\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$, 从而 $\{v,p,y\}$ 是 $G'$ 的 3 点割, 所以, $e$ 不是 $G'$ 的简单可收缩边, 且 $e$ 在 $G'$ 中与 3 度点关联, 因此, $e$ 是 $G'$ 的基本边. 由此可见, 在这种情况下, $G$ 中的所有基本边若在 $G'$ 中出现, 则它们在 $G'$ 中仍是基本边. 因此有 $f(G')\le f(G)$.

(3) 运算三对图的基本边和非基本边数的影响.

设 $F$ 是极小 3 连通图 $G$ 中的非平凡扇, 其扇心为 $v$, 两端边分别为 $ux_1, x_kw(k\ge 2)$, 内点为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$, 并且 $v$ 在 $G$ 中与扇 $F$ 外至少两条边关联. 将扇 $F$ 的所有内点收缩为一点, 设该点为 $x$, 把环和重边去掉, 得图 $G'$. 由前面的讨论可知, $G'$ 仍是极小 3 连通图. 下面分两种情形加以讨论:

① 若 $xv$ 是 $G'$ 的非基本边, 则 $xv$ 一定是 $G'$ 的简单可收缩边, 令 $G''=G'/xv$. 此时易见, $G'$ 中不与 $v$ 关联的基本边在 $G''$ 中仍是基本边. 下面证明 $G'$ 中与 $v$ 关联的基本边在 $G''$ 中仍是基本边. 设 $rv$ 是 $G'$ 中的基本边, 则 $r\ne x$. 因此在 $G$ 中是扇 $P$ 外与 $v$ 关联的一条基本边. 由于 $d_G(v)\ge 4$, 由事实 4,$d_G(r)=3$. 从而 $d'_G(r)=d''_G(r)=d_G(r)=3$. $rv$ 在 $G'$ 中不可删除, 并且由 $G$ 到 $G'$, 再到 $G''$ 的过程中, 都没有新增简单可收缩边. 总之, $G$ 中的基本边若在 $G''$ 中出现, 一定也是 $G''$ 中的基本边, 从而 $f(G'')\le f(G)$. 下面根据 $G''$ 中 $uv, vw$ 是否可删除分情况加以讨论:

(I). $uv, vw$ 在 $G''$ 中都不可删除. 此时若 $G''$ 是极小 3 连通图, 则 $f(G'')\le f(G)$. 若 $G''$ 中有可删除边, 则由引理 3 知, 可删除边必与 $v$ 关联, 并且由上面的讨论, $G''$ 中的可删除边在 $G$ 中一定是简单可收缩边. 假设 $sv$ 是 $G$ 中的简单可收缩边, 而 $sv$ 在 $G''$ 中是可删除边. 显然 $d''_G(s)\ge 4$. 令 $G^*=G''-sv$. 由事实 6 和引理 4,$G''$ 中的基本边只可能成为 $G^*$ 中的简单可收缩边, 并且这样的边在 $G''$ 中必与 $vs$ 在同一个三边形中. 然而 $vs$ 在 $G$ 中不在任何三边形中, 因此 $s$ 必与 $u$ 或 $w$ 相邻. 不妨设 $sw\in E(G)$, 若 $sw$ 是 $G$ 中的基本边, 则 $G$ 中有 3 点割 $T\supset\{w,s\}$. 显然 $T$ 也是 $G^*$ 中包含 $\{w,s\}$ 的 3 点割. $sw$ 在 $G^*$ 中不是简单可收缩边. 又 $d_G(s)=d''_G(s)\ge 4$, 由事实 4,$d_G(w)=3$. 于是 $d^*_G(w)=d_G(w)=3$. $sw$ 在 $G^*$ 中不可删除. 故 $sw$ 是 $G^*$ 中的基本边. 容易看出, $G$ 中不与 $v,s$ 关联的基本边若在 $G^*$ 中出现, 也是 $G^*$ 中的基本边. 综上所述, 有 $f(G^*)\le f(G)$. 若 $G^*$ 中还有可删除边, 则重复上述过程, 直到得到一个极小 3 连通图, 设为 $\overline{G}$. 由上面的讨论知: $f(\overline{G})\le f(G)$.

(II). $uv, vw$ 在 $G''$ 中只能删除其中一条. 不失一般性, 假设 $G''$ 中删除 $uv$ 后, $vw$ 不可删除. 令 $G^*=G'-uv$. 设 $e$ 是 $G$ 中不与 $x_i(i=1,2,\cdots,k)$ 关联的任一边. 由于 $G$ 是极小 3 连通图, 所以 $G-e$ 有 2 点割 $S$. 于是 $S$ 也是 $G'-e$ 的 2 点割. 若 $x\in S$, 设 $S=\{x,y\}$, 则 $\{y,v\}$ 或 $\{y,w\}$ 是 $G^*-e$ 的 2 点割. 从而 $e$ 在 $G^*$ 中不可删除. 若 $x\notin S$, 设 $G'-e-S$ 的两个分支

分别为 $A, B$, 则 $\{v,w\} \subseteq A\cup S$ 或 $\{v,w\}\subseteq B\cup S$. 于是 $S$ 也是 $G^*-e$ 的 2 点割. 从而 $e$ 在 $G^*$ 中也不可删除. 又 $vw$ 在 $G^*$ 中不可删除. 故 $G^*$ 是极小 3 连通图. 下面证明: $G$ 中的基本边若在 $G^*$ 中出现, 则也是 $G^*$ 的基本边. 显然, $G$ 中不与 $u,v,w$ 关联的基本边也是 $G^*$ 中的基本边.

(i). 设 $ut$ 是 $G$ 中的一条基本边. 因而 $ut$ 也是 $G'$ 中的基本边. 于是 $G'$ 中有 3 点割 $S\supset\{u,t\}$. 设 $S=\{u,t,y\}$, 显然 $t\neq v$. 若 $y=x$, 则 $\{u,t,v\}$ 是 $G^*$ 中的 3 点割, $ut$ 是 $G^*$ 的不可收缩边. 若 $y\neq x$, 设 $G'-S$ 的两个分支分别为 $A, B$, 则 $\{v,w\}\subseteq A\cup S$ 或 $\{v,w\}\subseteq B\cup S$. 于是 $S$ 也是 $G^*$ 的 3 点割. 从而 $ut$ 也不是 $G^*$ 的简单可收缩边.

(ii). 设 $vs$ 是 $G$ 中不在扇 $F$ 上的一条基本边. 因而也是 $G'$ 中的基本边. 于是 $G'$ 中有 3 点割 $S\supset\{v,s\}$. 设 $S=\{v,s,y\}$, 显然 $t\neq u,w$. 若 $y=x$, 则 $\{v,s\}$ 是 $G^*$ 中的 2 点割, $vs$ 是 $G^*$ 的不可收缩边. 若 $y\neq x$, 则 $S$ 也是 $G^*$ 的 3 点割. 从而 $vs$ 也不是 $G^*$ 的简单可收缩边.

(iii). 设 $wp$ 是 $G$ 中的一条基本边. 同上可证 $wp$ 也是 $G^*$ 中的一条基本边.

综上所述, 我们有 $f(G^*)<f(G)$.

(III). $uv, vw$ 在 $G''$ 中可依次删除. 令 $G^*=G''-uv-vw$, 则 $G^*=G'-x$. 说明 $x$ 是 $G'$ 的可删除点. 由性质 1,$G^*$ 仍是极小 3 连通图且 $f(G^*)\leq f(G')-3$. 进而有 $f(G^*)\leq f(G)-2<f(G)$.

② 若 $xv$ 是 $G'$ 的基本边, 则非平凡扇 $F$ 变成了平凡扇 $F'$. 显然, 对于 $G$ 中扇 $F$ 外不与 $v$ 关联的基本边, 此运算不会改变它们的基本边的性质, 即 $G$ 中的这些基本边在 $G'$ 中仍然是基本边. 设 $e$ 是 $G$ 中与 $v$ 关联且不在扇 $F$ 上的基本边, 由事实 3 知, $e$ 至少与一个 3 度点关联. 则通过此运算后, $e$ 仍保持与这个 3 度点关联, 且容易证明 $e$ 在 $G'$ 中仍不可简单收缩, 从而 $e$ 是 $G'$ 的基本边. 此时有 $f(G')\leq f(G)$.

下面我们假定 $G$ 中无三边形. 设 $G$ 中有平凡扇 $F$, 其扇心为 $v$, 内点为 $x$, 两端边分别为 $ux, xw$. 令 $G'=G/ux$, 并设 $u$,$x$ 在 $G'$ 中的重合点仍记为 $u$.

(I). $d_G(u)\geq 4$. 设 $vp$ 是 $G$ 中异于 $vx$ 的基本边, 由引理 3 知 $vp$ 也是 $G'$ 的基本边. 设 $e=wp$ 是 $G$ 中的基本边, 则 $G-e$ 有 2 点割, 设为 $S$, 显然, $w$ 与 $p$ 在 $G-e-S$ 的两个不同的分支中, 不妨设 $w$ 所在的分支为 $A$, 其余分支的并为 $B$, 则 $p\in B$. 由于 $ux\in E(G)$, 所以 $ux\in E_{G-e}[A\cup S]$, 或 $ux\in E_{G-e}[B\cup S]$. 从而, $G'-e$ 中有 2 点割, 因此, $e$ 是 $G'$ 的不可删除边. 由事实 5,$e$ 不是 $G'$ 中的简单可收缩边. 故 $e$ 仍是 $G'$ 的基本边. 设 $f=ru$ 是 G 中的基本边, 于是 $G-f$ 有 2 点割, 设为 $S$. 显然, $r$ 与 $u$ 在 $G-ru$ 的两个不同的分支中. 设 $r$ 所在的分支为 $A$, 其余分支的并为 $B$. 由于 $d_G(u)\geq 4$, 因此 $u\in B$, 因而 $|B|\geq 2$. 由于 $ux\in E(G)$, 所以 $x\in S\cup B$. 若 $x\notin B$, 则 $G'$ 中有 2 点割, 与 $G'$ 是 3 连通矛盾. 若 $x\in B$, 则 $G'-ru$ 中有 2 点割, 因此, $ru$ 是 $G'$ 的不可删除边. 又由事实 5,$e$ 不是 $G'$ 中的简单可收缩边. 所以, $e$ 是 $G'$ 中的基本边. 由引理 3 知, $G$ 中除了与 $u$,$x$,$w$,$v$ 关联的基本边外, 其余所有的基本边在 $G'$ 中仍是基本边. 总之, $G$ 中除 $xv$ 外, 其余所有基本边在 $G'$ 中仍是基本边, 并且 $G'$ 中产生的可删除边只可能是 $uv, uw$.

(i). 若 $uv, uw$ 在 $G'$ 中都不可删除, 则 $f(G')\leq f(G)$.

(ii). 若 $uv, uw$ 在 $G'$ 中只可删除其中的一条, 不失一般性, 设 $G'$ 中只能删除 $uv$. 令 $G''=G'-uv$, 则 $d_G(v)=d'_G(v)\geq 4$. 易见, $G$ 中不与 $u$ 关联的基本边在 $G'$ 中仍是基本边. 下证 $G$ 中与 $u$ 关联的基本边在 $G'$ 中也是基本边. 设 $us$ 是 $G$ 中不的一条基本边. 由于 $d_G(u)\geq 4$, 由事实 4,$d_G(s)=3$, 于是 $d''_G(s)=d_G(s)=3$. $us$ 在 $G''$ 中不可删除. 因而有 $f(G'')<f(G)$.

(iii). 若 $uv, uw$ 在 $G'$ 中在 $G'$ 中可依次删除. 令 $G''=G'-uv-uw$, 则 $G''=G-x$. 说明

$x$ 是 $G$ 中的可删除点．由性质 1,$G''$ 仍是极小 3 连通图且 $f(G'') \le f(G)-2 < f(G)$.

(II). $d_G(u)=3$. 设 $N_G(u)=\{s,r,x\}$, 由引理 3,$G$ 中不与 $u,x$ 关联的基本边在 $G'$ 中仍是基本边，并且 $G'$ 中产生的可删除边只可能是与 $u$ 关联的四条边 $su,ru,uv,uw$. 而且最多只能删除其中的一条．下面分情况加以讨论：

(i). 若 $su$ 或 $ru$ 在 $G'$ 中可删除．不失一般性，设 $ru$ 可删除，令 $G''=G'-ru$. 由于 $G$ 中无三边形，所以 $G'$ 中最多出现两个三边形 $\{u,r,v\},\{u,s,w\}$. 由引理 4,$G'$ 中只有 $rv,uv$ 才有可能变为 $G''$ 中的非基本边．若 $rv \in E_G$ 且是 $G$ 中的基本边．由于 $d_G(r)=d'_G(r)\ge 4$, 根据事实 4, 有 $d''_G(v)=d'_G(v)=d_G(v)=3$. 因此 $rv$ 是 $G''$ 的不可删除边．又因为 $rv$ 是 $G$ 中的基本边，于是 $G$ 中有 3 点割 $S\supset\{r,v\}$. 设 $S=\{r,v,y\}$. 若 $y\ne u,x$, 则 $S$ 也是 $G''$ 中的包含 $\{r,v\}$ 的 3 点割， $rv$ 不是 $G''$ 中的简单可收缩边．若 $y=u$, 则 $x$ 在 $G-S$ 的一个分支 $A$ 中，由于 $rv\notin E_G$. 因此 $|A|\ge 2$. 所以 $S$ 也是 $G''$ 中的包含 $\{r,v\}$ 的 3 点割， $rv$ 不是 $G''$ 中的简单可收缩边．若 $y=x$, 同上可证 $rv$ 不是 $G''$ 中的简单可收缩边．总之，我们有 $f(G'')<f(G)$.

(ii). 若 $uv$ 或 $uw$ 在 $G'$ 中可删除．不失一般性，设 $uv$ 可删除，令 $G''=G'-uv$. 类似①可以证明 $f(G'')<f(G)$.

## 3 定理的证明

设 $G$ 是恰有 $k(k\ge 3)$ 条非基本边且边数为 $m$ 的极小 3 连通图．我们对图 $G$ 中的非基本边的数目 $k$ 进行归纳证明．首先验证初始条件， $G_3$ 包含分割轮和交叉分割轮．对于分割轮，先将其中的一个扇上的所有内点和扇心收缩为一点，分割轮便成为轮．再看交叉分割轮，同样先将其中的一个扇上的所有内点和扇心收缩为一点，交叉分割轮便成为轮．因此，当 $k=3$ 时，结论成立．假设当 $k\le n$ 时，结论成立．即任意一个至多有 $n$ 条非基本边的极小 3 连通图都可以由轮经过一系列运算一、二、三的逆运算及添边而得到．下面证明，当 $k=n+1$ 时，结论也成立．设 $G$ 是极小 3 连通图， $f(G)=n+1,e(G)=m\ge k=n+1$. 若 $m=n+1$, 即 $G$ 中每条边都是非基本边．任取一边 $e\in E(G)$. 由于 $e$ 是 $G$ 中的简单可收缩边，在 $G$ 中收缩 $e$, 再把图中的可删除边依次删除后，得极小图 $G'$, 则 $f(G')\le n$, 由归纳假定，结论对 $G'$ 成立，从而结论对 $G$ 也成立．假设 $f(G)=n+1,e(G)<m$ 时，结论已成立．现设 $f(G)=n+1,e(G)=m$. 对图 $G$ 施行一系列运算一、二、三 (1) 后，得一极小图，设为 $G'$. 由前面的讨论可知， $G'$ 仍是极小 3 连通图，并且 $f(G')<f(G)$ 或 $f(G')=f(G)$, $e(G')<e(G)$. 由归纳假设，结论对 $G'$ 成立，从而结论对 $G$ 也成立．因此可以假定，图 $G$ 中必有平凡扇．对其中一个平凡扇实施运算三 (2), 得图 $G'$, 由前面的讨论有 $f(G')<f(G)$ 或 $f(G')=f(G)$,$e(G')<e(G)$. 由归纳假设，结论对 $G'$ 成立，从而结论对 $G$ 也成立. □

## 参考文献:


[1] TUTTE W T. *A theory of 3-connected graphs* [J]. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.A 64 = Indag. Math., 1961, **23**: 441–455.

[2] OXLEY J G, WU Hai-dong. *The 3-connected graphs with exactly three non-essential edges* [J]. Graphs Combin., 2004, **20**: 233–246.

[3] REID T J, WU Hai-dong. *A non-planar version of Tutte's wheels theorem* [J]. Australas. J. Combin., 1999, **20**: 3–12.

[4] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theroy with Applications* [M]. North-Holland, New York, 1981.

[5] ANDO K, ENOMOTO H, SAITO A. *Contractible edges in 3-connected graphs* [J]. J. Combin. Theroy Ser.B,

1987, **42**: 87–93.
[6] OXLEY J, WU Hai-dong. *On the structure of 3-connected matroids and graphs* [J]. European J. Combin., 2000, **21**: 667–688.

# Minimally 3-Connected Graphs with Exactly $k$ Non-Essential Edges

*LIU Yu-xing*[1], *SU Jian-ji*[2]
(1. Dept. of Math., Ganzhou Teacher's College, Jiangxi 341000, China;
2. College of Math. & Comput. Sci., Guangxi Normal University, Guilin 541004, China )

**Abstract**: Let $G$ be a simple 3-connected graph. An edge $e$ of a simple 3-connected graph $G$ is essential if neither the deletion $G\backslash e$ nor the contraction $G/e$ is simple and 3-connected.

For essential edges of a 3-connected graph, Tutte obtained the following theorem.

**Theorem 1** *Let $G$ be a simple 3-connected graph. Then every edge is essential if and only if $G$ is a wheel.*

This theorem ensures the existence of at least one non-essential edge in every simple 3-connected graph that is not a wheel. The existence of non-essential edges has become a powerful induction tool.

Oxley and Wu proved that if $G$ is a minimally 3-connected graph that is not a wheel, then there are at least three non-essential edges, and characterized the minimally 3-connected graphs with exactly three non-essential edges. Reid and Wu also determined all minimally 3-connected graphs with at most five non-essential edges.

In this paper, we use a quite different way to solve this problem. We prove the result by constructing all of the minimally 3-connected graphs with exactly $k$ non-essential edges through several operations, starting with a wheel. That is, firstly, in a minimally 3-connected graph, we define the following three operations:

**Operation One**: Deletion of any deletable vertex.

**Operation Two**: If the hub of a non-trivial fan is incident to only one edge out of the fan, then all the inner-vertices of the fan and the hub of the non-trivial fan are contracted into a vertex. If the vertex is a deletable vertex, then it is deleted.

**Operation Three**: If the hub of a non-trivial fan is incident to two or more edges out of the fan, then the non-trivial fan is transformed into a triad (that is, in the non-trivial fan, we contract all arcs and delete loops and multi-edges). First, if the three edges of the triad are simple-contractible, the simple-contractible edge that is incident to the hub of the former non-trivial fan is contracted. All the generated deletable edges are deleted in turn, till there are no deletable edges in the graph. Secondly, if there are exactly two simple-contractible edges in the triad, then any one of them is contracted, and all the generated deletable edges are deleted in turn, till there are no deletable edges in the graph. For any non-trivial fan. Operation One is applied on any one of contractible edges chosen from the fan.

Then by the above operations and the operation of adding edges, we can construct all minimally 3-connected graphs with exactly $k$ ($k \geq 3$) non-essential edges, starting with a wheel. By induction, a minimally 3-connected graph with exactly $k$ ($k \geq 4$) non-essential edges, can be transformed into a minimally 3-connected graph with much less non-essential edges by a series of these operations. According to the induction hypothesis, a minimally 3-connected graph with less than $k$ non-essential edges can be obtained from a wheel by the inverse of the used operations. Therefore, a minimally 3-connected graph with exactly $k$ non-essential edges can be obtained from a wheel by the inverse of the used operations. In this way, all minimally 3-connected graphs with exactly $k$ non-essential edges can be constructed completely.

So, we obtain the following main result of the paper:

**Theorem 2** *$G_k$ ($k \geq 3$) can be transformed into $W$ through a series of Operation One, Two, Three and the deletion of edges. Hence, $G_k$ ($k \geq 3$) can be obtained from a wheel by the inverse of the used operations, where $G_k$ and $W$ are used to denote a minimally 3-connected graph with exactly $k$ non-essential edges and a wheel, respectively.*

**Key words**: minimally 3-connected graph; non-essential edge; fan; wheel.