文章编号: 1000-341X(2006)04-0843-03 **文献标识码**: A

关于仿紧空间的原象

恽自求， 王苏华
(苏州大学数学系，江苏 苏州 215006)
(E-mail: yunziqiu@publicl.sz.js.cn)

摘　要: 本文利用 $\alpha\sigma$ 仿紧子集的概念，给出了在正则空间条件下，仿紧空间在连续闭映射下的原象是仿紧空间的一个充分条件．这一结果，统一推广了高国士教授与陈必胜教授在两篇论文中的结果.

关键词: 仿紧空间； $\alpha\sigma$ 仿紧子集.
MSC(2000): 54E35, 54E99
中图分类: O189.1

仿紧空间是最重要的拓扑空间之一．文 [1] 与 [2] 分别给出了仿紧空间在连续闭映射下原象保持仿紧的条件．本文旨在对文 [1] 与 [2] 的主要结果进行统一的改进.

设 X 为拓扑空间．如果 X 的每个开覆盖具有局部有限开加细覆盖，则称 X 为仿紧空间．由 [3], 正则空间 X 为仿紧空间当且仅当 X 的每个开覆盖有 σ- 局部有限开加细覆盖．设 A 为 X 的子集．如果对 X 中覆盖 A 的每个开集族，从中总可以选取可数个开集覆盖 A, 则称 A 为 Lindelöf 子集；如果对 X 中覆盖 A 的每个开集族 $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ 有开加细 $\mathcal{V}$ 在 X 中局部有限且覆盖 A, 则称 A 为 α 仿紧子集 [4], 其中称 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{U}$ 的开加细，是指对任意 $V\in\mathcal{V}$, 存在 $U\in\mathcal{U}$, 使 $V\subseteq U$.

下面分别是 [1] 与 [2] 的主要结果：

定理 1[1, 定理2]　设 X 是正则空间， f 是 X 到仿紧空间 Y 上的连续闭映射，如果对每个 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子集，则 X 是仿紧空间.

定理 2[2, 定理1]　设 X 是拓扑空间， f 是 X 到仿紧空间 Y 上的连续闭映射，如果对每个 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的 α 仿紧子集，则 X 是仿紧空间.

下面的例子说明，在正则空间中可数闭子集 (因而一定是 Lindelöf 子集) 不一定是 α 仿紧子集.

例 1　设 X 为 Niemytzki 相切圆盘拓扑 [5, 例82]. 令 M 为 x- 轴上全体点组成的集合， A 为其中的有理点组成的集合．则 A 为 X 的可数子集．下面证明 A 不是 α 仿紧子集.

对每个 $p=(x,0)\in A$, S_p 表示半径为 1 且与 x- 轴切于 p 点的开圆，令

$$\mathcal{U}=\{S_p\cup\{p\}:p\in A\}.$$

则 $\mathcal{U}$ 为覆盖 A 的开集族．下面证明 $\mathcal{U}$ 的任何一个开加细集族，只要覆盖 A, 则在 X 中一定不是局部有限的．事实上，设 $\mathcal{V}$ 加细 $\mathcal{U}$ 且覆盖 A. 如果 $\mathcal{V}$ 在 X 中局部有限，则对每个 $q\in M\setminus A$, 由于对每个 $S_p\cup\{p\}$, $q\notin\mathrm{Cl}(S_p\cup\{p\})$ 总是成立的，其中 $\mathrm{Cl}(S_p\cup\{p\})$ 表示 $S_p\cup\{p\}$ 在 X 中的

收稿日期: 2004-09-28
基金项目: 国家自然科学基金 (10271026, 10571151), 江苏省教育厅自然科学基金 (02KJB110001)

闭包，而 $\mathcal{V}$ 加细 $\mathcal{U}$, 因此对每个 $V \in \mathcal{V}$, $q \notin \mathrm{Cl}V$ 应该成立．因为 $\mathcal{V}$ 在 X 中局部有限，因此 $\mathcal{V}$ 在 X 中闭包保持，于是 $q \notin \bigcup\{\mathrm{Cl}V : V \in \mathcal{V}\} = \mathrm{Cl}(\bigcup\{V : V \in \mathcal{V}\})$.

这意味着 $(M \setminus A) \cap \mathrm{Cl}(\bigcup\{V : V \in \mathcal{V}\}) = \emptyset$.

令 $U = X \setminus \mathrm{Cl}(\bigcup\{V : V \in \mathcal{V}\})$, $W = \bigcup\{V : V \in \mathcal{V}\}$.

则 U, W 分别为 X 中包含 $A, M \setminus A$ 的不相交开集，而众所周知这是不可能的. □

显然, 在任何一个不可数的离散空间中, 每一个不可数子集是 α 仿紧闭子集而不是 Lindelöf 子集．结合上面的例 1 , 就证明了即使在正则空间的条件下，定理 1 与定理 2 仍然是互相独立的.

下面我们给出定理 1 与定理 2 的统一改进.

定义 设 X 为拓扑空间， A 为 X 的子集．如果对 X 中覆盖 A 的每个开集族 $\mathcal{U}, \mathcal{U}$ 有开加细 $\mathcal{V}$ 覆盖 A 且 $\mathcal{V}$ 为可数个在 X 中局部有限的集族之并，则称 A 为 $\alpha\sigma$ 仿紧子集.

显然， α 仿紧子集与 Lindelöf 子集都是 $\alpha\sigma$ 仿紧子集．因此下面的定理 3 在正则空间条件下，统一改进定理 1 与定理 2.

定理 3 设 X 是正则空间， f 是 X 到仿紧空间 Y 上的连续闭映射，如果对每个 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的 $\alpha\sigma$ 仿紧子集，则 X 是仿紧空间.

证明 设 $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ 为 X 的任意一个开覆盖.

对每个 $y \in Y, \mathcal{U}$ 是覆盖 $f^{-1}(y)$ 的开集族．因为 $f^{-1}(y)$ 是 X 的 $\alpha\sigma$ 仿紧子集, 因此存在 X 中的开集族 $\mathcal{V}_y$ 加细 $\mathcal{U}$, 覆盖 $f^{-1}(y)$ 并且是 X 中可数个局部有限集族之并．记 $\mathcal{V}_y = \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{V}_{y,i}$, 其中每个 $\mathcal{V}_{y,i}$ 都在 X 中局部有限.

记 $\mathcal{V}_y^* = \cup\{V : V \in \mathcal{V}_y\}$.

则 $\mathcal{V}_y^*$ 为 X 中开集并且 $f^{-1}(y) \subseteq \mathcal{V}_y^*$．因为 f 是连续闭映射，因此存在 X 中开集 E_y, 使 $f^{-1}(y) \subseteq E_y \subseteq \mathcal{V}_y^*$, $E_y = f^{-1}(f(E_y))$ 并且 $f(E_y)$ 是 Y 中包含了 y 的开集.

令 $W_y = f(E_y)$, 则 $\mathcal{W} = \{W_y : y \in Y\}$ 是仿紧空间 Y 的开覆盖，因此存在局部有限加细开覆盖 $\mathcal{O} = \{O_\beta : \beta \in B\}$. 对每个 $\beta \in B$, 取定 $\mathcal{W}$ 中一个包含 O_β 的开集 $W_{y(\beta)}$, 并且令

$$\mathcal{A}_{\beta,i} = \{f^{-1}(O_\beta) \cap V : V \in \mathcal{V}_{y(\beta),i}\},$$

$$\mathcal{A}_i = \bigcup_{\beta\in B} \mathcal{A}_{\beta,i}, \quad \mathcal{A} = \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{A}_i.$$

下面证明 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{U}$ 的 σ- 局部有限开加细覆盖.

$\mathcal{A}$ 加细 $\mathcal{U}$ 是显然的.

利用 $f^{-1}(O_\beta) \subseteq \mathcal{V}_{y(\beta)}^*$ 以及 $\mathcal{A}_{\beta,i}$ 的取法可以得到 $\bigcup_{i\in\omega} \mathcal{A}_{\beta,i}^* = f^{-1}(O_\beta)$, 其中 $\mathcal{A}_{\beta,i}^* = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}_{\beta,i}\}$, 因此由 $\{f^{-1}(O_\beta) : \beta \in B\}$ 为 X 的开覆盖，可以得到 $\mathcal{A}$ 为 X 的开覆盖.

下面证明对每个 $i \in \omega$, $\mathcal{A}_i$ 在 X 中是局部有限的.

对任意 $x \in X$, 设 $y = f(x)$. 一方面因为 $\mathcal{O}$ 在 Y 中局部有限，因此存在 y 的开邻域 G_y, G_y 与 $\mathcal{O}$ 中至多有限个元，设为 $O_{\beta_1}, O_{\beta_2}, \cdots, O_{\beta_n}$ 相交．从而 x 的邻域 $H_x = f^{-1}(G_y)$ 至多与 $f^{-1}(O_{\beta_1}), f^{-1}(O_{\beta_2}), \cdots, f^{-1}(O_{\beta_n})$ 相交．另一方面，对每个 $k = 1, 2, \cdots, n$, 由于 $\mathcal{V}_{y(\beta_k),i}$ 是 X 中局部有限集族，我们可以取 x 的开邻域 H_k, 使其只与 $\mathcal{V}_{y(\beta_k),i}$ 中有限个元素相交．令 $H = H_x \cap (\bigcap_{k=1}^n H_k)$, 则 H 为 x 的邻域并且其只与 $\mathcal{A}_i$ 中至多有限个元素相交，这就证明了 $\mathcal{A}_i$ 在 X 中是局部有限的，所以 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{U}$ 的 σ- 局部有限开加细覆盖.

由 [3] 定理 1, X 是仿紧空间. □

参考文献:

[1] 高国士. 仿紧性与完备映象 [J]. 数学学报, 1980, **23**: 794–796.
GAO Guo-shi. *Paracompactness and perfect mappings* [J]. Acta Math. Sinica, 1980, **23**: 794–796. (in Chinese)
[2] 陈必胜. 关于在连续闭映射下的原象 [J]. 数学研究与评论, 1985, **5**: 121–122.
CHEN Bi-sheng. *On inverses images under closed continous mappings* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1985, **5**: 121–122. (in Chinese)
[3] MICHAEL E. *A note on paracompact spaces* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**: 487–490.
[4] AULL C E. *Paracompact subsets* [J]. Proceeding of the 2nd Pragul Symposium, 1966, 45-51 Topology Appl., 1971, **1** 43–48.
[5] STEEN L, SEEBACH J. *Counterexamples in Topology* [M]. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978.

On Inverses Images of Paracompact Spaces

YUN Zi-qiu, WANG Su-hua
(Dept. of Math., Suzhou University, Jiangsu 215006, China)

Abstract: In this note, by using the concept of $\alpha\sigma$-paracompact sets, we give a sufficient condition for a regular inverse image of a paracompact space under a continuous closed mapping to be paracompact. This result generalizes the correspondent results given by G. Gao and B. Chen.

Key words: paracompact spaces; $\alpha\sigma$-paracompact sets.