第27卷第1期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.1
2007年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)01-0157-08 **文献标识码**: **A**

一类双重退化抛物方程解的存在性及零初始能量下的爆破

王建， 高文杰
(吉林大学数学研究所，吉林 长春 130012)
(E-mail: jianwang@email.jlu.edu.cn)

摘 要: 本文研究下述双重退化抛物方程的初边值问题：

$$u_t-\mathrm{div}(|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m)=f(u),$$

并证明在 f 满足适当的条件下具零或者负初始能量的解的存在性和在有限时刻的爆破性结果.

关键词: 双重退化；初边值问题；爆破.
MSC(2000): 35K55; 35K57; 35K65
中图分类: O175.8

1 引 言

本文研究下述初边值问题解的存在性和有限时刻的爆破性：

$$u_t-\mathrm{div}(|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m)=f(u),\quad x\in\Omega,t>0,\tag{1.1}$$

$$u(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega,t\geq 0,\tag{1.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega,\tag{1.3}$$

其中 $p>2,m\geq 1$, f 是连续函数， Ω 为 $R^n(n\geq 1)$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域.

许多作者研究了上述问题在 $m=1$ 时的情形并得到了很多结果，即具有初边值条件 (1.2), (1.3) 的下述问题：

$$u_t-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=f(u),\quad x\in\Omega,t>0.\tag{1.4}$$

1993 年，赵俊宁在文献 [1] 中研究了方程 (1.4) 并得到了在 f 依赖于 u 和 ∇u 的条件下解的整体存在的结果. 而且他还证明了在下述条件下方程 (1.1) 的解不是整体存在的：

$$\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u_0(x)|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_0(x))\mathrm{d}x\leq-\frac{4(p-1)}{pT(p-2)^2}\int_\Omega u_0^2(x)\mathrm{d}x,\tag{1.5}$$

其中， $F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$. 更精确的是，他证明了如果存在 $T>0$ 使得 (1.5) 式成立，则解在小于 T 的时刻爆破. Levine 等人在文献 [2] 中推广了这种结果并且证明了整体解和非整体解的存在性定理. 他们的结果应用到问题 (1.4) 式时需要下述条件

$$\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u_0(x)|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_0(x))\mathrm{d}x<0.$$

收稿日期: 2005-10-26; **修订日期**: 2006-01-04; **接受日期**: 2006-01-18
基金项目: 国家自然科学基金 (10371050)

Messaoudi 在文献 [3] 中证明了甚至对零能量也能得到爆破的结果，而且他还给出爆破满足的条件

$$\frac{1}{p}\int_{\Omega}|\nabla u_0(x)|^p\mathrm{d}x-\int_{\Omega}F(u_0(x))\mathrm{d}x\leq 0.$$

Wang Jing 等在文献 [4] 中研究了如下的发展型 p-Laplace 方程的混合边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+f(x,u,t),$$

并证明了方程解的局部存在性和唯一性. 王建和高文杰在文献 [5] 中给出了上述方程第二初边值问题解的爆破性和有界性.

本文推广了文献 [3] 的结果，主要研究了问题 (1.1)–(1.3) 当 $m\geq 1$ 时解的性质，并给出了该问题的解爆破的条件. 为了本文的完整性，我们首先给出问题 (1.1)–(1.3) 解的局部存在性的结果，这个结果是文献 [4] 中结果的推广.

2 解的存在性

显然方程 (1.1) 在使得 $u=0,\ |\nabla u|=0$ 的点处退化，因此我们需要扩充解的定义. 下面我们给出问题 (1.1)–(1.3) 广义解的定义.

定义 2.1 称满足 $u^m\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^\infty(\Omega\times(0,T))$ 且 $\dfrac{\partial u^m}{\partial t}\in L^2(Q_T)$ 的函数 u 为问题 (1.1)–(1.3) 在 $\Omega\times(0,T)$ 上的广义解，如果 $|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m$ 在 $\Omega\times(0,T)$ 上局部可积，且对任何在 $t=T$ 附近为零的检验函数 $\varphi\in W_0^{1,p}(\overline{Q}_T)$, 有

$$\int_{\Omega}u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x+\iint_{Q_T}\Big(u\varphi_t-|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m\nabla\varphi+f\varphi\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{2.1}$$

下面我们给出本节的主要定理.

定理 2.1 设 $f\in C(\mathbf{R})$ 满足

$$|mu^{m-1}f(u)|\leq g(u^m), \tag{2.2}$$

其中， $g(u)\in C^1(\mathbf{R}),g(u)>0$. 则对任意的 $u_0^m\in L^\infty(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$, 存在 $T'\in[0,T]$, 使得问题 (1.1)–(1.3) 有解 u 满足

$$u^m\in L^\infty\Big(\Omega\times(0,T')\Big)\bigcap L^p\Big(0,T';W_0^{1,p}(\Omega)\Big),\quad (u^m)_t\in L^2\Big(\Omega\times(0,T')\Big). \tag{2.3}$$

我们用正则化方法给出证明. 由于方程 (1.1) 的退化性，考虑如下的正则化问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{div}\Big((|\nabla u^m|^2+\varepsilon)^{(p-2)/2}\nabla u^m\Big)+f(u),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{2.4}$$

$$u=\varepsilon,\quad x\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{2.5}$$

$$u(x,0)=u_{0\varepsilon}(x)+\varepsilon,\quad x\in\Omega, \tag{2.6}$$

其中 $0<\varepsilon<1$, $u_{0\varepsilon}(x)\in C^\infty(\overline{\Omega})$, 使得 $|(u_{0\varepsilon}+\varepsilon)^m|_{L^\infty(\Omega)}\leq|(u_0+1)^m|_{L^\infty(\Omega)}$, $|\nabla u_{0\varepsilon}^m|_{L^p(\Omega)}\leq|\nabla u_0^m|_{L^p(\Omega)}$, 而且 $(u_{0\varepsilon}+\varepsilon)^m\to u_0^m$ 于 $W^{1,p}(\Omega)$. 我们知道上述正则化问题存在非负古典解 u_ε,

且 $u_\varepsilon \geq \varepsilon$, 可见文献 [6] 定理 4.1. 记 u_ε 为问题 (2.4)–(2.6) 的解，下面我们给出关于 u_ε 的一些一致估计，在叙述中用 C 表示常数，在不同场合可能取不同的值.

引理 2.1　存在 $T' \in (0,T)$ 使得 (2.4)–(2.6) 式的解 u_ε 满足

$$|u_\varepsilon^m|_{L^\infty(Q_{T'})} \leq C, \tag{2.7}$$

其中，$Q_{T'} = \Omega \times (0,T')$, C 是仅依赖于 T' 的常数.

证明　令 $w(t)$ 满足常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = g(w), \tag{2.8}$$

$$w(0) = |(u_0(x)+1)^m|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.9}$$

由文献 [7] 第二章的定理 5.1, 知道存在仅依赖于 $|(u_0(x)+1)^m|_{L^\infty(\Omega)}$ 的 $T_0 \in (0,T)$, 使得上述问题在 $[0,T_0]$ 上有解. 令 $\varphi = u_\varepsilon^m - w$, 由条件 (2.2), 得到

$$mu_\varepsilon^{m-1} f(u_\varepsilon) - g(w) \leq (u_\varepsilon^m - w)\int_0^1 g'(\theta u_\varepsilon^m + (1-\theta)w)\mathrm{d}\theta = C_\varepsilon(x,t)\varphi.$$

因此 φ 满足

$$\varphi_t - m(\varphi+w)^{\frac{m-1}{m}}\mathrm{div}\big((|\nabla\varphi|^2+\varepsilon)^{\frac{p-2}{2}}\nabla\varphi\big) - C_\varepsilon(x,t)\varphi \leq 0.$$

由 (2.9) 和 u_ε 的初边值满足的条件，有

$$\varphi \leq \varepsilon^m - |(u_0(x)+1)^m|_{L^\infty(\Omega)} \leq 0, \quad \text{于 } \partial\Omega \times [0,T_0];$$

$$\varphi = (u_{0\varepsilon}(x)+\varepsilon)^m - |(u_0(x)+1)^m|_{L^\infty(\Omega)} \leq 0, \quad \text{于 } \overline{\Omega}.$$

于是由极值原理及强极值原理可得在 Q_{T_0} 上，$\varphi \leq 0$. 从而有

$$|u_\varepsilon^m|_{L^\infty(Q_{T_0})} \leq \max_{(0,T_0)} w(t).$$

令 $T' = \dfrac{T_0}{2}$, $C = w(T')$, 可得

$$|u_\varepsilon^m|_{L^\infty(Q_{T'})} \leq C.$$

引理 2.2　正则化问题 (2.4)–(2.6) 的解 u_ε 满足

$$\iint_{Q_{T'}} |\nabla u_\varepsilon^m|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C, \tag{2.10}$$

其中 C 是仅依赖于 T' 的常数.

证明　用 u_ε^m 乘 (2.4) 式两端，并在 $Q_{T'}$ 上积分，经分部积分，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m+1}\int_\Omega u_\varepsilon^{m+1}(x,T')\mathrm{d}x - \frac{1}{m+1}\int_\Omega (u_{0\varepsilon}(x)+\varepsilon)^{m+1}\mathrm{d}x\\ &= \iint_{S_{T'}} (|\nabla u_\varepsilon^m|^2+\varepsilon)^{(p-2)/2}\nabla u_\varepsilon^m \cdot \vec{n} u_\varepsilon^m \mathrm{d}s\mathrm{d}t -\\ &\quad \iint_{Q_{T'}} (|\nabla u_\varepsilon^m|^2+\varepsilon)^{(p-2)/2}|\nabla u_\varepsilon^m|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_{T'}} f u_\varepsilon^m \mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 $S_{T'}=\partial\Omega\times(0,T')$. 利用条件 (2.5), 上式可化为

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_{T'}}|\nabla u_\varepsilon^m|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\iint_{Q_{T'}}(|\nabla u_\varepsilon^m|^2+\varepsilon)^{(p-2)/2}|\nabla u_\varepsilon^m|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\frac{1}{m+1}\int_\Omega(u_{0\varepsilon}(x)+\varepsilon)^{m+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{m+1}\int_\Omega u_\varepsilon^{m+1}(x,T')\mathrm{d}x+C\iint_{Q_{T'}}f\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C.\end{aligned}$$

引理 2.3 正则化问题 (2.4)–(2.6) 的解 u_ε 满足

$$\left\|\frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}\right\|_{L^2(Q_{T'})}\le C,\tag{2.11}$$

其中 C 是仅依赖于 T' 的常数.

证明 在 (2.4) 式两端乘 $(u_\varepsilon^m)_t$, 并在 $Q_{T'}$ 上积分，并利用初边值条件 (2.5)–(2.6) 得

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_{T'}}mu_\varepsilon^{m-1}\big|u_{\varepsilon t}\big|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\iint_{Q_{T'}}(|\nabla u_\varepsilon^m|^2+\varepsilon)^{\frac{(p-2)}{2}}\nabla u_\varepsilon^m\nabla(u_\varepsilon^m)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_{T'}}mfu_\varepsilon^{m-1}u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=-\frac12\int_0^{T'}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_\Omega\int_0^{|\nabla u_\varepsilon^m(x,t)|^2}(s+\varepsilon)^{\frac{(p-2)}{2}}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t+\iint_{Q_{T'}}mfu_\varepsilon^{m-1}u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\frac12\int_\Omega\Big(\int_0^{|\nabla u_{0\varepsilon}^m|^2}(s+\varepsilon)^{\frac{(p-2)}{2}}\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}x-\frac12\int_\Omega\Big(\int_0^{|\nabla u_\varepsilon^m(x,T')|^2}(s+\varepsilon)^{\frac{(p-2)}{2}}\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}x+\\&\quad\iint_{Q_{T'}}mfu_\varepsilon^{m-1}u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

利用 Young 不等式 [4] 和引理 2.2 可得

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_{T'}}mu_\varepsilon^{m-1}\big|u_{\varepsilon t}\big|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac1p\int_\Omega(|\nabla u_{0\varepsilon}^m|^2+\varepsilon)^{\frac p2}\mathrm{d}x-\\&\quad\frac1p\int_\Omega(|\nabla u_\varepsilon^m(x,T')|^2+\varepsilon)^{\frac p2}\mathrm{d}x+\iint_{Q_{T'}}mfu_\varepsilon^{m-1}u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le C+\frac12\iint_{Q_{T'}}mu_\varepsilon^{m-1}|f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac12\iint_{Q_{T'}}mu_\varepsilon^{m-1}|u_{\varepsilon t}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

进一步，由引理 2.1 和上式有

$$\iint_{Q_{T'}}\left|\frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=m\iint_{Q_{T'}}u_\varepsilon^{m-1}\left(mu_\varepsilon^{m-1}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2\right)\le C.$$

定理 2.1 的证明 由引理 2.1–2.3 以及嵌入定理知存在 $\{u_\varepsilon\}$ 的子列 (不妨仍记为 $\{u_\varepsilon\}$) 和 $Q_{T'}$ 上的函数 u, 使得当 $\varepsilon\to0$ 时,

$$\begin{aligned}&u_\varepsilon\to u, &&\text{于 } Q_{T'},\\&\frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial t}\rightharpoonup\frac{\partial u^m}{\partial t}, &&\text{于 } L^2(Q_{T'}).\end{aligned}$$

由引理 2.2 的证明可以看出,

$$\iint_{Q_{T'}} \varepsilon^{(p-2)/2}|\nabla u_\varepsilon^m|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C, \tag{2.12}$$

$$\iint_{Q_{T'}} (|\nabla u_\varepsilon^m|^2+\varepsilon)^{(p-2)/2}|\nabla u_\varepsilon^m|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C. \tag{2.13}$$

利用 (2.12),(2.13) 得

$$\begin{aligned}
&\iint_{Q_{T'}} \Big|(|\nabla u_\varepsilon^m|^2+\varepsilon)^{\frac{(p-2)}{2}}\frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial x_i}\Big|^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le C\Big(\iint_{Q_{T'}} |\nabla u_\varepsilon^m|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \varepsilon^{\frac{p(p-2)}{2(p-1)}} \iint_{Q_{T'}} |\nabla u_\varepsilon^m|^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big) \\
&\le C\Big(\iint_{Q_{T'}} |\nabla u_\varepsilon^m|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t + C\varepsilon^{\frac{p(p-2)}{2(p-1)}}\big(\frac{C}{\varepsilon^{\frac{(p-2)}{2}}}\big)\Big) \le C.
\end{aligned}$$

这表明存在 $\mu_i \in L^{\frac{p}{p-1}}(Q_{T'}), i=1,\cdots,n$，使得

$$(|\nabla u_\varepsilon^m|^2+\varepsilon)^{\frac{(p-2)}{2}}\frac{\partial u_\varepsilon^m}{\partial x_i} \rightharpoonup \mu_i, \quad \text{在 } L^{\frac{p}{p-1}}(Q_{T'}) \text{ 中}.$$

从而 $\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\overline{Q}_{T'})$ 且在 $t=T'$ 附近 $\varphi=0$, 有

$$\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x + \iint_{Q_{T'}} \Big(u\varphi_t - \mu\nabla\varphi + f\varphi\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0, \tag{2.14}$$

其中 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$. 往证对上述 φ, 有

$$\iint_{Q_{T'}} |\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m \nabla\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint_{Q_{T'}} \mu\nabla\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{2.15}$$

注意到对于向量值函数 $F(X)=|X|^{p-2}X$, 有

$$(F(X)-F(Y))\cdot(X-Y) \ge 0$$

成立，从而对 $\forall v^m \in L^p(0,T';W^{1,p}(\Omega))$, $\zeta \in W_0^{1,p}(\overline{Q}_{T'}), 0\le\zeta\le 1$, 在 $t=T'$ 附近 $\zeta=0$, 有

$$\iint_{Q_{T'}} \zeta(|\nabla u_\varepsilon^m|^{p-2}\nabla u_\varepsilon^m - |\nabla v^m|^{p-2}\nabla v^m)\cdot\nabla(u_\varepsilon^m - v^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \ge 0. \tag{2.16}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\iint_{Q_{T'}} \zeta(|\nabla u_\varepsilon^m|^2+\varepsilon)^{(p-2)/2}|\nabla u_\varepsilon^m|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{m+1}\int_\Omega \zeta(x,0)(u_{0\varepsilon}(x)+\varepsilon)^{m+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{m+1}\iint_{Q_{T'}} \zeta_t u_\varepsilon^{m+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\
&\quad \iint_{Q_{T'}} u_\varepsilon^m f\zeta \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \iint_{Q_{T'}} u_\varepsilon^m(|\nabla u_\varepsilon^m|^2+\varepsilon)^{(p-2)/2}\nabla u_\varepsilon^m \nabla\zeta \mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

以及当 $p \geq 2$ 时，有

$$(|\nabla u_\varepsilon^m|^2+\varepsilon)^{(p-2)/2}|\nabla u_\varepsilon^m|^2 \geq |\nabla u_\varepsilon^m|^p,$$

由 (2.16) 式则可推出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m+1}\int_\Omega \zeta(x,0)(u_{0\varepsilon}(x)+\varepsilon)^{m+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{m+1}\iint_{Q_{T'}}\zeta_t u_\varepsilon^{m+1}-\\&\iint_{Q_{T'}}\zeta|\nabla u_\varepsilon^m|^{p-2}\nabla u_\varepsilon^m\nabla v^m\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_{T'}}u_\varepsilon^m f\zeta\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\\&\iint_{Q_{T'}}u_\varepsilon^m(|\nabla u_\varepsilon^m|^2+\varepsilon)^{(p-2)/2}\nabla u_\varepsilon^m\nabla\zeta\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\\&\iint_{Q_{T'}}\zeta|\nabla v^m|^{p-2}\nabla v^m\cdot\nabla(u_\varepsilon^m-v^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geq 0.\end{aligned}\tag{2.17}$$

由于有

$$\left(|\nabla u_\varepsilon^m+\varepsilon|\right)^{(p-2)/2}\nabla u_\varepsilon^m=|\nabla u_\varepsilon^m|^{p-2}\nabla u_\varepsilon^m+\frac{(p-2)\varepsilon}{2}\nabla u_\varepsilon^m\int_0^1\left(|\nabla u_\varepsilon^m|^2+\varepsilon s\right)^{(p-4)/2}\mathrm{d}s,$$

在 (2.17) 式中令 $\varepsilon\to 0$, 由 f 的连续性可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m+1}\int_\Omega\zeta(x,0)u_0^{m+1}(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{m+1}\iint_{Q_{T'}}\zeta_t u^{m+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_{T'}}u^m f\zeta\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\\&\iint_{Q_{T'}}u^m\mu\nabla\zeta\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_{T'}}\zeta\mu\nabla v^m\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\\&\iint_{Q_{T'}}\zeta|\nabla v^m|^{p-2}\nabla v^m\cdot\nabla(u^m-v^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geq 0.\end{aligned}\tag{2.18}$$

在 (2.14) 式中选取 $\varphi=\zeta u^m$, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m+1}\int_\Omega\zeta(x,0)(u_\varepsilon)^{m+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{m+1}\iint_{Q_{T'}}\zeta_t u^{m+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_{T'}}u^m f\zeta\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\\&\iint_{Q_{T'}}u^m\mu\nabla\zeta\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_{T'}}\zeta\mu\nabla u^m\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

代入 (2.18) 式得到

$$\iint_{Q_{T'}}\zeta(\mu-|\nabla v^m|^{p-2}\nabla v^m)\nabla(u^m-v^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geq 0.\tag{2.19}$$

在 (2.19) 式中选取 $v^m=u^m-\sigma\varphi,\sigma\geq 0,\varphi\in W_0^{1,p}(\overline{Q}_{T'})$ 且在 $t=T'$ 附近 $\varphi=0$, 令 $\sigma\to 0$, 得到对上述 φ, 有

$$\iint_{Q_{T'}}\zeta(\mu-|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m)\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geq 0.$$

显然, 若选取 $\sigma\leq 0$, 还可以得到相反的不等式. 因此若选取 ζ, 使得 $\mathrm{supp}\varphi\subset\mathrm{supp}\zeta$, 而在 $\mathrm{supp}\varphi$ 上， $\zeta=1$, 则得到 (2.15) 式. 利用 $u_\varepsilon\to u(\varepsilon\to 0)$, 并注意到在 $\partial\Omega\times(0,T)$ 上， $u_\varepsilon(x,t)=\varepsilon$,

可得 $u(x,t)=0$ $a.e.$ 于 $\partial\Omega\times(0,T)$, 即 u 满足 (1.2) 式. 于是由广义解的定义可得 u 即为问题 (1.1)–(1.3) 在 $Q_{T'}$ 上的解. □

3 解的爆破

本节给出并证明我们主要的定理，其中 $F(u)=\int_0^u ms^{m-1}f(s)\mathrm{d}s$.

定理 3.1 假设 $f\in C(R)$ 满足 $|mu^{m-1}f(u)|\le g(u^m)$ 和

$$qF(u)\le u^m f(u),\quad q>p>2, \tag{3.1}$$

其中， $g(s)\in C^1(\mathbf{R})$, $g(s)>0$. 若对任何非零的 $u_0\in L^\infty(\Omega)\bigcap W_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u_0^m(x)|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_0(x))\mathrm{d}x\le 0, \tag{3.2}$$

则解在有限时间内爆破.

注 3.1 满足 (3.1) 式的函数 f 的一个例子是 $f(s)=|s^m|^{q-2}s^m$, 其中 $q>p>2, m\ge 1$. 这表明源在某种意义下必须支配 p-Laplacian 项.

证明 定义

$$H(t)=\int_\Omega F(u(x,t))\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u^m|^p\mathrm{d}x.$$

由方程，容易得到

$$H'(t)=\frac{4m}{(m+1)^2}\int_\Omega\big((u^{\frac{m+1}{2}})_t\big)^2\mathrm{d}x\ge 0;$$

因此，由 (3.2) 式可得 $H(t)\ge H(0)\ge 0$. 再令

$$L(t)=\frac{1}{m+1}\int_\Omega u^{m+1}(x,t)\mathrm{d}x,$$

并且对其微分可得

$$\begin{aligned}L'(t)&=\int_\Omega u^m u_t(x,t)\mathrm{d}x\ge\int_\Omega u^m\big[\mathrm{div}(|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m)+f(u)\big](x,t)\mathrm{d}x\\&\ge qH(t)+(\frac{q}{p}-1)\int_\Omega|\nabla u^m|^p(x,t)\mathrm{d}x\\&\ge(\frac{q}{p}-1)[H(t)+||\nabla u^m||_p^p\,]\ge 0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

接着估计 $L^{\frac{mp}{m+1}}(t)$, 由 Poincare 不等式和 L^q 空间的嵌入可得

$$L^{\frac{mp}{m+1}}(t)\le C||u^m||_p^p\le C||\nabla u^m||_p^p,$$

其中， C 是仅依赖于 Ω 和 m 的常数. 因此有

$$L^{\frac{mp}{m+1}}(t)\le C[H(t)+||\nabla u^m||_p^p\,]. \tag{3.4}$$

由 (3.3) 和 (3.4) 有

$$L'(t)\ge\gamma L^{\frac{mp}{m+1}}(t), \tag{3.5}$$

其中， $\gamma=(q-p)/Cp$. 直接对 (3.5) 式积分可得到

$$L^{\frac{mp}{m+1}-1}(t)\geq\frac{1}{L^{1-\frac{mp}{m+1}}(0)-\gamma t}.$$

因此 L 在时间 $t^*\leq\frac{1}{\gamma}L^{1-\frac{mp}{m+1}}(0)$ 内爆破.

推论 3.1 如果存在 $t_0\geq 0$,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u_0^m(x)|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_0(x))\mathrm{d}x=0,$$

则解或者对所有的时间 $t\geq t_0$ 等于零或者在有限时间 $t^*>t_0$ 内爆破.

参考文献:

[1] ZHAO Jun-ning. *Existence and nonexistence of solutions for* $u_t=\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+f(\nabla u,u,x,t)$ [J]. J. Math. Anal. Appl., 1993, **172**: 130–146.

[2] LEVINE H, PARK S, SERRIN J. *Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type* [J]. J. Differential. Equations, 1998, **142**: 212–229.

[3] MESSAOUDI S A. *A note on blow up of solutions of a quasilinear heat equation with vanishing initial energy* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2002, **273**: 243–247.

[4] WANG Jing, WANG Ze-jia, YIN Jing-xue. *A class of degenerate diffusion equations with mixed boudary conditions* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2004, **298**: 589–603.

[5] 王建，高文杰. 具非线性边值条件的发展型 p-Laplace 方程解在有限时刻的爆破性和有界性 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2004, **3**: 395–401.
WANG Jian, GAO Wen-jie. *Blow-up and boundedness of solutions at finite time for evolution p-Laplace equations with nonlinear boundary conditions* [J]. J. Jilin Univ. Sci., 2004, **3**: 395–401. (in Chinese)

[6] LADYZENSKAJA O A, SOLONIKOV V A, URALTSEVA N N. *Linear and Quasilinear Equation of Parabolic Type* [M]. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23 American Mathematical Society, Providence, R.I. 1967 .

[7] ZHONG Cheng-kui, FAN Xian-ling, CHEN Wen-yuan. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Lanzhou University Press, 1998.

Existence of Solutions to a Class of Doubly Degenerate Equations and Blow up with Vanishing Initial Energy

WANG Jian, GAO Wen-jie
(Institute of Mathematics, Jilin University, Jilin 130012, China)

Abstract: An initial boundary value problem related to the equation

$$u_t-\mathrm{div}(|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m)=f(u)$$

is studied in this paper. We prove, under suitable conditions on f, a blow up result for solutions with vanishing or negative initial energy. The existence of solutions is also given.

Key words: doubly degenerate; boundary value problem; blow-up.