文章编号: 1000-341X(2007)01-0165-08 **文献标识码**: A

矩阵伸缩的高维向量值小波包

陈清江 [1], 程正兴 [1], 李学志 [2]
(1. 西安交通大学理学院, 陕西 西安 710049; 2. 信阳师范学院数学系, 河南 信阳 464000)
(E-mail: chenxj6684@mail.xjtu.edu.cn)

摘 要: 本文给出了对应于任意整数矩阵伸缩的高维向量值正交小波包的定义及其构造方法. 并讨论了这种向量值正交小波包的性质, 得到向量值函数空间 $L^2(\mathbf{R}^s, \mathbf{C}^r)$ 的新的正交小波基.

关键词: 伸缩矩阵; 向量值多分辨分析; 向量值尺度函数; 向量值小波包; 加细方程.
MSC(2000): 42C40
中图分类: O174.2

1 引 言

小波分析是近年来发展起来的数学分枝. 它在科学和工程方面有广泛的应用 [1−3]. 为了改善小波基的频域局部性, Coifman 等首先引入一元正交小波包的概念. 崔锦泰和李淳 [4] 把正交小波包理论推广到非正交小波包, 使之适用于样条小波. 杨守志等 [5] 进一步构造了 $a(\,2 \le a \in \mathbf{Z}\,)$ 尺度多重正交小波包, 它在应用上灵活性强. 向量值小波是一种广义多小波. Xia 和 Suter[6] 给出向量值正交小波的定义及其构造方法, 表明多小波可以由向量值小波的成分函数生成. 向量值小波与多小波 [7] 是有区别的: 如, 实施离散小波变换的不同, 实施离散的多小波变换之前需要预滤波 [8]. 但是, 实施离散的向量值小波变换则不必要进行预滤波. 电视图像就是向量值信号的例子. 所以, 研究向量值小波是有意义的. 鉴于现实世界中绝大多数信息是多维信息. 对多维数字信号处理已经成为信息处理学科中一个非常重要的内容, 相应地对高维小波理论的研究为许多研究人员所关注. Shen[9] 将一元正交小波包的概念推广到多元正交小波的情形. 基于此, 本文将多元正交小波包的概念推广到多元向量值正交小波的情形. 给出任意整数矩阵伸缩的高维向量值正交小波包的定义及其构造方法. 讨论了高维向量值正交小波包的性质.

本文中用 $\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}$ 分别记复数集、实数集和整数集. 令 $\mathbf{N} = \{\,n : n \in \mathbf{Z}, n > 0\,\}$, $\mathbf{Z}_+ = \mathbf{N}\bigcup\{\,0\,\}$. 设常数 $s, r \in \mathbf{N}$, 且 $s, r \ge 2$, $\mathbf{R}^s$ 表示 s 维实欧几里得空间. $\mathbf{Z}^s = \{\,(z_1, z_2, \cdots, z_s) : z_\nu \in \mathbf{Z}, \nu = 1, 2, \cdots, s\,\}$. $\mathbf{Z}_+^s = \{\,(z_1, z_2, \cdots, z_s) : z_\nu \in \mathbf{Z}_+, \nu = 1, 2, \cdots, s\,\}$. 用 A 表示所有元素皆为整数而且特征值的模大于 1 的 s 阶方阵, 记 $|\det A| = a$. 命 A^{T} 表示矩阵 A 的转置, $A^{-\mathrm{T}}$ 表示矩阵 A 的转置的逆. 用 $\mathbf{I}_r$ 与 O 分别表示 $r \times r$ 阶单位矩阵与零矩阵. 对于 $X, Y \subset \mathbf{R}^s$, 记 $AX = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X\}$, $X + Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\}$, $X - Y = \{\mathbf{x} - \mathbf{y} : \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\}$.

根据有限群理论, $\mathbf{Z}_+^s$ 中存在 a 个元素 $\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{a-1}$, 使得

$$\mathbf{Z}^s = \bigcup_{\rho \in \Lambda_0} (\,\rho + A^T\mathbf{Z}^s\,); \quad (\,\rho_1 + A^T\mathbf{Z}^s\,)\bigcap(\,\rho_2 + A^T\mathbf{Z}^s\,) = \emptyset,$$

收稿日期: 2005-05-30; **接受日期**: 2005-07-19
基金项目: 国家自然科学基金 (10371105); 河南省自然科学基金 (0211044800)

其中 $\Lambda_0=\{\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_{a-1}\}$ 表示商群 $\mathbf{Z}^s/A^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}^s$ 的所有不同代表元的集合. 并且约定 $\rho_0=\underline{0}$ ($\underline{0}$ 为空间 $\mathbf{Z}_+^s$ 的零元素), ρ_1,ρ_2 为空间 Λ_0 中任意两个不同元素. 记 $\Lambda=\Lambda_0-\{\underline{0}\}$. 命 Λ,Λ_0 作为指标集. 记 $\ell^2(\mathbf{Z}^s)^{r\times r}=\{P:\mathbf{Z}^s\longrightarrow\mathbf{C}^{r\times r},\ ||P||_2=(\sum_{\imath,\jmath=1}^r\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}|p_{\imath,\jmath}(\mathbf{k})|^2)^{\frac12}<+\infty\}$.

定义向量值函数空间 $L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r):=\{\hbar(\mathbf{x})=(h_1(\mathbf{x}),h_2(\mathbf{x}),\cdots,h_r(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}:\mathbf{x}\in\mathbf{R}^s,\ h_\nu(\mathbf{x})\in L^2(\mathbf{R}^s),\ \nu=1,2,\cdots,r\}$, 其中 T 表示向量的转置. 对于 $\hbar\in L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$, 定义算子 $\hbar$ 的范数为 $\|\hbar\|:=(\sum_{\nu=1}^r\int_{\mathbf{R}^s}|h_\nu(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x})^{1/2}$, 而 $\|\hbar(\mathbf{x})\|$ 表示一种向量范数. 定义向量值函数 $\hbar(\mathbf{x})$ 的积分为 $\int_{\mathbf{R}^s}\hbar(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}:=(\int_{\mathbf{R}^s}h_1(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x},\int_{\mathbf{R}^s}h_2(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x},\cdots,\int_{\mathbf{R}^s}h_r(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}$. 向量值函数 $\hbar(\mathbf{x})$ 的傅立叶变换定义为 $\widehat{\hbar}(\mathbf{y}):=\int_{\mathbf{R}^s}\hbar(\mathbf{x})\cdot\exp\{-i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}\}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$, 其中 $\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$ 表示 s 维实向量 $\mathbf{y}$ 与 $\mathbf{x}$ 的内积.

对于两个向量值函数 $\hbar,\Upsilon\in L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$, 定义 $\hbar(\mathbf{x})$ 与 $\Upsilon(\mathbf{x})$ 的符号内积为如下矩阵:

$$\langle\,\hbar,\,\Upsilon\,\rangle:=\int_{\mathbf{R}^s}\hbar(\mathbf{x})\Upsilon(\mathbf{x})^*\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{1}$$

这里及本文其它地方, $*$ 表示复共轭的转置.

定义 1 称一个向量值函数列 $\{\,\hbar_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\subset X\subset L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 为子集 X 的规范正交集, 若

$$\langle\,\hbar_{\mathbf{k}},\hbar_{\mathbf{k}'}\,\rangle=\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\mathbf{I}_r,\quad \mathbf{k},\,\mathbf{k}'\in\mathbf{Z}^s. \tag{2}$$

这里, $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ 是广义 Kronecker 符号, 当 $\mathbf{k}=\mathbf{k}'$ 时, $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}=1$, 当 $\mathbf{k}\neq\mathbf{k}'$ 时, $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}=0$.

定义 2 称向量值函数 $\hbar(\mathbf{x})\in L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 是正交的, 若 $\{\,\hbar(\cdot-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}$ 是规范正交集.

定义 3 称向量值函数集 $\{\,\hbar_{\mathbf{k}}(\cdot)\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\subset X\subset L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 为子空间 X 的正交基, 若它满足 (2) 式, 并且对任意 $\Upsilon(\mathbf{x})\in\mathbf{X}$, 存在唯一的 $r\times r$ 常数矩阵序列 $\{B_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}$, 使得

$$\Upsilon(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}B_{\mathbf{k}}\hbar_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}). \tag{3}$$

定义 4 称向量值函数集 $\{\,\hbar_{\mathbf{k}}(\cdot)\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\subset X\subset L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 为子空间 X 的 Riesz 基, 如果

(a) 对任意 $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})\in X$, 存在唯一的 $r\times r$ 常数矩阵序列 $\{P_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}$, 使得

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}P_{\mathbf{k}}\hbar_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\mathbf{R}^s;$$

(b) 存在常数 $0<C_1\le C_2<+\infty$, 使得对任意常数矩阵序列 $\{P_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}$, 有

$$C_1\,\|\{P_{\mathbf{k}}\}\|_\dagger\ \le\ \|\sum_{\mathbf{k}\in Z^s}P_{\mathbf{k}}\hbar_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\|\ \le\ C_2\,\|\{P_{\mathbf{k}}\}\|_\dagger,$$

这里 $\|\{P_{\mathbf{k}}\}\|_\dagger$ 表示矩阵序列 $\{P_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}$ 的范数.

2 多元向量值多分辨分析

多分辨分析方法是构造小波的重要方法之一. 先引进空间 $L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 中的向量值多分辨分析与向量值正交小波的概念.

设向量值函数 $\Phi(\mathbf{x})=(\varphi_1(\mathbf{x}),\varphi_2(\mathbf{x}),\cdots,\varphi_r(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 满足下面的加细方程

$$\Phi(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}P_{\mathbf{k}}\,\Phi(A\mathbf{x}-\mathbf{k}),\quad \mathbf{x}\in\mathbf{R}^s \tag{4}$$

其中 $\{P_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\in\ell^2(\mathbf{Z}^s)^{r\times r}$ 是一个有限支撑的 $r\times r$ 阶常数矩阵序列.

记 $\mathcal{P}(\mathbf{y})=\frac{1}{a}\sum_{\mathbf{k}\in Z^s}P_{\mathbf{k}}\cdot\exp\{-i\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\}$, 则 (4) 的频域形式为

$$\widehat{\Phi}(\mathbf{y})=\mathcal{P}(A^{-T}\mathbf{y})\,\Phi(A^{-T}\mathbf{y}). \tag{5}$$

定义一个闭子空间序列 $V_j\subset L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 如下：

$$V_j:=\mathbf{clos}_{L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)}\langle\,\Phi(\,A^j\cdot-\mathbf{k}\,),\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s\,\rangle,\quad j\in\mathbf{Z}. \tag{6}$$

定义 5 称 (4) 式的 $\Phi(\mathbf{x})$ 生成向量值函数空间 $L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 的一个向量值多分辨分析，如果 (6) 式定义的一个闭子空间序列 $\{\,V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 满足

(a) $\cdots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots$;

(b) $\bigcap_{j\in Z}V_j=\{\mathbf{0}\}$; $\bigcup_{j\in Z}\mathbf{V}_j$ 在 $L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 中稠密，其中 $\mathbf{0}$ 表示零向量;

(c) $\hbar(\cdot)\in V_j\Longleftrightarrow\hbar(A\,\cdot)\in V_{j+1},\ \forall\,j\in\mathbf{Z}$;

(d) 存在一个向量值函数 $\Phi\,(\mathbf{x})\in V_0$, 使得 $\{\Phi(\cdot-\mathbf{k}),\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s\}$ 构成 V_0 的一个 Riesz 基.

称 $\Phi(\mathbf{x})$ 为向量值尺度函数，如果 $\Phi(\mathbf{x})$ 生成一个向量值多分辨分析.

令 $W_j\,(j\in Z)$ 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间，并且，存在 $a-1$ 个向量值函数 $\Psi_\rho(\mathbf{x})\in L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$, $\rho\in\Lambda$, 使得 $\Psi_\rho(\mathbf{x})$ 的整平移与伸缩构成 W_j 的一个 Riesz 基，则

$$W_j=\mathbf{clos}_{L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)}\langle\,\Psi_\rho(A^j\cdot-\mathbf{k}):\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s,\,\rho\in\Lambda\,\rangle,\ j\in\mathbf{Z}. \tag{7}$$

由于 $\Psi_\rho(\mathbf{x})\in W_0\subset V_1$, 则有 $a-1$ 个有限支撑的 $r\times r$ 矩阵序列 $\{B_{\mathbf{k}}^{(\rho)}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}$, $\rho\in\Lambda$, 使得

$$\Psi_\rho(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}B_{\mathbf{k}}^{(\rho)}\Phi\,(A\mathbf{x}-\mathbf{k}),\quad \rho\in\Lambda. \tag{8}$$

对 (8) 式的两边实施 Fourier 变换，且记 $\mathcal{B}^{(\rho)}(\mathbf{y})=\frac{1}{a}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}B_{\mathbf{k}}^{(\rho)}\cdot\exp\{-i\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\}$, $\rho\in\Lambda$, 得

$$\widehat{\Psi}_\rho(\mathbf{y})=\mathcal{B}^{(\rho)}(A^{-T}\mathbf{y})\,\widehat{\Phi}(A^{-T}\mathbf{y}),\ \ \mathbf{y}\in\mathbf{R}^s,\ \ \rho\in\Lambda. \tag{9}$$

称向量值尺度函数 $\Phi(\mathbf{x})\in L^2(\mathbf{R}^s,\,\mathbf{C}^r)$ 是正交的，若它的整平移 $\{\Phi(\cdot-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}$ 满足

$$\langle\,\Phi(\cdot),\,\Phi(\cdot-\mathbf{k})\,\rangle=\delta_{\underline{0},\,\mathbf{k}}\mathbf{I}_r,\quad \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s. \tag{10}$$

称向量值函数 $\Psi_\rho(\mathbf{x})\in L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$, $\rho\in\Lambda$ 是对应于向量值正交尺度函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 的向量值正交小波函数，如果 $\{\,\Psi_\rho(\cdot-\mathbf{k}),\,\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s,\ \rho\in\Lambda\}$ 是 W_0 的 Riesz 基，并且

$$\langle\,\Phi(\cdot),\,\Psi_\rho(\cdot-\mathbf{k})\,\rangle=\mathbf{O},\quad \rho\in\Lambda,\quad \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s. \tag{11}$$

$$\langle\,\Psi_\rho(\cdot),\,\Psi_\mu(\cdot-\mathbf{k})\,\rangle=\delta_{\rho,\,\mu}\delta_{\underline{0},\,\mathbf{k}}\mathbf{I}_r,\quad \rho,\,\mu\in\Lambda,\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s. \tag{12}$$

记子空间

$$W_j^{(\rho)}=\mathbf{clos}_{L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)}\langle\,\Psi_\rho(A^j\cdot-\mathbf{k}):\,\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s,\,\rangle,\ \ \rho\in\Lambda,\ j\in\mathbf{Z}. \tag{13}$$

根据 W_j 的定义与 (7), (11)–(13), 我们可以得到如下命题.

命题 2.1 如果 $\Psi_\rho(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbf{R}^s, \mathbf{C}^r)$, $\rho \in \Lambda$ 是对应于向量值正交尺度函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 的向量值正交小波函数, $\bigoplus$ 表示正交和，那么

$$L^2(\mathbf{R}^s, \mathbf{C}^r) = \bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j = \bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} \big(\bigoplus_{\rho\in\Lambda} W_j{}^{(\rho)}\big). \tag{14}$$

3 矩阵伸缩的向量值小波包的性质

Xia 与 Suter[6] 已经给出向量值正交小波的定义及其构造. 基于此，我们定义向量值正交小波包，并讨论它们的性质.

记 $\Gamma_{\underline{0}}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$, $\Gamma_\rho(\mathbf{x}) = \Psi_\rho(\mathbf{x})$; $\Omega_{\mathbf{k}}^{(\underline{0})} = P_{\mathbf{k}}$, $\Omega_{\mathbf{k}}^{(\rho)} = B_{\mathbf{k}}^{(\rho)}$, $\rho \in \Lambda$, $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^s$.

对于任意的 $\alpha \in \mathbf{Z}_+^s$ 与给定的向量值正交尺度函数 $\Gamma_{\underline{0}}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$, 令

$$\Gamma_\alpha(\mathbf{x}) = \Gamma_{A\beta+\rho}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s} \Omega_{\mathbf{k}}^{(\rho)}\, \Gamma_\beta(A\mathbf{x}-\mathbf{k}), \quad \rho \in \Lambda_0, \tag{15}$$

其中 $\beta \in \mathbf{Z}_+^s$ 是使得 $\alpha = A\beta + \rho$, $\rho \in \Lambda_0$ 成立的唯一元.

定义 6 称向量值函数集 $\{\Gamma_{A\beta+\rho}(\mathbf{x}),\ \beta \in \mathbf{Z}_+^s, \rho \in \Lambda_0\}$ 为关于向量值正交尺度函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 的向量值小波包，其中 $\Gamma_{A\beta+\rho}(\mathbf{x})$ 由 (15) 式给出.

对 (15) 式的两边作 Fourier 变换，并记 $\underline{\Omega}^{(\rho)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{a}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s} \Omega_{\mathbf{k}}^{(\rho)} \cdot \exp\{-i\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\}$, $\rho \in \Lambda_0$, 得

$$\widehat{\Gamma}_{A\beta+\rho}(\mathbf{y}) = \underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-T}\mathbf{y})\,\widehat{\Gamma}_\beta(A^{-T}\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^s, \ \rho \in \Lambda_0. \tag{16}$$

下面讨论高维向量值小波包的性质.

引理 3.1 设 $\hbar(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbf{R}^s, \mathbf{C}^r)$, 则 $\hbar(\mathbf{x})$ 是向量值正交函数的充要条件为

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s} \widehat{\hbar}(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi)\widehat{\hbar}(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi)^* = \mathbf{I}_r, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^s. \tag{17}$$

证明 若 $\hbar(\mathbf{x})$ 是正交的向量值函数，则 $\{\hbar(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}$ 是一个规范正交集，从而

$$\begin{aligned}\delta_{\underline{0},\mathbf{k}}\mathbf{I}_r &= \langle \hbar(\cdot), \hbar(\cdot-\mathbf{k}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^s}\int_{\mathbf{R}^s} \widehat{\hbar}(\mathbf{y})\,\widehat{\hbar}(\mathbf{y})^* \cdot \exp\{\, i\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\,\}\,\mathrm{d}\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^s}\int_{[0,2\pi]^s} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s} \widehat{\hbar}(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi)\,\widehat{\hbar}(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi)^* \cdot \exp\{\, i\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\,\}\,\mathrm{d}\mathbf{y},\end{aligned}$$

这蕴涵着 (17) 成立. 反之，命题也成立. □

引理 3.2 若 $\rho, \mu \in \Lambda_0$, 且 $\Gamma_\nu(\mathbf{x})$, $\nu \in \Lambda$ 是对应于 $\Phi(\mathbf{x})$ 的向量值正交小波函数，则

$$\sum_{\sigma\in\Lambda_0} \underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi))\,\underline{\Omega}^{(\mu)}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi))^* = \delta_{\rho,\mu}\mathbf{I}_r. \tag{18}$$

证明 由 (10)–(12) 知，$\{\Gamma_\nu(\mathbf{x}-\mathbf{k}),\ \nu \in \Lambda_0,\ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^s\}$ 是规范正交集. 记 $A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi) = \varpi$,

根据引理 3.1 以及 $\mathbf{Z}^s=\bigcup_{\rho\in\Lambda_0}(\,\rho+A^T\mathbf{Z}^s\,)$, 得到

$$\begin{aligned}\delta_{\rho,\,\mu}\mathbf{I}_r&=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\widehat{\Gamma}_\rho(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi)\,\widehat{\Gamma}_\mu(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi)^*\\&=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi))\,\widehat{\Phi}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi))\,\widehat{\Phi}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi))^*\underline{\Omega}^{(\mu)}[A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi)]^*\\&=\sum_{\sigma\in\Lambda_0}\underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi))\{\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\widehat{\Phi}(\,\varpi+2\mathbf{k}\pi\,)\,\widehat{\Phi}(\varpi+2\mathbf{k}\pi)^*\}\,\underline{\Omega}^{(\mu)}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi))^*\\&=\sum_{\sigma\in\Lambda_0}\underline{\Omega}^{(\rho)}[A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi)\,]\,\underline{\Omega}^{(\mu)}[A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi)\,]^*.\end{aligned}$$

定理 3.3 若 $\{\,\Gamma_\alpha(\mathbf{x}),\,\alpha\in\mathbf{Z}_+^s\}$ 是关于向量值正交尺度函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 的向量值小波包，则

$$\langle\,\Gamma_\alpha(\cdot)\,,\,\Gamma_\alpha(\cdot-\mathbf{k})\,\rangle=\delta_{\underline{0},\,\mathbf{k}}\mathbf{I}_r,\quad \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s. \tag{19}$$

证明 当 $\alpha=\underline{0}$ 时，$\Gamma_0(\mathbf{x})=\Phi(\mathbf{x})$, 由 (10) 知 (19) 成立. 假设对任意的 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)\in\mathbf{Z}_+^s$, 且 $|\alpha|=\sum_{\imath=1}^s\alpha_\imath<\mathcal{L}\,(\,\mathcal{L}\in N\,)$ 时，命题成立. 下面证明当 $\alpha\in\mathbf{Z}_+^s$, $|\alpha|=\mathcal{L}$ 时命题成立.

令 $\alpha=A\beta+\rho$, 其中 $\beta\in\mathbf{Z}_+^s$, $\rho\in\Lambda_0$, 由于 A 的特征值的模大于 1, 则 $|\beta|<|\alpha|$. 所以

$$\langle\Gamma_\beta(\cdot),\Gamma_\beta(\cdot-k)\rangle=\delta_{\underline{0},k}I_r\Longleftrightarrow\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\widehat{\Gamma}_\beta(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi)\widehat{\Gamma}_\beta(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi)^*=\mathbf{I}_r.$$

记 $A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi)=\varpi$, 根据引理 3.1, 引理 3.2, 得：

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\widehat{\Gamma}_\alpha(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi)\,\widehat{\Gamma}_\alpha(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi)^*\\&=\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\underline{\Omega}^{(\rho)}\,(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi)\,)\,\widehat{\Gamma}_\beta(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi))\,\widehat{\Gamma}_\beta(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi))^*\,\underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\mathbf{k}\pi))^*\\&=\sum_{\sigma\in\Lambda_0}\underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi)\,)\{\sum_{\kappa\in\mathbf{Z}^s}\widehat{\Gamma}_\beta(\varpi+2\kappa\pi)\,\widehat{\Gamma}_\beta(\varpi+2\kappa\pi)^*\,\}\,\underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi)\,)^*\\&=\sum_{\sigma\in\Lambda_0}\underline{\Omega}^{(\rho)}[\,A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi)\,]\,\underline{\Omega}^{(\rho)}[\,A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi)\,]^*=\mathbf{I}_r.\end{aligned}$$

于是 $\langle\,\Gamma_\alpha(\cdot),\Gamma_\alpha(\cdot-\mathbf{k})\,\rangle=\delta_{\underline{0},\,\mathbf{k}}\mathbf{I}_r$. □

定理 3.4 若 $\{\,\Gamma_\beta(\mathbf{x}),\,\beta\in\mathbf{Z}_+^s\}$ 是关于向量值正交尺度函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 的向量值小波包，则

$$\langle\,\Gamma_{A\beta+\rho}(\cdot),\,\Gamma_{A\beta+\mu}(\cdot-\mathbf{k})\,\rangle=\delta_{\rho,\,\mu}\delta_{\underline{0},\,\mathbf{k}}\mathbf{I}_r,\ \ \rho,\mu\in\Lambda_0,\quad \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s. \tag{20}$$

证明 由于 $\mathbf{R}^s=\bigcup_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}(A^{\mathrm{T}}[0,2\pi]^s+2\pi A^{\mathrm{T}}\mathbf{k})$, 而且当 $\mathbf{n}\neq\mathbf{m}$ 时，有

$$(A^{\mathrm{T}}[0,2\pi]^s+2\pi A^{\mathrm{T}}\mathbf{n})\bigcap(A^{\mathrm{T}}[0,2\pi]^s+2\pi A^{\mathrm{T}}\mathbf{m})=\emptyset.$$

记 $A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y}=\varpi$. 于是，得到

$$\langle\,\Gamma_{A\beta+\rho}(\cdot),\,\Gamma_{A\beta+\mu}(\cdot-\mathbf{k})\,\rangle=\frac{1}{(2\pi)^s}\int_{\mathbf{R}^s}\widehat{\Gamma}_{A\beta+\rho}(\mathbf{y})\,\widehat{\Gamma}_{A\beta+\mu}(\mathbf{y})^*\cdot\exp\{\,i\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^s}\int_{\mathbf{R}^s}\underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y})\,\widehat{\Gamma}_\beta(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y})\,\widehat{\Gamma}_\beta(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y})^*\underline{\Omega}^{(\mu)}(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y})^*\cdot\exp\{\,i\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^s} \sum_{\kappa\in\mathbf{Z}^s} \int_{A^{\mathrm{T}}[0,2\pi]^s+2\pi A^{\mathrm{T}}\kappa} \underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y})\,\widehat{\Gamma}_\beta(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y})\,\widehat{\Gamma}_\beta(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y})^*\underline{\Omega}^{(\mu)}(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y})^*\exp\{\,i\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{A^{\mathrm{T}}[0,2\pi]^s} \underline{\Omega}^{(\rho)}(\varpi)\{\sum_{\kappa\in\mathbf{Z}^s}\widehat{\Gamma}_\beta(\varpi+2\kappa\pi)\,\widehat{\Gamma}_\beta(\varpi+2\kappa\pi)^*\}\,\underline{\Omega}^{(\mu)}(\varpi)^*\cdot\exp\{\,i\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{[0,2\pi]^s} \sum_{\sigma\in\Lambda_0} \underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi)\,)\,\underline{\Omega}^{(\mu)}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\sigma\pi)\,)^*\cdot\exp\{\,i\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{[0,2\pi]^s} \exp\{-i\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\}\,\delta_{\rho,\,\mu}I_r\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \delta_{\rho,\,\mu}\delta_{\underline{0},\,\mathbf{k}}\,\mathbf{I}_r.$$

为了简便，我们引入伸缩算子 $(D\hbar)(\mathbf{x}) = \hbar(\,A\mathbf{x})$, 其中 $\hbar(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbf{R}^s,\,\mathbf{C}^r)$. 并记 $D\mathcal{F} = \{D\hbar : \hbar\in\mathcal{F}\}$, 其中 $\mathcal{F}\subset L^2(\mathbf{R}^s,\,\mathbf{C}^r)$. 对于任意的 $\beta\in\mathbf{Z}_+^s$, 定义

$$\mathcal{F}_\beta = \{\,\hbar(\mathbf{x}) : \,\hbar(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s} Q_{\mathbf{k}}\Gamma_\beta(\mathbf{x}-\mathbf{k}),\ \{Q_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\in\ell^2(\mathbf{Z}^s)^{r\times r}\}.$$

则 $\mathcal{F}_{\underline{0}} = V_0$, $\mathcal{F}_\rho = W_0^{(\rho)}$, 其中 $\rho\in\Lambda$. 假设 $(\underline{\Omega}^{(\rho)}(\,A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\pi\mu)))_{\rho,\,\mu\in\Lambda_0}$ 是酉矩阵.

引理 3.5 对任意的 $\beta\in\mathbf{Z}_+^s$, 子空间 $D\mathcal{F}_\beta$ 可分解为子空间 $\mathcal{F}_{A\beta+\rho}$, $\rho\in\Lambda_0$ 的正交和. 即

$$D\mathcal{F}_\beta = \bigoplus_{\rho\in\Lambda_0}\mathcal{F}_{A\beta+\rho}. \tag{21}$$

证明 首先证明

$$D\mathcal{F}_\beta = \{\,\Upsilon(\mathbf{x}) : \,\Upsilon(\mathbf{x}) = \sum_{\rho\in\Lambda_0}\sum_{\mathbf{k}\in Z^s} B_{\mathbf{k}}^{(\rho)}\Gamma_{A\beta+\rho}(\mathbf{x}-\mathbf{k}),\quad \{B_{\mathbf{k}}^{(\rho)}\}\in\ell^2(\mathbf{Z}^s)^{r\times r}\}. \tag{22}$$

对任意的 $\rho\in\Lambda_0$, 根据 (15) 式， $\Gamma_{A\beta+\rho}(\mathbf{x}-\mathbf{k})\in D\mathcal{F}_\beta$.

假设 $\Upsilon(\mathbf{x})\in D\mathcal{F}_\beta$, 则存在 $\{\,Q_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\in\ell^2(\mathbf{Z}^s)^{r\times r}$ 使得

$$\Upsilon(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s} Q_{\mathbf{k}}\,\Gamma_\beta(A\mathbf{x}-\mathbf{k}). \tag{23}$$

若存在常数矩阵序列 $\{\,B_{\mathbf{k}}^{(\rho)}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\in\ell^2(\mathbf{Z}^s)^{r\times r}$, $\rho\in\Lambda_0$ 使得

$$\Upsilon(\mathbf{x}) = \sum_{\rho\in\Lambda_0}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s} B_{\mathbf{k}}^{(\rho)}\Gamma_{A\beta+\rho}(\mathbf{x}-\mathbf{k}). \tag{24}$$

在 (23), (24) 的两边分别实施 Fourier 变换，并用 (16), 得

$$\widehat{\Upsilon}(\mathbf{y}) = \mathcal{Q}(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y})\,\widehat{\Gamma}_\beta(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y}) = \sum_{\rho\in\Lambda_0}\mathcal{B}^{(\rho)}(\mathbf{y})\,\underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y})\,\widehat{\Gamma}_\beta(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y}). \tag{25}$$

其中， $\mathcal{Q}(\mathbf{y}) = \frac{1}{a}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s} Q_{\mathbf{k}}\exp\{-i\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\}$, $\mathcal{B}^{(\rho)}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s} B_{\mathbf{k}}^{(\rho)}\exp\{-i\mathbf{y}\cdot\mathbf{k}\}$, $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^s$, $\rho\in\Lambda_0$.

显然，若 (26) 式成立，则 (25) 式也成立.

$$\mathcal{Q}(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y}) = \sum_{\rho\in\Lambda_0}\mathcal{B}^{(\rho)}(\mathbf{y})\,\underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}\mathbf{y}). \tag{26}$$

下面说明对任意的序列 $\{Q_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\in\ell^2(\mathbf{Z}^s)^{r\times r}$, 总存在一个序列 $\{B^{(\rho)}(\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\in\ell^2(\mathbf{Z}^s)^{r\times r}$ 满足 (26) 式. 而 (26) 式等价于 (27) 式

$$\mathcal{Q}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\pi\mu))=\sum_{\rho\in\Lambda_0}\mathcal{B}^{(\rho)}(\mathbf{y})\,\underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\pi\mu)),\quad \mu\in\Lambda_0. \tag{27}$$

当矩阵 $(\underline{\Omega}^{(\rho)}(A^{-\mathrm{T}}(\mathbf{y}+2\pi\mu)))_{\rho,\,\mu\in\Lambda_0}$ 是酉矩阵时，方程 (27) 对于 $\{Q_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s}\in\ell^2(\mathbf{Z}^s)^{r\times r}$ 总存在解 [9]. 于是， (24) 式成立，即 (22) 式成立.

根据定理 3.4, $\{\Gamma_{A\beta+\rho}(\cdot-\mathbf{k}),\ \rho\in\Lambda_0,\ \beta\in\mathbf{Z}_+^s\}$ 是 $D\mathcal{F}_\beta$ 的一个正交基. □

对于某个非负整数 n, 记 $\widetilde{S}_n=\sum_{\tau=0}^{n-1}A^\tau\Lambda_0$, $S_n=\widetilde{S}_{n+1}-\widetilde{S}_n=A^n\Lambda_0$.

定理 3.6 向量值函数集 $\{\Gamma_\beta(\cdot-\mathbf{k}),\ \beta\in S_n,\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s\}$ 构成 D^nW_0 的一组正交基. 特别地，函数 $\{\Gamma_\beta(\cdot-\mathbf{k}),\ \beta\in\mathbf{Z}_+^s,\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 的一组正交基.

证明 运用 (21) 式得： $D\mathcal{F}_{\underline{0}}=\bigoplus_{\rho\in\Lambda_0}\mathcal{F}_\rho$. 即 $D\mathcal{F}_{\underline{0}}=\mathcal{F}_{\underline{0}}\bigoplus_{\rho\in\Lambda}\mathcal{F}_\rho$.
因为 $\mathcal{F}_{\underline{0}}=V_0$, $W_0=\bigoplus_{\rho\in\Lambda}W_0^{(\rho)}=\bigoplus_{\rho\in\Lambda}\mathcal{F}_\rho$, 所以， $DV_0=V_0\bigoplus W_0$.

根据定理 3.4 与引理 3.5, 并运用归纳法，得到

$$D^nV_0=\bigoplus_{\beta\in\widetilde{S}_n}\mathcal{F}_\beta,\ \ \text{而且}\ \ D^nV_0\bigoplus D^nW_0=D^{n+1}V_0.$$

即 $D^nW_0=\bigoplus_{\beta\in S_n}\mathcal{F}_\beta$. 则向量值函数集 $\{\Gamma_\beta(\cdot-\mathbf{k}):\beta\in S_n,\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s\}$ 构成 D^nW_0 的一组正交基. 从而

$$L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)=V_0\bigoplus(\bigoplus_{0\le n}D^nW_0)=\mathcal{F}_{\underline{0}}\bigoplus(\bigoplus_{0\le n}(\bigoplus_{\beta\in S_n}\mathcal{F}_\beta))=\bigoplus_{\beta\in\mathbf{Z}_+^s}\mathcal{F}_\beta.$$

即 $\{\Gamma_\beta(\cdot-\mathbf{k}),\beta\in S_n,\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 的一组正交基. □

定理 3.7 对于每一个 $n\in\mathbf{Z}_+$, 向量值函数集

$$\{\Gamma_\beta(A^j\mathbf{x}-\mathbf{k}),\ \beta\in S_n,\ j\in\mathbf{Z},\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s\} \tag{28}$$

构成 $L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 的一组正交小波基.

证明 由定理 3.6 知，向量值函数集 $\{\Gamma_\beta(\mathbf{x}-\mathbf{k}),\ \beta\in S_n,\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s\}$ 构成 D^nW_0 的一组正交基，则对每一个 $j\in\mathbf{Z}$, $\{\Gamma_\beta(A^j\mathbf{x}-\mathbf{k}),\ \beta\in S_n,\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s\}$ 构成 $D^jD^nW_0$ 的一组正交基. 故对于每一个 $n\in\mathbf{Z}_+$,

$$\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}D^jD^nW_0=\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}D^{j+n}W_0=\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}D^jW_0,$$

从而， (28) 式构成 $L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 的一组正交小波基.

假设集合 $\Delta=\{(n,\tau):n\in\mathbf{N},\ \tau\in\mathbf{Z}\}$ 满足对于任意 $m\in\mathbf{Z}$ 存在唯一的数对 $(n,\tau)\in\Delta$, 使得 $m=n+\tau$.

定理 3.8 函数集 $\{\Gamma_\beta(A^\tau\mathbf{x}-\mathbf{k}),\ \beta\in S_n,\ (n,\tau)\in\Delta\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^\tau)$ 的一组正交基.

证明 由定理 3.6 知，向量值函数集 $\{\Gamma_\beta(\mathbf{x}-\mathbf{k}),\ \beta\in S_n,\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s\}$ 构成 D^nW_0 的一组正交基. 对每一个 $\tau\in\mathbf{Z}$, $\{\Gamma_\beta(A^\tau\mathbf{x}-\mathbf{k}),\ \beta\in S_n,\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^s\}$ 构成 $D^\tau D^nW_0$ 的一组正交基. 因为

$$L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)=\bigoplus_{(n,\tau)\in\Delta}D^\tau D^nW_0=\bigoplus_{(n,\tau)\in\Delta}D^{n+\tau}W_0,$$

于是，$\{\Gamma_\beta(A^\tau \mathbf{x}-\mathbf{k}),\ \beta\in S_n,\ (n,\tau)\in\Delta\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ 的一组正交基.

注 当 $r=1$, 矩阵 A 退化为整数 2 时，本文所讨论的小波包就是经典的多元正交小波包.

参考文献:

[1] DENG Hai, LING Hao. *Fast solution of electromagnetic integral equations using adaptive wavelet packet transform* [J]. IEEE Trans. Antennas and Propagation, 1999, **47**(4): 674–682.

[2] TOLIYAT H A, ABBASZADEH K, RAHIMIAN M M. et al. *Rail defect diagnosis using wavelet packet decomposition* [J]. IEEE Trans. Indus. Appli., 2003, **39**: 1454–1461.

[3] MARTIN M B, BELL A E. *New Image compression technique using multiwavelet packets* [J]. IEEE Trans. Image Processing, 2001, **10**(4): 500–511.

[4] Chui C K, LI Chun. *Nonorthonormal wavelet packets* [J]. SIAM Math. Anal., 1993, **24**(3): 712–738.

[5] 杨守志，程正兴. a 尺度多重正交小波包. 应用数学 [J]. 2000, **13**(1): 61–65.
YANG Shou-zhi, CHENG Zheng-xing. *Orthogonal Multiwavelet packets with scale* a [J]. Math. Appl., 2000, **13**(1): 61–65. (in Chinese)

[6] XIA Xiang-gen, SUTER B W. *Vector-valued wavelets and vector fiter banks* [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1996, **44**(3): 508–518.

[7] TURCAJOVA R. *An algorithm for the construction of symmetry orthogonal multiwavelets* [J]. SIAM Matrix Anal. Appl., 2003, **25**(2): 532–550.

[8] XIA Xiang-gen, GERONIMO J S, HARDIN D P. et al. *Design of prefilters for discrete multiwavelet transforms* [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1996, **44**(1): 25–35.

[9] SHEN Zuo-wei. *Nontensor product wavelet packets in* $L_2(R^s)$ [J]. SIAM Math. Anal., 1995, **26**(4): 1061–1074.

Multivariate Vector-valued Wavelet Packets Associated with the Dilation Matrix

CHEN Qing-jiang[1], *CHENG Zheng-xing*[1], *LI Xue-zhi*[2]

(1. School of Science, Xi'an Jiaotong University, Shaanxi 710049, China;
2. Department of Mathematics, Xinyang Teachers College, Henan 464000, China)

Abstract: In this paper, we introduce the notion of orthogonal vector-valued wavelet packets in higher dimensions associated with a given integer-valued dilation matrix. A procedure for constructing the orthogonal multivariate vector-valued wavelet packets is presented. The properties of the multivariate vector-valued wavelet packets have been discussed. Moreover, several new orthogonal bases of $L^2(\mathbf{R}^s,\mathbf{C}^r)$ are constructed by using the orthogonal vector-valued wavelet packets.

Key words: dilation matrix; vector-valued multiresolution analysis; vector-valued scaling functions; vector-valued wavelet packets; refinement equation