文章编号: 1000-341X(2007)01-0173-04 **文献标识码**: **A**

关于空间 $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ 与 $L^\beta(\Omega,\Sigma,\mu)$ 上的次加上半连续 α- 正齐性泛函

傅小红[1,2]
(1. 嘉应学院数学系, 广东 梅州 514015; 2. 南开大学数学系, 天津 300071)
(E-mail: gdfuxh@sina.com)

摘 要: 本文得到了 $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ 和 $L^\beta(\Omega,\Sigma,\mu)$ 分别不存在非零的上半连续、次加、 α- 正齐性泛函 (分别有 $0<\alpha\le 1$ 和 $\beta<\alpha\le 1$) 的充要条件.

关键词: $S(\Omega,\Sigma,\mu)$; $L^\beta(\Omega,\Sigma,\mu)$; 上半连续; 原子; α- 凸.
MSC(2000): 46A16; 46G12
中图分类: O177.3

众所周知, 在文献 [1] 和 [2] 中指出了空间 $S[a,b]$ 和 $L^\beta[a,b]$ $(0<\beta<1)$ 上非零连续线性泛函是不存在的. 在文献 [3] 中定光桂利用证明共鸣定理的两个引理推广了结果并得到: 如 $p(x)$ 是一定义在空间 $L^\beta[a,b](0<\beta<1)$ 上的次加, α- 绝对齐性泛函 $(\alpha>\beta)$, 那么, 如有某球 $U_{\delta_0}(x_0)$ 使 $p(x)$ 在其内均下半连续或狭上半连续, 则 $p(x)\equiv 0,\forall x\in L^\beta[a,b]$. 本文将在一般的测度空间 (Ω,Σ,μ) 上讨论空间 $L^\beta(\Omega,\Sigma,\mu)$ 上相应的问题, 并将对上半连续的次加泛函推广到 α- 正齐性来讨论 $(\alpha>\beta)$, 既导出一般空间 $L^\beta(\Omega,\Sigma,\mu)$ 上此类非平凡泛函存在的充要条件, 而且还运用此类方法也将 $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ 的有关结论导出来 (此时, $\alpha>0$ 即可). 值得指出的是, 这里的证明方法与 [3] 完全不同, 而且比较简洁. 注意, 对于次加泛函 $p(x)$, 如其为 α- 正齐性时, 必有 $\alpha\le 1$.

定义 1[4] 称一个集合 $E\in\Sigma$ 是 μ 的原子, 若 $\mu(E)>0$ 以及 E 的每一个可测子集 $F\subset E$ 必满足: $\mu(F)=0$ 或者 $\mu(F)=\mu(E)$; 称测度 μ 是无原子的, 若 Σ 中无原子.

定义 2[5] 拓扑线性空间 E 中的集 A 称为 α- 凸的 $(\alpha>0)$, 是指: $\forall x_1,x_2,\cdots,x_m\in A,\forall\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbf{R}^+$, 若 $\sum_{k=1}^m\lambda_k^\alpha=1$, 则 $\sum_{k=1}^m\lambda_k x_k\in A$.

引理 1 几乎处处有限的可测函数必在原子上几乎处处取常数.

证明 设 A 为 μ 的原子, 若 $\alpha=\mathrm{ess.}\inf_{t\in A}x(t)<\beta=\mathrm{ess.}\sup_{t\in A}x(t)$, 讨论如下:

(1) 如 $\alpha\ne-\infty,\beta\ne+\infty$, 取 $r=\frac{\alpha+\beta}{2}$, 则 $B_1=\{t\in A|\,x(t)>r\},B_2=\{t\in A|\,x(t)<r\}$ 均可测, 且 $\mu(B_1)>0,\mu(B_2)>0$, 这与 A 为原子矛盾.

(2) 如 $\alpha=-\infty$ 或 $\beta=+\infty$, 则必有一集 $A_0\subset A$, 且 $\mu(A_0)>0$, 使

$$-\infty\ne\alpha_0=\mathrm{ess.}\inf_{t\in A_0}x(t)<\beta_0=\mathrm{ess.}\sup_{t\in A_0}x(t)\ne+\infty,$$

情况归结到 (1). □

引理 2 若赋准范空间 E 上存在非零的上半连续、次加、 α- 正齐性泛函 $p(x)\,(\alpha>0)$, 则对于任意的 $r>0,V_0=\{x|\,p(x)<r,x\in E\}$ 为含 θ 点的开集, 且是 α- 凸的.

收稿日期: 2004-09-29; **接受日期**: 2005-03-01
基金项目: 国家自然科学基金 (10571090); 高校博士点基金 (20010055013).

证明 任取 $x_0\in V_0$, 则 $p(x_0)<r$. 设 $p(x_0)=r-\varepsilon_1$, 于是 $\varepsilon_1>0$. 由于 $p(x)$ 在 x_0 的上半连续性，故对于 $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon_1}{2}>0$, 存在 $\delta_0>0$, 当 $\|x-x_0\|<\delta_0$ 时，有 $p(x)\le p(x_0)+\varepsilon_0<r$. 即 $x\in V_0$. 故 x_0 为内点. 最后由 x_0 的任意性及 $p(\theta)=0$ 可知 V_0 为含 θ 点的开集.

$\forall x_1,x_2,\cdots,x_m\in V_0$, $\forall\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbf{R}^+$, 若 $\sum_{k=1}^m\lambda_k^\alpha=1$, 则由 $p(x)$ 的次加及 α- 正齐性，必有

$$p(\sum_{k=1}^m\lambda_kx_k)\le\sum_{k=1}^m p(\lambda_kx_k)=\sum_{k=1}^m\lambda_k^\alpha p(x_k)<\sum_{k=1}^m\lambda_k^\alpha r=r.$$

从而 $\sum_{k=1}^m\lambda_kx_k\in V_0$, 即 V_0 是 α- 凸的. □

命题 1 设 (Ω,Σ,μ) 为 σ- 有限且无原子的测度空间，假如 $E\in\Sigma$, 则对满足 $0\le\alpha\le\mu(E)$ 的任一广义实数 α, 存在集合 $E_0\in\Sigma$, 使得 $E_0\subset E$ 及 $\mu(E_0)=\alpha$ (见文献 [4] 中 §41).

引理 3 当 $\mu(\Omega)<\infty$ 且 μ 无原子时， $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ 不存在非全空间的 α- 凸开集（ $0<\alpha\le1$); 当 (Ω,Σ,μ) 为无原子的 σ- 有限测度空间时， $L^\beta(\Omega,\Sigma,\mu)$ 不存在非全空间的 α- 凸开集 $(\beta<\alpha\le1)$.

证明 反之, 设 U_0 为 $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ 和 $L^\beta(\Omega,\Sigma,\mu)$ 上非全空间的 α- 凸开集. 不妨设 $\theta\in U_0$(否则可平移), 由 U_0 开，故有球 $B_{\delta_0}\subset U_0$.

(1) 由 $\mu(\Omega)<\infty$ 且 μ 无原子，故对上述 δ_0, 由命题 1, 存在 $k_0\in\mathbf{N}$, 使 $\Omega=\bigcup_{k=1}^{k_0}\Omega_k$(诸 Ω_k 互不交) 且 $\mu(\Omega_k)=\frac{\mu(\Omega)}{k_0}<\delta_0\quad(1\le k\le k_0)$.

故对任意的 $x\in S(\Omega,\Sigma,\mu)$, 有

$$\int_{\Omega_k}\frac{k_0^{\frac{1}{\alpha}}|x(t)|}{1+k_0^{\frac{1}{\alpha}}|x(t)|}\mathrm{d}t<\mu(\Omega_k)<\delta_0.$$

即 $x_k(t)\triangleq k_0^{\frac{1}{\alpha}}x(t)|_{\Omega_k}\in B_{\delta_0}$ $(1\le k\le k_0)$.

由此从 U_0 的 $\alpha-$ 凸性，则有 $\sum_{k=1}^{k_0}(\frac{1}{k_0})^{\frac{1}{\alpha}}x_k\in U_0$, 即

$$x(t)=\sum_{k=1}^{k_0}x(t)|_{\Omega_k}=\sum_{k=1}^{k_0}(\frac{1}{k_0})^{\frac{1}{\alpha}}(k_0{}^{\frac{1}{\alpha}}x(t)|_{\Omega_k})\in U_0.$$

此与 U_0 不是全空间矛盾.

(2) 对任意 $x\in L^\beta(\Omega,\Sigma,\mu),E\in\Sigma$, 定义新的测度 $\nu(E)=\int_E|x(t)|^\beta\mu(\mathrm{d}t)$, 我们断言 ν 亦是无原子的且 $\nu(\Omega)<\infty$.

事实上，若 $\nu(E)>0$, 由 $\nu(E)$ 的定义知： $x(t)$ 在 E 上按 μ 不能几乎处处为零. 记 $E_0=\{t\in E|x(t)=0\},E_1=E\backslash E_0$, 从而， $\mu(E_1)>0$. 若 $\mu(E_1)=+\infty$, 由于 σ- 有限，则可选取其有限正测度子集，仍记为 E_1, 由 μ 是无原子的，可知 E_1 存在子集 E_{11}, 使 $\mu(E_1)>\mu(E_{11})>0$. 由此则有： $\nu(E_1)=\int_{E_1}|x(t)|^\beta\mu(\mathrm{d}t)>\int_{E_{11}}|x(t)|^\beta\mu(\mathrm{d}t)=\nu(E_{11})>0$, 即 ν 也是无原子的.

最后，注意到 $\nu(\Omega)=||x||_\beta$, 故 $\nu(\Omega)<\infty$.

由上断言及命题 1, 同样可将 Ω 分成 n 份关于 ν 的等测度集：$\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$, 即有 $\nu(\Omega_k)=\|x|_{\Omega_k}\|_\beta=\frac{\|x\|_\beta}{n}$, 记 $x_k=x(t)|_{\Omega_k}(1\le k\le n)$, 则 $x=\sum_{k=1}^n x_k=\sum_{k=1}^n(\frac{1}{n})^{\frac{1}{\alpha}}\ n^{\frac{1}{\alpha}}x_k$.

注意到当 $\alpha>\beta$ 时， $||n^{\frac{1}{\alpha}}x_k||_\beta=n^{\frac{\beta}{\alpha}}||x_k||_\beta=\frac{||x||_\beta}{n^{1-\frac{\beta}{\alpha}}}\to0\ (n\to\infty)$, 故存在足够大的 n_0, 使 $n_0^{\frac{1}{\alpha}}x_k\in B_{\delta_0}$ $(1\le k\le n_0)$. 最后，注意到 U_0 的 α- 凸性，故知 $x=\sum_{k=1}^{n_0}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{\alpha}}\ n^{\frac{1}{\alpha}}x_k\in U_0$. 也即 $U_0=L^\beta(\Omega,\Sigma,\mu)$. 这与 U_0 的假设矛盾. □

下面给出主要结果.

定理 1 当 $\mu(\Omega)<\infty$ 时, $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ 不存在非零的上半连续、次加、 α- 正齐性泛函 $(0<\alpha\le 1)$ 的充分必要条件是 μ 无原子；当 (Ω,Σ,μ) 为 σ- 有限的测度空间时, $L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 不存在非零的上半连续、次加、 α- 正齐性泛函 $(\beta<\alpha\le 1)$ 的充分必要条件是 μ 无原子.

证明 *必要性*. 反之，若 μ 有原子 E_0, 则 $\mu(E_0)<\infty$. 那么，由引理 1, 可令 $f(x)=|\xi_x|^{\alpha}\mu(E_0)$(其中 $x(t)=\xi_x$ a.e. 于 E_0), $f(x)$ 显然是非零的次加、 α- 绝对齐性泛函 (从而是 α- 正齐性泛函). 下证 $f(x)$ 在 Ω 上是连续的. 事实上，若 $x_n\to x_0$, 注意到 x_n 在 E_0 几乎处处取常值，设 $x_n=\xi_{x_n}$ (a.e. 于 E_0), $E_n=\{t\in E_0|x_n(t)\neq\xi_{x_n}\}$, 那么 $\mu(E_n)=0$. 记 $\tilde{E}=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 则有 $\mu\tilde{E}=0$. 从而在正测度集 $E_0\setminus\tilde{E}$ 上 $\{x_n(t)\}$ 为常数列，故其极限 x_0 在 $E_0\setminus\tilde{E}$ 上也为常数 ξ_{x_0}. 由于 $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ 中元列按准范收敛等价于依测度收敛以及 $L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 中元列按准范收敛必然依测度收敛，于是，对于任意的 $\sigma>0$, 有 $\mu\{t\in\Omega|\ |x_n(t)-x(t)|>\sigma\}\to 0$, 亦有 $\mu\{t\in E_0\setminus\tilde{E}|\ |\xi_{x_n}-\xi_{x_0}|>\sigma\}\to 0$, 即 $\xi_{x_n}\to\xi_{x_0}$, 故 $|f(x_n)-f(x_0)|=(|\xi_{x_n}|^{\alpha}-|\xi_{x_0}|^{\alpha})\mu(E_0)\to 0$. 也即 $f(x)$ 在 Ω 上连续，从而与题设矛盾.

充分性. 反之，若 $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ 和 $L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 分别存在非零的上半连续、次加、 α- 正齐性泛函 $p(x)$(分别有 $0<\alpha\le 1$ 和 $\beta<\alpha\le 1$), 那么由引理 2 知 $V_0=\{x|p(x)<1,x\in E\}$ 为含 θ 点的开集，且是 α- 凸的，其中 E 为 $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ 或 $L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)$. 故由引理 3 得: $V_0=L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)$. 然而，非零的次加、 α- 正齐性泛函必无上界 (事实上，取 $x_0\in\Omega$, 使得 $p(x_0)\neq 0$, 从 $0=p(\theta)\le p(x_0)+p(-x_0)$ 可知，必有 $x_1\in\Omega$, 使 $p(x_1)>0$, 从而 $p(\lambda x_1)=\lambda p(x_1)\to+\infty,\quad\lambda\to+\infty$). 此显然与 V_0 的假设矛盾！ □

在本文的最后，给出几个注.

注 1 对于 $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ 而言，当 $\mu(\Omega)<+\infty$ 时，如 μ 为纯原子时，则其必为局部凸空间；而当其无原子时，为非局部凸空间；而当 μ 为非纯原子时，亦非局部凸空间.

事实上，当 μ 为纯原子时，由 $\mu(\Omega)<+\infty$ 可知 μ 至多有可数个原子，设为 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$ (n 为有限或无穷). 此时 $\mu(\Omega_1)+\mu(\Omega_2)+\cdots+\mu(\Omega_n)<+\infty$. 因此，对于 $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ 中任一圆心球 B_{δ_0}, 从上可知，存在 $k_0\in\mathbf{N}$ 使得 $\sum_{k>k_0}\mu(\Omega_k)<\frac{\delta_0}{2}$. 这样一来，当取集合:

$$U_0=\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\chi_{\Omega_k}|\ |\lambda_k|<\frac{\delta_0}{2k_0\mu(\Omega_k)},(1\le k\le k_0);\lambda_k\in\mathbf{K}\,(k>k_0)\},$$

则其显然为一凸开集，且有: $\forall y\in U_0$,

$$\begin{aligned}||y||^{*}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|y(\Omega_k)|}{1+|y(\Omega_k)|}\mu(\Omega_k)=\sum_{k=1}^{k_0}\frac{|y(\Omega_k)|}{1+|y(\Omega_k)|}\mu(\Omega_k)+\sum_{k>k_0}\frac{|y(\Omega_k)|}{1+|y(\Omega_k)|}\mu(\Omega_k)\\&<\sum_{k=1}^{k_0}|y(\Omega_k)|\mu(\Omega_k)+\sum_{k>k_0}\mu(\Omega_k)<k_0\frac{\delta_0}{2k_0}+\frac{\delta_0}{2}=\delta_0,\end{aligned}$$

即有 $U_0\subset B_{\delta_0}$. 即证得 $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ 此时为局部凸的.

当 μ 无原子时，由引理 3 可得.

当 μ 为非纯原子时，将 Ω 分成两部分 Ω^1 和 Ω^2, 其中 Ω^1 上无原子， Ω^2 中纯原子. 由于对于非全空间球，如其内存在凸开集 V_0, 那么 $V_0\cap\Omega^1$ 则构成 Ω^1 上的非全空间的凸开集，这与引理 3 矛盾！

注 2 对于 $L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)\,(0<\beta<1)$ 而言，当 (Ω,Σ,μ) 为 σ- 有限的测度空间时，无论测度是纯原子的，无原子的或者非纯原子的，只要该空间维数是无穷的，则均非局部凸的.

当 μ 为纯原子时，由 σ- 有限的假设，注意到对于任意 n 个原子 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$ 及对任意圆心球 B_{δ_0}，由于 $(\frac{\delta_0}{\mu(\Omega_k)})^{\frac{1}{\beta}}\chi_{\Omega_k}\in B_{\delta_0}\,(k=1,2,\cdots,n)$，而其凸组合 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\frac{\delta_0}{\mu(\Omega_k)})^{\frac{1}{\beta}}\chi_{\Omega_k}}{n}$ 却有

$$||x_n||=(\frac{1}{n})^{\beta}\cdot\delta_0\cdot n=n^{1-\beta}\cdot\delta_0\to\infty\,(n\to\infty),$$

故知其必不可能存在准范有界的凸邻域，从而可知其不可能是局部凸空间.

当 μ 是无原子的 σ 有限测度时，则存在分割 $\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k$，使 $\mu(\Omega_k)<\infty\,(k\in\mathbf{N})$，因此，如其存在非全空间的 θ 点凸开邻域 V_0，则其在导出拓扑下，必存在 $k_0\in\mathbf{N}$，使空间 $L^{\beta}(\Omega_{k_0})$ 也存在非全空间的 θ 点凸开邻域，故 $(L^{\beta}(\Omega_{k_0}))^*\neq\{0\}$，与定理 1 矛盾.

对于非纯原子测度时，将 Ω 分成两部分 Ω^1 和 Ω^2，其中 Ω^1 上无原子， Ω^2 中纯原子的. 由此，从 $L^{\beta}(\Omega^1)$ 的非局部凸性，可知 $L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 亦是非局部凸的.

注 3 对于 (Ω,Σ,μ) 为纯原子的 σ- 有限测度空间，若有可数个原子，那么 $L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 却存在非全空间的 θ 点凸开邻域.

事实上，当 $\Omega=\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ 时，有 $\mu(\Omega_k)<\infty$，由引理 1 知，此时 $x(t)\in L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 在每个原子 Ω_k 上必几乎处处为常数 $(\forall k\in\mathbf{N})$，故我们可以令集合：

$$V_0=\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\chi_{\{\Omega_k\}}|\,|\lambda_1|<1;\lambda_k\in\mathbf{K}\,(k\geq 2);\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^{\beta}<\infty\},$$

则 V_0 为非 $L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)$ 的 θ 点凸开邻域.

参考文献:

[1] ROLEWICZ S. *Metric Linear Spaces* [M]. Pllish Scientific Publishers-Warszawa, 1985.

[2] RUDIN W. *Functional Analysis* [M]. 8th reprinted, McGraw-Hill Inc, New York, 1985.

[3] 定光桂. 关于次加泛函的两点注记 [J]. 数学年刊 (A 辑), 1984, **5**(2): 253–256.
DING Guang-gui. *Two notes on subadditive functionals* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 1984, **5**: 253–256. (in Chinese)

[4] HALMOS P R. *Measure Theory* [M]. Springer-Verlag, New York, 1974.

[5] 定光桂. 拓扑线性空间选讲 [M]. 南宁：广西教育出版社， 1987.
DING Guang-gui. *Introduction to Topological Linear Spaces* [M]. Nanning: Guangxi Education Press, 1987. (in Chinese)

[6] DING Guang-gui. *The uniform boundedness principle in some topological vector groups* [J]. Systems Sci. Math. Sci., 2000, **13**: 292–301.

The Upper Semi-Continuous Subadditive α-Positively Homogeneous Functionals Defined on $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ and $L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)$

FU Xiao-hong[1,2]

(1. Department of Mathematics, Jiaying College, Guangdong 514015, China;
2. Department of Mathematics, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: This paper considers the non-existence of non-trivial upper semi-continuous subadditive α-positively homogeneous functionals defined on $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ and $L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)$. Some sufficient and necessary conditions are given.

Key words: $S(\Omega,\Sigma,\mu)$; $L^{\beta}(\Omega,\Sigma,\mu)$; upper semi-continuous; atom; α-convex.