第27卷第1期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.1
2007年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)01-0177-08 **文献标识码**: A

Banach 空间中极大单调算子零点的迭代逼近定理

魏利 [1,2], 周海云 [2,3]

(1. 河北经贸大学数学与统计学学院, 河北 石家庄 050061;
2. 军械工程学院应用数学与力学研究所, 河北 石家庄 050003;
3. 河北师范大学数学与信息科学学院, 河北 石家庄 050016)
(E-mail: diandianba@yahoo.com)

摘 要: 令 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间, E^* 为其对偶空间. 令 $A \subset E \times E^*$ 为极大单调算子, $A^{-1}0 \neq \phi$. 本文将引入新的迭代算法, 并利用 Lyapunov 泛函, Q_r 算子与广义投影算子等技巧, 证明了迭代序列弱收敛于极大单调算子 A 的零点的结论.

关键词: Lyapunov 泛函; 极大单调算子; 一致凸 Banach 空间; Reich 不等式.
MSC(2000): 47H05; 47H09
中图分类: O177.91

1 引 言

寻找极大单调算子 A 的零点问题是十分活跃的数学课题, 即: 寻找 $x \in D(A)$ 使 $0 \in Ax$. 原因在于: 应用数学中的许多问题均可以转化为这类问题. 如: 求正则、下半连续、凸泛函的最小值; 求单调变分不等式的解; 求正则、闭、凸凹泛函的鞍点等问题都可以转化为求某个极大单调算子的零点问题 [1].

在 Hilbert 空间 H 中, 求极大单调算子零点问题的一个经典方法是邻近点算法:

$$\begin{cases} \forall x_1 \in H \\ x_{n+1} = (I + c_n T)^{-1} x_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{PPA}$$

其中 $\{c_n\} \subset (0, +\infty)$ 为正则化参数, $I : H \to H$ 为恒等映射, $T \subset H \times H$ 为极大单调算子.

Martinet 在文 [2-3] 中最先使用算法 (PPA) 的一个特款 $c_n \equiv c$, 针对 $T = \partial g$ 和 $T = A + N_c$ 两种情形建立了算法 (PPA) 的弱收敛结果. 但由于在算法 (PPA) 中, 迭代过程中每一步都需要精确计算 $(I + c_n T)^{-1} x_n$, 这不是一件容易的事情. 所以为了使迭代步容易选取, Rockafellar 于 1976 年, 在文献 [1] 中引入了一种非精确的邻近点算法:

$$\begin{cases} \forall x_1 \in H \\ x_{n+1} \approx (I + c_n T)^{-1} x_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{IPPA}$$

并证明了在 Hilbert 空间中, 在一定条件下, $\{x_n\}$ 弱收敛于极大单调算子 T 的一个零点.

自 Rockafellar[1] 的工作发表以来, 基于算法 (IPPA) 的其它算法被发展起来 [4−6]. 然而, 这些算法大多局限在 Hilbert 空间的框架内. 而与许多重要的问题所关联的极大单调算子往往定义在一般 Banach 空间中, 如与椭圆边值问题 [7] 所关联的极大单调算子以 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$

收稿日期: 2005-02-25; **接受日期**: 2005-07-17
基金项目: 国家自然科学基金 (10471003)

作为其自然的定义域. 因此, 在 Banach 空间中求极大单调算子零点的迭代算法无疑是一项十分有意义的研究工作. 但同时也是一项相当困难的工作. 因为在 Banach 空间中, 算子 $(J+cT)^{-1}$ 不再是非扩展的, 所以 Hilbert 空间框架内已成熟的算法与证明方法不再有效了.

本文将构造新的迭代格式并利用 Lyapunov 泛函, Q_r 算子与广义投影算子等技巧, 克服由于算子 $(J+cT)^{-1}$ 不是非扩展所带来的困难, 得到迭代序列弱收敛于 Banach 空间中极大单调算子的零点的结论.

2 预备知识

设 E 为实 Banach 空间, E^* 为其对偶空间. 正规对偶算子 $J: E\to 2^{E^*}$ 定义为 $J(x)=\{x^*\in E^*:\langle x,x^*\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\}$, $x\in E$, 其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 E 与 E^* 之间元素的广义对偶对. 用 "$\longrightarrow$" 和 "$\rightharpoonup$" 分别表示 E 或 E^* 中序列的强、弱收敛. 设 $T\subset E\times E^*$ 为一算子, 其定义域为 $D(T)=\{x\in E: Tx\neq\phi\}$, 值域为 $R(T)=\bigcup\{Tz: z\in D(T)\}$. 称 $T\subset E\times E^*$ 为单调算子: 如果 $\forall x_i\in D(T), y_i\in Tx_i, i=1,2$, 均有 $\langle x_1-x_2,y_1-y_2\rangle\geq 0$. 单调算子 $T\subset E\times E^*$ 称为极大单调的: 如果 T 的图像 $G(T)=\{(x,y): x\in D(T), y\in Tx\}$ 不真含于其它单调算子的图像之中.

定义 1[8] 称 Banach 空间 E 为严格凸的: 如果 $\forall x,y\in U=\{x\in E:\|x\|=1\}, x\neq y$ 恒有 $\|\frac{x+y}{2}\|<1$. 称 Banach 空间 E 为一致凸的: 如果 $\forall\{x_n\},\{y_n\}\subset U$, $\lim_{n\to\infty}\|\frac{x_n+y_n}{2}\|=1$, 恒有 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.

一致凸 Banach 空间是自反的且严格凸的.

定义 2[8] Banach 空间 E 称为光滑的: 如果 $\forall x,y\in U$ (同定义 1), 极限 $\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$ 存在; 称 E 为一致光滑的: 若上式中的极限对 $\forall x,y\in U$ 一致达到. 熟知: $L^P(\Omega), 1<p<+\infty$ 是一致凸且一致光滑的.

E 是一致凸的 Banach 空间 $\Longleftrightarrow$ E^* 是一致光滑的 Banach 空间;

E 是自反的 Banach 空间 $\Longleftrightarrow$ E^* 是自反的 Banach 空间;

当 E 是自反的 Banach 空间时, E 为严格凸空间 $\Longleftrightarrow$ E^* 为光滑空间.

引理 1[8-9] 文中要用的正规对偶算子的一些基本性质:

(i) 设 E 为实 Banach 空间, 则 $\forall x\in E, Jx\neq\phi, D(J)=E$, $J:E\to 2^{E^*}$ 是有界、单调算子;

(ii) $\forall\lambda\in R,\forall x\in E, J(\lambda x)=\lambda Jx$;

(iii) 若 E 是实自反、光滑的 Banach 空间, 则 $J:E\to E^*$ 为单值、次连续、严格单调的, 且 $JE=E^*$;

(iv) 若 E 为实自反、一致光滑的 Banach 空间, 则 $J:E\to E^*$ 在 E 的每个有界子集上是一致连续的; 由以上性质可知:

(v) 若 E 是实光滑、一致凸 Banach 空间, 则 $J^{-1}:E^*\to E$ 为正规对偶算子, 且在 E^* 的每个有界子集上是一致连续的.

引理 2[9] 文中要用的单调算子的一些重要结论: 设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间. 则:

(i) 单调算子 $A\subset E\times E^*$ 是极大单调的 $\Leftrightarrow\forall r>0, R(J+rA)=E^*$;

(ii) 若 $A\subset E\times E^*$ 为极大单调算子, 则其核 $A^{-1}0=\{x\in E: 0\in Ax\}$ 是 E 中的闭、凸

子集;

(iii) 若 $A\subset E\times E^*$ 为极大单调算子，则其图像 $G(A)$ 是次闭的，即： $\forall\{x_n\}\subset D(A)$, $x_n\rightharpoonup x,(n\to\infty)$, $\forall y_n\in Ax_n$, $y_n\to y$, $(n\to\infty)\Rightarrow x\in D(A)$ 且 $y\in Ax$.

由引理 1 和引理 2, 可引进如下定义：

定义 3 设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间， $A\subset E\times E^*$ 为极大单调算子. $\forall r>0$, 定义算子 $Q_r:E\to E$ 为 $Q_rx=(J+rA)^{-1}Jx$, 并称之为 Q_r 算子.

引理 3[10] 设 E 为实一致光滑 Banach 空间, 则存在一个连续增函数 $\beta:R^+\to R^+$, $\beta(0)=0$ 满足： $\forall c\ge 1$, $\forall t\ge 0$, $\beta(ct)\le c\beta(t)$ 且 $\forall x,y\in E$, 有

$$\|x+y\|^2\le\|x\|^2+2\langle y,Jx\rangle+\max\{\|x\|,1\}\|y\|\beta(\|y\|)$$

并称上述不等式为 Reich 不等式.

定义 4 设 E 为实光滑 Banach 空间， Lyapunov 泛函 $\varphi:E\times E\to R^+$ 定义如下：

$$\varphi(x,y)=\|x\|^2-2<x,Jy>+\|y\|^2,\quad \forall x,y\in E.$$

引理 4[5] 设 E 为实自反、严格凸、光滑 Banach 空间， C 为 E 中的非空、闭、凸子集, 则： $\forall x\in E$, 存在唯一的 $x_0\in C$, 满足： $\varphi(x_0,x)=\inf\{\varphi(z,x):z\in C\}$. 此时，对 $\forall x\in E$, 定义 $Q_C:E\to C$ 为 $Q_Cx=x_0$, 并称 Q_C 为从 E 到 C 上的广义投影算子.

注 1 当 $E=H$(Hilbert 空间) 时， $Q_C=P_C$ 是从 H 到 C 上的距离投影算子.

引理 5[5] 设 E 为实光滑 Banach 空间， C 为 E 中的非空、闭、凸子集， $x\in E$, $x_0\in E$. 则： $\varphi(x_0,x)=\inf\{\varphi(z,x):z\in C\}$ 当且仅当 $\langle z-x_0,Jx_0-Jx\rangle\ge 0,\forall z\in C$.

注 2 引理 5 给出了广义投影算子 Q_C 的一个几何特征.

引理 6[5] 设 E 为实自反、严格凸、光滑 Banach 空间， C 为 E 中的非空、闭、凸子集, 则 $\forall x\in E$, $\forall y\in C$, 有：

$$\varphi(y,Q_Cx)+\varphi(Q_Cx,x)\le\varphi(y,x).$$

注 3 引理 6 给出了广义投影算子 Q_C 在 Lyapunov 泛函度量下的 “非扩展性质”.

引理 7[5] 设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间， $\{x_n\},\{y_n\}$ 为 E 中两个序列，若其中之一有界，且 $\varphi(x_n,y_n)\to 0$, $n\to\infty$ 则 $x_n-y_n\to 0$, $n\to\infty$.

引理 8 设 E 为实自反、严格凸、光滑 Banach 空间， $A\subset E\times E^*$ 为极大单调算子, $A^{-1}0\ne\phi$, 则： $\forall x\in E$, $y\in A^{-1}0$, $r>0$, 有： $\varphi(y,Q_rx)+\varphi(Q_rx,x)\le\varphi(y,x)$.

证明 由 Q_r 算子之定义知： $\forall x\in E,\forall r>0$, $\exists u_r\in AQ_rx$, 满足：

$$JQ_rx+ru_r=Jx.$$

由 A 的单调性知： $\forall y\in A^{-1}0$,

$$\langle Q_rx-y,u_r\rangle\ge 0.$$

由 Lyapunov 泛函之定义有：

$$\begin{aligned}\varphi(y,x)-\varphi(Q_rx,x)-\varphi(y,Q_rx)=&\|y\|^2-2\langle y,Jx\rangle+\|x\|^2-\|Q_rx\|^2+2\langle Q_rx,Jx\rangle-\\&\|y\|^2-\|x\|^2-\|Q_rx\|^2+2\langle y,JQ_rx\rangle\end{aligned}$$

$$=2\langle y, JQ_rx - Jx\rangle - 2\langle Q_rx, JQ_rx - Jx\rangle$$
$$=2r\langle Q_rx - y, u_r\rangle \geq 0.$$

引理 9[11] 设 E 为实 Banach 空间, 则 $\forall x, y \in E$, 有: $\|x+y\|^2 \geq \|x\|^2 + 2\langle y, j(x)\rangle$, 其中 $j(x) \in Jx$.

引理 10[12] 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 和 $\{\delta_n\}$ 为三个非负实数列, 若 $a_{n+1} \leq (1+\delta_n)a_n + b_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < +\infty$, 则: $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在.

3 主要结果

以下恒设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间, $A \subset E \times E^*$ 为极大单调算子, $A^{-1}0 \neq \phi, Q_r = (J+rA)^{-1}J, \forall r > 0$. 对给定的向量 $x_n \in E$ 及数 $r_n > 0$, 求解子问题:

$$Jx + r_nAx \ni J\overline{x_n}, \quad \forall n \geq 1 \tag{1}$$

其中 $\overline{x_n} = J^{-1}[Jx_n + Je_n]$.

由引理 2 中的 (i) 知: 存在 $\widehat{x_n} \in E$ 及 $e_n \in E$ 满足集值方程 (1), 但这样的 $\widehat{x_n}$ 与 e_n 一般来说不是唯一的. 于是我们引入下述近似迭代算法 (PIA):

$$\begin{cases} x_1 \in E, \quad r_1 > 0 \\ \overline{x_n} = J^{-1}[Jx_n + Je_n], \quad n \geq 1 \\ \widehat{x_n} = Q_{r_n}\overline{x_n}, \quad n \geq 1 \\ x_{n+1} = J^{-1}[\alpha_nJx_n + (1-\alpha_n)J\widehat{x_n}], \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{PIA}$$

为保证迭代算法 (PIA) 的收敛性, 对误差序列 $\{e_n\}$ 添加一些限制条件:

(I) $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\| < +\infty$;

(II) $2\langle\widehat{x_n}, Je_n\rangle + max\{\|x_n\|, 1\}\|e_n\|\beta(\|e_n\|) \leq \varphi(\widehat{x_n}, x_n)$,

其中 $\beta: R^+ \to R^+$ 为出现在引理 3 中 Reich 不等式中的函数.

注 4 在近似迭代算法 (PIA) 中, 若误差项 $e_n \equiv 0, \forall n \geq 1$, 则变为精确迭代算法 (EIA):

$$\begin{cases} x_1 \in E, \quad r_1 > 0 \\ \widehat{x_n} = Q_{r_n}x_n, \quad n \geq 1 \\ x_{n+1} = J^{-1}[\alpha_nJx_n + (1-\alpha_n)J\widehat{x_n}], \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{EIA}$$

此时, x_n 是 A 的一个零点当且仅当 $\widehat{x_n} = x_n$.

再由 Lyapunov 泛函的性质易知: $\varphi(\widehat{x_n}, x_n) = 0 \Leftrightarrow \widehat{x_n} = x_n$. 因此, 我们可以认为 $\varphi(\widehat{x_n}, x_n)$ 是一个衡量 $\widehat{x_n}\overline{\in}A^{-1}0$ 程度的 "误差界". 即: 当 $\varphi(\widehat{x_n}, x_n)$ 足够小时, $\widehat{x_n}$ 被认为是原问题 $0 \in Ax$ 的一个可接受的近似解. 从此意义上讲, 限制条件 (II) 是合理的.

现在陈述并证明本文的主要结果.

命题 1 设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间. $A \subset E \times E^*$ 为极大单调算子, $A^{-1}0 \neq \phi$. 设 $\{x_n\}$ 是由算法 (PIA) 所产生的序列, 且满足条件 (I) 和 (II). 令 $Q_{A^{-1}0}$ 为从 E 到 $A^{-1}0$ 上的广义投影算子. 进一步假设 $\{r_n\} \subset (0, +\infty)$,$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$, 则序列 $\{Q_{A^{-1}0}(x_n)\}$ 强收敛于 $v \in A^{-1}0$, 其中 v 是满足

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(v, x_n) = \min_{y \in A^{-1}0} \lim_{n\to\infty} \varphi(y, x_n) \tag{2}$$

的唯一元.

证明 分四步完成命题的证明.

第一步. 证: $\{x_n\}$ 有界.

由 Lyapunov 泛函的定义, $\|\cdot\|^2$ 的凸性及迭代算法 (PIA) 有: $\forall p \in A^{-1}0$,

$$\begin{aligned}\varphi(p, x_{n+1}) =& \|p\|^2 - 2\langle p, Jx_{n+1}\rangle + \|Jx_{n+1}\|^2 \\ \leq& \alpha_n\|p\|^2 + (1-\alpha_n)\|p\|^2 - 2\alpha_n\langle p, Jx_n\rangle + \\ & \alpha_n\|x_n\|^2 + (1-\alpha_n)\|\widehat{x_n}\|^2 - 2(1-\alpha_n)\langle p, J\widehat{x_n}\rangle \\ =& (1-\alpha_n)\varphi(p, \widehat{x_n}) + \alpha_n\varphi(p, x_n). \end{aligned} \tag{3}$$

因 $p \in A^{-1}0$, 由引理 8 有:

$$\varphi(p, \widehat{x_n}) \leq \varphi(p, \overline{x_n}) - \varphi(\widehat{x_n}, \overline{x_n}), \tag{4}$$

利用 Lyapunov 泛函的定义, 迭代算法 (PIA) 及引理 9 有:

$$\begin{aligned}\varphi(\widehat{x_n}, \overline{x_n}) &= \|\widehat{x_n}\|^2 - 2\langle \widehat{x_n}, J\overline{x_n}\rangle + \|\overline{x_n}\|^2 \\ &= \|\widehat{x_n}\|^2 - 2\langle \widehat{x_n}, Jx_n + Je_n\rangle + \|Jx_n + Je_n\|^2 \\ &\geq \varphi(\widehat{x_n}, x_n) + 2\langle x_n - \widehat{x_n}, Je_n\rangle. \end{aligned} \tag{5}$$

利用 Lyapunov 泛函的定义, 迭代算法 (PIA) 及引理 3 有:

$$\begin{aligned}\varphi(p, \overline{x_n}) &= \|p\|^2 - 2\langle p, J\overline{x_n}\rangle + \|\overline{x_n}\|^2 \\ &= \|p\|^2 - 2\langle p, Jx_n + Je_n\rangle + \|Jx_n + Je_n\|^2 \\ &\leq \varphi(p, x_n) + 2\langle x_n - p, Je_n\rangle + \max\{\|x_n\|, 1\}\|e_n\|\beta(\|e_n\|). \end{aligned} \tag{6}$$

将 (5) 和 (6) 代入 (4), 并利用条件 (II) 有:

$$\varphi(p, \widehat{x_n}) \leq \varphi(p, \overline{x_n}) - \varphi(\widehat{x_n}, \overline{x_n}) \leq \varphi(p, x_n) + 2\|p\|\|e_n\|, \tag{7}$$

再把 (7) 代入到 (3), 有:

$$\varphi(p, x_{n+1}) \leq \varphi(p, x_n) + 2\|p\|\|e_n\|, \tag{8}$$

由条件 (I), (8) 式及引理 10 知: $\lim_{n\to\infty}\varphi(p, x_n)$ 存在. 因此 $\{x_n\}$ 是有界序列. 再由迭代算法知: $\{\overline{x_n}\}$ 也是有界序列.

第二步. 证: 存在唯一的 $v \in A^{-1}0$ 满足: $\lim_{n\to\infty}\varphi(v, x_n) = \min_{y\in A^{-1}0}\lim_{n\to\infty}\varphi(y, x_n)$.

定义 $h(y) = \lim_{n\to\infty}\varphi(y, x_n)$, $\forall y \in A^{-1}0$. 则 $h : A^{-1}0 \to R^+$ 是正则的、下半连续、凸泛函, 且 $h(y) \to +\infty, \|y\| \to +\infty$. 故存在 $v \in A^{-1}0$ 满足: $h(v) = \min_{y\in A^{-1}0} h(y)$.

但 $h(y)$ 是严格凸的, 故上述 $v \in A^{-1}0$ 必须是唯一的.

第三步. 证: $\lim_{n\to\infty}\varphi(Q_{A^{-1}0}x_n, x_n)$ 存在.

由 $Q_{A^{-1}0}$ 之定义知:

$$\varphi(Q_{A^{-1}0}x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \varphi(Q_{A^{-1}0}x_n, x_{n+1}). \tag{9}$$

类似于 (8) 式的证明过程有：

$$\varphi(Q_{A^{-1}0}x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(Q_{A^{-1}0}x_n, x_n) + 2\|e_n\|\|Q_{A^{-1}0}x_n\|. \tag{10}$$

由引理 6 有：

$$\varphi(Q_{A^{-1}0}x_n, x_n) \leq \varphi(v, x_n) - \varphi(v, Q_{A^{-1}0}x_n),$$

这里 $v \in A^{-1}0$ 为第二步中满足： $\lim_{n\to\infty}\varphi(v, x_n) = \min_{y\in A^{-1}0}\lim_{n\to\infty}\varphi(y, x_n)$ 的唯一元．从而

$$\varphi(Q_{A^{-1}0}x_n, x_n) \leq \varphi(v, x_n). \tag{11}$$

因为由第一步知： $\{x_n\}$ 有界，故由 Lyapunov 泛函的定义知： $\{\varphi(v, x_n)\}$ 有界，从而 (11) 蕴涵 $\{\varphi(Q_{A^{-1}0}x_n, x_n)\}$ 有界，故 $\{Q_{A^{-1}0}x_n\}$ 有界．于是由 (9) 和 (10) 有：

$$\varphi(Q_{A^{-1}0}x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \varphi(Q_{A^{-1}0}x_n, x_n) + 2K\|e_n\|,$$

其中 $K = \sup\{\|Q_{A^{-1}0}x_n\| : n \geq 1\}$.

从而利用条件 (I) 及引理 10, $\lim_{n\to\infty}\varphi(Q_{A^{-1}0}x_n, x_n)$ 存在.

第四步．证： $Q_{A^{-1}0}x_n \to v$, 这里 $v \in A^{-1}0$ 同于第二步.

由引理 6 知：

$$\varphi(v, Q_{A^{-1}0}x_n) \leq \varphi(v, x_n) - \varphi(Q_{A^{-1}0}x_n, x_n),$$

从而

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\varphi(v, Q_{A^{-1}0}x_n) &\leq \lim_{n\to\infty}\varphi(v, x_n) - \lim_{n\to\infty}\varphi(Q_{A^{-1}0}x_n, x_n)\\ &= h(v) - \lim_{n\to\infty}\varphi(Q_{A^{-1}0}x_n, x_n) \leq 0.\end{aligned}$$

故 $\varphi(v, Q_{A^{-1}0}x_n) \to 0$. 由引理 7, $Q_{A^{-1}0}x_n \to v$.

定理 1 设 E 为实光滑、一致凸 Banach 空间．设正规对偶算子 $J: E \to 2^{E^*}$ 为弱序列连续的，即：当 $\{x_n\} \subset E$, $x_n \rightharpoonup x$ 时， $Jx_n \rightharpoonup Jx$. 令 $A \subset E \times E^*$ 为极大单调算子，$A^{-1}0 \neq \phi$. 设 $\{x_n\}$ 是由算法 (PIA) 所产生的序列，且满足条件 (I) 和 (II). 令 $Q_{A^{-1}0}$ 为从 E 到 $A^{-1}0$ 上的广义投影算子．进一步假设 $\{r_n\} \subset (0, +\infty)$, $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ 满足：$\limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1$, 则迭代序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $v \in A^{-1}0$, 其中 v 是满足

$$v = \lim_{n\to\infty} Q_{A^{-1}0}(x_n) \tag{12}$$

的唯一元.

证明 分两步完成定理的证明.

第一步．证： $\omega(x_n) \subset A^{-1}0$, 其中 $\omega(x_n)$ 表示 $\{x_n\}$ 所有弱收敛子列的弱极限点全体.

因 E 一致凸，而由命题 1 的第一步又知 $\{x_n\}$ 有界，故 $\omega(x_n) \neq \phi$.

设 $x \in \omega(x_n)$, 则存在 $\{x_n\}$ 的某子列，不妨设 $x_n \rightharpoonup x, n \to \infty$. 由假设 $J: E \to 2^{E^*}$ 是弱序列连续的，故 $Jx_n \rightharpoonup Jx, n \to \infty$. 利用迭代算法 (PIA) 中的四式，由 $\limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1$ 知：可再选取子列，不妨还记作 $\{x_n\}$, 使得： $J\widehat{x_n} \rightharpoonup Jx, n \to \infty$.

再由迭代算法中的第三式知：存在 $w_n \in A\widehat{x_n}$ 使 $J\overline{x_n} = J\widehat{x_n} + r_n w_n$.

因为由命题 1 证明的第一步知：$\{x_n\}$,$\{\overline{x_n}\}$ 均有界; 由命题 1 中第三步的证明知：$\{Q_{A^{-1}0}x_n\}$ 有界，再由引理 8 知：

$$\varphi(Q_{A^{-1}0}x_n,\widehat{x_n})\le\varphi(Q_{A^{-1}0}x_n,\overline{x_n}),$$

从而 $\{\widehat{x_n}\}$ 有界. 所以利用 $\lim_{n\to\infty}r_n=+\infty$ 知：

$$w_n=\frac{J\overline{x_n}-J\widehat{x_n}}{r_n}\to 0,n\to\infty. \tag{13}$$

针对满足 $J\widehat{x_n}\rightharpoonup Jx,n\to\infty$,$w_n\in A\widehat{x_n}$ 且 $w_n\to 0,n\to\infty$ 的上述序列 $\{\widehat{x_n}\}$. 由其有界性、正规对偶算子 $J:E\to 2^{E^*}$ 的弱序列连续性及引理 1 知：必存在它的一个子列，不妨还记作 $\{\widehat{x_n}\}$ 使之满足： $\widehat{x_n}\rightharpoonup x,n\to\infty$ 且相应的 $w_n\in A\widehat{x_n}$ 满足 $w_n\to 0,n\to\infty$. 至此利用引理 2 中极大单调算子 A 的次闭性有： $x\in D(A)$ 且 $0\in Ax$.

第二步：证： $x_n\rightharpoonup v$, $n\to\infty$ 其中 v 是满足 (2) 式的 $\{Q_{A^{-1}0}x_n\}$ 的强极限.

由引理 5 知：

$$\forall y\in A^{-1}0,\langle Q_{A^{-1}0}x_n-y,JQ_{A^{-1}0}x_n-Jx_n\rangle\le 0. \tag{14}$$

由命题 1 知： $Q_{A^{-1}0}x_n\to v$, $n\to\infty$, 其中 v 是满足 (2) 式的唯一元；由于 $J:E\to E^*$ 为次连续的，故 $JQ_{A^{-1}0}x_n\rightharpoonup Jv,n\to\infty$.

由于 E 为自反的， $\{x_n\}$ 是有界序列，故 $\{x_n\}$ 有弱收敛子列，设 $x_{n_j}\rightharpoonup x_0,j\to\infty$, 由定理 1 中第一步的证明知： $x_0\in A^{-1}0$. 由假设条件又知： $Jx_{n_j}\rightharpoonup Jx_0,j\to\infty$. 故对 (14) 两边取极限得： $\forall y\in A^{-1}0$,

$$\langle v-y,Jv-Jx_0\rangle\le 0. \tag{15}$$

在 (15) 中取 $y=x_0$, 则： $\langle v-x_0,Jv-Jx_0\rangle\le 0$. 因 J 单调，故： $\langle v-x_0,Jv-Jx_0\rangle=0$. 又因 J 严格单调，故： $x_0=v$.

设另有一子列 $\{x_{n_l}\}$ 满足 $x_{n_l}\rightharpoonup x_1,l\to\infty$. 则： $x_1\in A^{-1}0$, 且 $Jx_{n_l}\rightharpoonup Jx_1,l\to\infty$. 重复以上过程有 $x_1=v$.

至此证明了： $\{x_n\}$ 的所有弱收敛子列有相同的极限，故： $x_n\rightharpoonup v$,$n\to\infty$.

注 5 当 $E=H$-Hilbert 空间时，算法 (PIA) 变成如下形式：

$$\begin{cases} x_1\in H,r_1>0\\ \overline{x_n}=x_n+e_n,\quad n\ge 1,\\ \widehat{x_n}=(I+r_nA)^{-1}\overline{x_n},\quad n\ge 1,\\ x_{n+1}=\alpha_nx_n+(1-\alpha_n)\widehat{x_n},\quad n\ge 1.\end{cases} \tag{16}$$

算法 (EIA) 变为如下迭代格式：

$$\begin{cases} x_1\in H,r_1>0\\ y_n=(I+r_nA)^{-1}x_n,\quad n\ge 1,\\ x_{n+1}=\alpha_nx_n+(1-\alpha_n)y_n,\quad n\ge 1.\end{cases} \tag{17}$$

由 (16) 和 (17) 可见，本文中定理 1 本质上把文献 [13] 中定理 3 的结论从 Hilbert 空间推

广到了实光滑、一致凸的 Banach 空间.

参考文献:

[1] ROCKAFELAR R. *Tyrrell Monotone operators and the proximal point algorithm* [J]. SIAM J. Control Optimization, 1976, **14**: 877–898.

[2] MARTINET B. *Regularization d'inequations variationelles par approximations successive* [J], Rev. Franc. Inform. Rech. Aper, 1970, **4**: 154–159.

[3] MARTINET B. *Vetermination approche point fix d'une application pseudo-covtrackante* [J]. C.R. Acad. Sci. Paris, 1972, **274**: 163–165.

[4] KAMIMURA S, TAKAHASHI W. *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications* [J]. Set-Valued Anal., 2000, **8**: 361–374.

[5] KAMIMURA S, TAKAHASHI W. *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space* [J]. SIAM J. Optim., 2002, **13**: 938–945

[6] 何炳生, 廖立志, 杨振华. 极大单调算子的一个新的近似邻近点算法 [J]. 中国科学 (A 辑), 2002, **32**: 1026–1032.
HE Bing-sheng, LIAO Li-zhi, YANG Zhen-hua. *A new approximate proximal point algorithm for maximal monotone operator* [J]. Sci. China Ser. A, 2002, **32**: 1026–1032. (in Chinese)

[7] MOSCO U. *Perturbation of Variational Inequalities* [M]. Nonlinear Functional Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVIII, Part 1, Chicago, Ill., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, 182–194.

[8] TAKAHASHI W. *Nonlinear Functional Analysis. Fixed Point Theory and Its Applications* [M]. Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[9] PASCALI D, SBURLAN S. *Nonlinear mappings of monotone type* [M]. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague; Sijthoff & Noordhoff International Publishers, Alphen aan den Rijn, 1978.

[10] REICH S. *An iterative procedure for construcing zeros of accretive sets in Banach spaces* [J]. Nonlinear Anal., 1978, **2**: 85–92.

[11] DEIMLING K. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Springer-Verlag, 1985.

[12] ZHOU H Y, GAO G L, GUO J T. et al. *Some general convergence principles with applications* [J]. Bull. Korean Math. Soc, 2003, **40**(3): 351–363.

[13] KAMIMURA S, TAKAHASHI W. *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces* [J]. J. Approx. Theory, 2000, **106**: 226–240.

A Theorem of Iterative Approximation of Zero Point for Maximal Monotone Operator in Banach Space

WEI Li[1,2], *ZHOU Hai-yun*[2,3]

(1. School of Mathematics and Statistics, Hebei University of Economics and Business, Hebei 050061, China;
2. Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Ordnance Engineering College, Hebei 050003, China;
3. Institute of Mathematics and Information Sciences, Hebei Normal University, Hebei 050016, China)

Abstract: Let E be a real smooth and uniformly convex Banach space, and E^* its duality space. Let $A \subset E \times E^*$ be a maximal monotone operator with $A^{-1}0 \neq \phi$. A new iterative scheme is introduced which is proved to be weakly convergent to zero point of maximal monotone operator A by using the techniques of Lyapunov functional, Q_r operator and generalized projection operator, etc.

Key words: Lyapunov functional; maximal monotone operator; uniformly convex Banach space; Reich inequality.