第27卷第1期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.1
2007年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)01-0207-05 **文献标识码**: A

关于 $\mathcal{F}$-S- 可补子群

李长稳 [1]， 郭文彬 [1,2]

(1. 徐州师范大学数学系，江苏 徐州 221116; 2. 中国科学技术大学数学系，安徽 合肥 230026)
(E-mail: lcwxz@xznu.edu.cn)

摘 要: 设 $\mathcal{F}$ 是一个群类. 群 G 的子群 H 称为在 G 中 $\mathcal{F}$-S- 可补的，如果存在 G 的一个子群 K, 使得 $G=HK$ 且 $K/K\cap H_G\in\mathcal{F}$, 其中 $H_G=\bigcap_{g\in G}H^g$ 是包含在 H 中的 G 的最大正规子群. 本文利用子群的 $\mathcal{F}$-S- 可补性，给出了有限群的可解性，超可解性和幂零性的一些新的刻画. 应用这些结果，我们可以得到一系列推论，其中包括有关已知的著名结果.

关键词: $\mathcal{F}$-S- 可补子群；可解群；幂零群；超可解群.
MSC(2000): 20D10
中图分类: O152.1

1 引 言

群 G 的一个子群 H 称为在 G 中可补充的，如果存在 G 的子群 K, 使得 $G=HK$. 特别地，如果 $H\cap K=1$, 则称 H 在 G 中可补. 众所周知，子群的可补充性质对群的结构研究扮演着十分重要的角色. P.Hall[4] 证明了：一个有限群 G 是可解的当且仅当 G 的任意 Sylow 子群在 G 中可补. Kegel[6,7] 证明了：如果群 G 的任意极大子群在 G 中有循环补充或 G 的某一个幂零子群在 G 中有幂零补充，则 G 可解. 作为以上的发展，近年来，国内外许多学者通过对子群的可补充性的一系列限制，提出了一些新的与子群补充相关的概念，并用它们研究了群的结构和性质. 比如苏向盈 [8], 王品超 [9,10] 利用半正规子群的概念研究了有限群；王燕鸣 [3,11] 引进和利用 c- 正规子群的概念确定了有限群的一些性质和结构. 最近，郭文彬、缪龙从另一角度定义了 $\mathcal{F}$-S- 可补的概念，并利用极大子群的 $\mathcal{F}$-S- 可补性给出了群的一些新的性质和结构.

作为以上研究的继续，本文主要利用准素子群的 $\mathcal{F}$-S- 可补性进一步研究群的性质与结构. 特别地，我们得到了有限群为幂零群，超可解群和可解群的一些新的判别准则.

本文中所有群为有限群，未交待的定义和符号是标准的. 如果需要，可以参见文献 [1] 和 [12].

2 预备知识

定义 2.1 设 $\mathcal{F}$ 是一个群类. 群 G 的子群 H 称为在 G 中 $\mathcal{F}$-S- 可补的，如果存在 G 的一个子群 K, 使得 $G=HK$ 且 $K/K\cap H_G\in\mathcal{F}$, 其中 $H_G=\mathrm{Core}(H)=\bigcap_{g\in G}H^g$ 是包含在 H 中 G 的最大正规子群. 此时 K 也称为 H 在 G 中的一个 $\mathcal{F}$-S- 补.

引理 2.1 设 $\mathcal{F}$ 是一个商群闭且子群闭的群类， H 是 G 的一个子群，则下列断言成立.

(1) 若 K 是 H 在 G 中 $\mathcal{F}$-S- 补，且 $N\lhd G$, 则 KN/N 是 HN/N 在 G/N 中的 $\mathcal{F}$-S- 补.

(2) 设 N 为 G 的正规子群且 $N\leq H$. 若 K/N 是 H/N 在 G/N 中的 $\mathcal{F}$-S- 补，则 K 为 H 在 G 中的 $\mathcal{F}$-S- 补.

收稿日期: 2005-03-17; **接受日期**: 2005-08-15
基金项目: 国家自然科学基金 (10471118#)

(3) 若 $H \leq D \leq G$ 且 K 是 H 在 G 中的 $\mathcal{F}$-S- 补, 那么 $K \cap D$ 是 H 在 D 中的 $\mathcal{F}$-S- 补.

引理 2.2[12] 设 G 为有限群, p 是 $|G|$ 的最小素因子. 若 $H \leq G$ 且 $|G:H| = p$, 则 $H \lhd G$.

引理 2.3[2] 如果 $\mathcal{F}$ 为子群闭的饱和群系并且 H 为 G 的子群, 那么 $H \cap Z_{\mathcal{F}}(G) \leq Z_{\mathcal{F}}(H)$.

引理 2.4[12] 极小非 p- 幂零群为极小非幂零群.

引理 2.5[1] 设 G 为极小非超可解群. 则

(1) G 有唯一非单位正规 Sylow p- 子群 P, 对某一个素数 p;

(2) $P/\Phi(P)$ 为 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群;

(3) $P/\Phi(P)$ 非循环;

(4) 如果 $p > 2$, 则 $\exp P = p$; 如果 $p = 2$, 则 $\exp P \leq 4$;

(5) 如果 P 交换, 则 $\exp P = p$;

(6) G 为 Sylow 塔群或极小非幂零群.

引理 2.6[12] 有限群 G 可解当且仅当对于任意 $p \in \pi(G)$, G 中存在 p'-Hall 子群.

3 超可解群的判别准则

引理 3.1 设 G 为一个有限群. 如果对于任意 $p \in \pi(G)$, G 有一个 p 阶子群在 G 中有 p-幂零 -S- 补, 则 G 是一个 Sylow 塔群.

证明 (1) 首先证明 G 是 q- 幂零的, 其中 q 是群 G 阶的最小素因子.

设 $L \leq G$, $|L| = q$ 并且存在 G 的子群 K, 使得 $G = LK$ 且 $K/K \cap L_G$ 为 q- 幂零群. 如果 $K \cap L_G = 1$, 那么 K 是 q- 幂零的. 令 $K_{q'}$ 为 K 的正规 q'-Hall 子群, 它也是 G 的 q'-Hall 子群. 因为 $|G:K| = |L:L \cap K| \leq q$, 由引理 2.2, 得到 $K \lhd G$, 又 $K_{q'}$ char K, 故 $K_{q'} \lhd G$, 从而 G 是 q- 幂零的. 如果 $K \cap L_G \neq 1$, 那么 $L = L_G$ 且 $K = G$, 这表明 G/L 是 q- 幂零的. 令 H/L 是 G/L 的正规 q'-Hall 子群, 则 $H = LH_{q'}$, 其中 $H_{q'}$ 是群 H 也是 G 的 q'-Hall 子群. 因为 $|H:H_{q'}| = |L| = q$, 由引理 2.2, 有 $H_{q'} \lhd H$. 于是 $H_{q'}$ char $H \lhd G$, 从而 $H_{q'} \lhd G$, 即 G 为 q-幂零群.

(2) 用归纳法证明 G 是一个 Sylow 塔群.

由 (1) 可设 G 有正规 q- 补子群 K, 其中 q 是群 G 阶的最小素因子. 任意 $p \in \pi(K)$, 由定理条件和引理 2.1, K 有一个 p 阶子群在 K 中有 p- 幂零 -S- 补. 所以 K 满足定理条件, 于是对 G 的阶的归纳知 K 是 Sylow 塔群, 从而 G 也是 Sylow 塔群.

定理 3.1 如果一个群 G 有一个正规子群 N, 使得 G/N 是超可解群且对于任意 $p \in \pi(N)$, N 的 p 阶子群在 G 中有 p- 幂零 -S- 补, 则 G 为超可解群.

证明 假设定理不成立, G 为极小阶反例.

(1) G 为极小非超可解群.

对于 G 的任意真子群 K, 显然有 $N \cap K \lhd K$ 且 $K/N \cap K \cong KN/N \leq G/N$ 是超可解的. 由引理 2.1, 任意 $p \in \pi(N \cap K)$, $N \cap K$ 的任意 p 阶子群在 K 中有 p- 幂零 -S- 补. 故 K 满足定理的条件, 由 G 的选取知 K 为超可解群, 从而 G 为极小非超可解群. 于是 G 满足引理 2.5 的要求.

(2) $p > 2$.

如果 $p = 2$, 由于 N 的 2 阶子群在 G 中有 2- 幂零 -S- 补, 由引理 3.1 的证明 (1) 知, G 为 2- 幂零群, 从而 G 为超可解群, 矛盾.

(3) 导出矛盾.

因为 $p>2$, 则由引理 2.5 知 $\exp P=p$. 由于 $(P\cap N)\Phi(P)/\Phi(P)\lhd G/\Phi(P)$ 且 $P/\Phi(P)$ 是 G 的主因子，所以 $(P\cap N)\Phi(P)=\Phi(P)$ 或 $(P\cap N)\Phi(P)=P$. 如果 $(P\cap N)\Phi(P)=\Phi(P)$, 则 $P\cap N\leq\Phi(P)$. 由于 G/N 和 G/P 为超可解的，得到 $G/\Phi(P)$ 为超可解群，从而 G 是超可解的, 矛盾. 现假设 $(P\cap N)\Phi(P)=P$, 则 $P\leq N$. 任取 $x\in P\setminus\Phi(P)$, 则 $\langle x\rangle$ 在 G 中有 p- 幂零 -S- 补, 所以存在 G 的子群 K, 使得 $G=\langle x\rangle K$ 且 $K/K\cap\langle x\rangle_G$ 为 p- 幂零群. 如果 $K=G$, 则 $G/\langle x\rangle_G$ 为 p- 幂零群. 如果 $\langle x\rangle_G=1$, G 为 p- 幂零群，从而 G 为超可解群，矛盾. 如果 $\langle x\rangle_G=\langle x\rangle$, $P=\langle x\rangle$, 从而 G 也为超可解群, 矛盾. 现在考虑 $K<G$ 的情况. 令 $P_1=P\cap K$, 则 $K\leq N_G(P_1)$. 又 $P_1<P$, 从而 $K<N_G(P_1)$. 又因为 $|G:K|=|\langle x\rangle:\langle x\rangle\cap K|=p$, 所以 $N_G(P_1)=G$, 即 $P_1\lhd G$. 如果 P_1 包含在 $\Phi(P)$, 则 $P=P\cap G=P\cap\langle x\rangle K=\langle x\rangle P_1=\langle x\rangle\Phi(P)=\langle x\rangle$, 从而 G 为超可解群，矛盾. 如果 P_1 不包含在 $\Phi(P)$, 则 $1\neq P_1\Phi(P)/\Phi(P)\lhd G/\Phi(P)$. 由引理 2.5,$P_1\Phi(P)=P$, 即 $P=P\cap K$, 从而 $P\leq K$. 此矛盾完成了定理的证明.

由定理 3.1, 我们可以直接得到如下推论.

推论 3.1.1 如果对于任意 $p\in\pi(G)$, G 的 p 阶子群在 G 中有 p- 幂零 -S- 补，则 G 为超可解群.

推论 3.1.2 如果 G 的任意极小子群在 G 中有幂零 -S- 补，则 G 为超可解群.

定理 3.2 群 G 为超可解群的充分必要条件是存在 G 的一个正规子群 N, 使得 G/N 是超可解的且 N 的任意极小子群在 G 中有超可解 -S- 补.

证明 必要性是显然的，只证充分性.

假设定理不成立， G 为极小阶反例. 则有

(1) G 为极小非超可解群.

对于 G 的任意真子群 K, $N\cap K\lhd K$, $K/N\cap K\cong KN/N\leq G/N$ 是超可解的. 由引理 2.1, $N\cap K$ 的任意极小子群在 K 中有超可解 -S- 补. K 满足定理的条件，由 G 的选取知 K 为超可解群. 于是 G 为极小非超可解群，从而 G 满足引理 2.5 的条件.

(2) G 为 2- 幂零群.

设 L 是 N 的一个 2 阶子群，则 L 在 G 中有超可解 -S- 补，所以存在 G 的子群 K, 使得 $G=LK$ 且 $K/K\cap L_G$ 为超可解群. 于是 K 为超可解群，从而 K 为 2- 幂零群. 因为 $|G:K|=|L:L\cap K|\leq 2$, 由引理 2.2, $K\lhd G$, 从而 G 是 2- 幂零的.

(3) 导出矛盾.

如果 $p=2$, 则由 (2), G 为 2- 幂零群，从而 G 为超可解群，矛盾. 现在假设 $p>2$, 则由引理 2.5 知 $\exp P=p$. 由于 $(P\cap N)\Phi(P)/\Phi(P)\lhd G/\Phi(P)$, 所以 $(P\cap N)\Phi(P)=\Phi(P)$ 或 $(P\cap N)\Phi(P)=P$. 如果 $(P\cap N)\Phi(P)=\Phi(P)$, 则 $P\cap N\leq\Phi(P)$. 由于 G/N 和 G/P 为超可解的，有 $G/\Phi(P)$ 是超可解的. 又因为 $\Phi(P)\leq\Phi(G)$, 所以 G 是超可解群，矛盾. 如果 $(P\cap N)\Phi(P)=P$, 则 $P\cap N=P$, 从而 $P\leq N$. 任取 $1\neq x\in P$, 因为 $\langle x\rangle$ 在 G 中有超可解 -S- 补，所以存在 G 的子群 K, 使得 $G=\langle x\rangle K$ 且 $K/K\cap<x>_G$ 为超可解群. 如果 $K=G$, 则 $G/\langle x\rangle_G$ 为超可解群，从而 G 为超可解群，矛盾. 现在考虑 $K<G$ 的情况. 令 $P_1=P\cap K$, 则 $K\leq N_G(P_1)$. 又由于 $P_1<P$, 有 $K<N_G(P_1)$, 从而 $N_G(P_1)=G$, 即 $P_1\lhd G$. 如果 P_1 包含在 $\Phi(P)$, 则 $P=P\cap G=P\cap\langle x\rangle K=\langle x\rangle P_1=\langle x\rangle\Phi(P)=\langle x\rangle$, 从而 G 为超可解群，矛盾. 如果 P_1 不包含在 $\Phi(P)$, 则 $1\neq P_1\Phi(P)/\Phi(P)\lhd G/\Phi(P)$. 由引理 2.5, $P_1\Phi(P)=P$, 即 $P=P\cap K$, 于是 $K=G$. 这最后的矛盾表明定理成立.

推论 3.2.1 群 G 为超可解群的充要条件是 G 的任意极小子群在 G 中有超可解 -S- 补.

4 幂零群的判别准则

定理 4.1 G 为幂零群的充分必要条件是存在 G 的正规子群 N 使得 G/N 是幂零的且 N 的任意奇阶极小子群包含在 $Z_\infty(G)$ 中，而 G 的一个 2 阶子群 (如果 $2||G|$) 在 G 中有 2- 幂零 -S- 补.

证明 必要性是显然的，我们只需证明充分性.

首先证明：如果 G/N 为 p- 幂零的且 N 的任意 p 阶极小子群包含在 G 的 $Z_\infty(G)$ 中，这里 p 为一个奇素数，则 G 为 p- 幂零群.

若不然，可设 G 为极小阶反例. 对于 G 的任意真子群 K, $N\cap K \lhd K$, $K/N\cap K \cong KN/N \leq G/N$ 是 p- 幂零的. 如果 p 不整除 $N\cap K$ 的阶，则显然 K 是 p- 幂零群. 如果 p 整除 $N\cap K$ 的阶，则由引理 2.3 知 $N\cap K$ 的任意 p 阶极小子群包含在 $K\cap Z_\infty(G) \leq Z_\infty(K)$ 中. 于是 K 满足相应的条件. 由 G 的选取知 K 为 p- 幂零群. 这表明 G 为一个极小非 p- 幂零群. 再由引理 2.4 知 G 为极小非幂零群. 于是 G 有一个正规 Sylow p- 子群 P 满足 $P/\Phi(P)$ 为 G 的主因子且 P 的幂指数为 p (参见 [1, 定理 3.4.11]). 但由于 $(P\cap N)\Phi(P)/\Phi(P) \lhd G/\Phi(P)$, 有 $(P\cap N)\Phi(P)=\Phi(P)$ 或 $(P\cap N)\Phi(P)=P$. 如果 $(P\cap N)\Phi(P)=\Phi(P)$, 则 $P\cap N\leq \Phi(P)$. 因为 G/N 和 G/P 为 p- 幂零的，可见 G 为 p- 幂零的，矛盾. 如果 $(P\cap N)\Phi(P)=P$, 则 $P\leq N$. 于是由条件有 $P\leq Z_\infty(G)$, 由此也得到 G 是 p- 幂零群. 矛盾表明，对于任意 $p>2$, G 是 p- 幂零群.

现在，由引理 3.1 的证明 (1) 可得到 G 是 2- 幂零群. 因此 G 是幂零群. 定理证毕.

由定理 4.1 的证明，我们可以直接得到下列 K.Ito 的定理.

推论 4.1.1[5] 对于所有奇素数 p, 如果 G 的每个 p 阶子群包含在 G 在中心 $Z(G)$ 中，则 G 是 p- 幂零群.

由定理 4.1, 我们还能直接得到下列结果：

推论 4.1.2 一个群 G 为幂零群的充分必要条件是 G 的任意奇阶极小子群包含在它的超中心 $Z_\infty(G)$ 中并且 G 的一个 2 阶子群在 G 中有 2- 幂零 -S- 补.

推论 4.1.3 假设 G 为奇阶群. 则 G 为幂零群的充分必要条件是 G 的任意极小子群包含在 $Z_\infty(G)$ 中.

5 可解群的判别准则

定理 5.1 一个群 G 为可解的充分必要条件是对于任意 $p\in\pi(G)$, 存在 G 的一个 p- 子群在 G 中有 p- 可解 -S- 补.

证明 必要性是显然的，我们只证充分性.

设 P 是 G 的一 p- 子群且 P 在 G 中有 p- 可解 -S- 补. 于是存在 G 的子群 K, 使得 $G=PK$ 且 $K/K\cap P_G$ 为 p- 可解群. 但由于 $K\cap P_G$ 是 p- 可解的，故 K 是 p- 可解的，从而 K 中存在 p'-Hall 子群 $K_{p'}$, 它也是 G 的 p'-Hall 子群. 由 p 的任意性和引理 2.6 知 G 是可解群.

推论 5.1.1 群 G 可解的充分必要条件是 G 的任意 Sylow 子群在 G 中有可解 -S- 补.

定理 5.2 设 H 是群 G 的一个子群且 $|G:H|$ 为素数 q 的方幂. 如果 H 的任意 Sylow 子群在 G 中有可解 -S- 补，那么 G 可解.

证明 令 $\pi=\pi(H)\setminus q$. 任意 $p\in\pi$, 设 P 是 H 的任一 Sylow p- 子群，则 P 也是 G 的一个 Sylow$p$- 子群. 因为 P 在 G 中有可解 -S- 补，所以存在 G 的子群 K, 使得 $G=PK$ 且

$K/K\cap P_G$ 为可解群．于是 K 是可解群，从而 K 中存在 p'-Hall 子群 $K_{p'}$．显然 $K_{p'}$ 也是 G 的一个 p'-Hall 子群．如果 q 不整除 H 的阶，则 H 为 G 的 q'-Hall 子群．那么应用引理 2.6 知 G 可解．现在假设 q 整除 H 的阶，且令 Q 为 H 的 Sylow q- 子群．则由条件，存在 G 的子群 L，使得 $G=QL$ 且 $L/L\cap Q_G$ 为可解群．于是 L 可解，从而 L 有 q'-Hall 子群 $L_{q'}$，它也是 G 的一个 q'-Hall 子群．再次应用引理 2.6 我们得到 G 是可解的．

定理 5.3 设 G 为一个 π- 可解群， H 为 G 的一个 π-Hall 子群．如果 H 在 G 中有可解 -S- 补，那么 G 是可解群．

证明 因为 G 为 π- 可解群，所以 G 的 π-Hall 子群 H 是可解的．由假设 H 在 G 中有可解 -S- 补，于是存在 G 的子群 K，使得 $G=HK$ 且 $K/K\cap H_G$ 可解．因为 $K\cap H_G$ 是可解的，故 K 为可解群．如果 $H_G\neq 1$，则由引理 2.1 知 G/H_G 满足定理条件．于是利用归纳可知 G 可解．如果 $H_G=1$，令 N 为 G 的一个极小正规子群．因为 G 是 π- 可解的，所以 N 或为 π- 群或为 π'- 群．但由于 $H_G=1$，易见 N 必为 π'- 群．于是 $(|G:K|,|N|)=1$，从而 $N\leq K$．如果 $N=G$，那么 $G=K$ 可解．假设 $N<G$．那么由引理 2.1 知 G/N 满足定理条件．于是利用归纳可得 G/N 可解．又由于 $N\leq K$ 是可解的，我们最终得到 G 是可解群．定理证毕．

参考文献:

[1] GUO Wen-bin. *The Theory of Classes of Groups* [M]. Beijing: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.
[2] GUO Wen-bin. *The influence of minimal subgroups on the structure of finite groups* [J]. Southeast Asian Bull. Math., 1998, **22**: 287–290.
[3] WANG Yan-ming. *C-normality and solvability of groups* [J]. J. Pure Appl. Algebra, 1996, **110**: 315–320.
[4] HALL P. *A characteristic property of soluble groups* [J]. J. London Math. Soc., 1937, **12**: 188–200.
[5] ITO N. *Note on (LM)-groups of finite order* [J]. Kodai Math. Sem. Rep., 1951, **3**: 1–6.
[6] KEGEL O H. *On Huppert's characterization of finite supersoluble groups* [M]. Proc. Internat. Conf. Theory of Groups (Canberra, 1965), Gordon and Breach, New York, 1967, 209–215.
[7] KEGEL O H. *Produkte nilpotenter Gruppen* [J]. Arch. Math., 1961, **12**: 90–93.
[8] 苏向盈．有限群的半正规子群 [J]. 数学杂志， 1988, **8**(1): 5–10.
SU Xiang-ying. *Seminormal subgroups of finite groups* [J]. J. Math.(Wuhan), 1988, **8**(1): 5–10. (in Chinese)
[9] 王品超．超可解群的若干充分条件 [J]. 数学学报， 1990, **33**(4): 480–485.
WANG Pin-chao. *Some sufficient conditions for supersolvable groups* [J]. Acta Math. Sinica, 1990, **33**(4): 480–485. (in Chinese)
[10] WANG Pin-chao. *Some sufficient conditions of a nilpotent group* [J]. J. Algebra, 1992, **148**: 289–295.
[11] WANG Yan-ming. *C-Normality of groups and its properties* [J]. J. Algebra, 1996, **180**: 954–965.
[12] 徐明耀．有限群导引 [M]. 北京：科学出版社， 1999, 第二版.
XU Ming-yao. *Introduction to Finite Group Theory* [M]. Beijing: Science Publishing House, 1999, 2nd edit. (in Chinese)

On $\mathcal{F}$-S-Supplemented Subgroups

LI Chang-wen[1], *GUO Wen-bin*[1,2]
(1. Department of Mathematics, Xuzhou Normal University, Jiangsu 221116, China;
2. Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Anhui 230026, China)

Abstract: Let $\mathcal{F}$ be a class of groups. A subgroup H of a group G is called $\mathcal{F}$-S-supplemented in G if there exists a subgroup K of G such that $G=HK$ and $K/K\cap H_G\in\mathcal{F}$, where $H_G=\bigcap_{g\in G}H^g$ is the maximal normal subgroup of G contained in H. In this paper, By using $\mathcal{F}$-S-supplemented subgroups, we give some new criteria for the solvability, nilpotency and supersolvability of finite groups. By these results, we may get a series of corollaries, which contain some known results.

Key words: $\mathcal{F}$-S-supplemented subgroup; nilpotent group; supersolvable group; soluble group.