文章编号: 1000-341X(2007)01-0212-07 **文献标识码**: A

雅各布 · 伯努利的《猜度术》研究

徐 传 胜 [1,2]
(1. 西北大学数学与科学史研究中心, 陕西 西安 710062; 2. 临沂师范学院数学系, 山东 临沂 276001)
(E-mail: lysyxcs@163.com)

摘 要: 《猜度术》是概率论的第一部奠基性著作, 其出版是概率论成为独立数学分支的标志. 本文详细分析了雅各布 · 伯努利的概率新思想, 尤其对伯努利数及伯努利大数定律进行了较为深刻地探讨. 另外, 还澄清了长期以来对《猜度术》整理出版者的一个误传.

关键词: 猜度术; 大数定律; 概率; 期望.
MSC(2000): 60F15
中图分类: O211

雅各布 · 伯努利 (Jacob Bernoulli)1654 年 12 月 7 日生于瑞士巴塞尔. 他是一个自学成才的数学家. 雅各布对微积分、微分方程和变分法等都做出了贡献, 更为重要的是他对概率论的奠基性研究. 所著《猜度术》是概率论的第一部奠基性著作, 所含概率思想具有划时代的重大意义, 可谓对概率论做出了决定性的贡献, 推进了概率论的进一步发展. 因而其出版是概率论成为独立数学分支的标志.

1 《猜度术》的整理

雅各布是莱布尼兹 (Gottfried Wilhelm Leibniz,1646-1716) 的最早追随者. 1690 年左右, 他们之间开始了经常性的通信联系. 从通信可知, 《猜度术》的撰写是在雅各布生命的最后两年 [1]. 雅各布写给莱布尼兹的最后一封信的日期是 1705 年 6 月 3 日, 这封信是在极度痛苦中写下的. 因为雅各布当时不仅受到病魔的折磨和恩师莱布尼兹的猜疑, 而且他和兄弟约翰 (John Bernoulli,1667-1748) 也产生了严重的矛盾. 8 月 16 日, 雅各布与世长辞, 遗留下的《猜度术》尚未整理完成. 由于兄弟间的矛盾, 雅各布的遗孀对约翰不信任, 拒绝把整理出版的任务交给他, 导致手稿在外藏匿多年. 后来, 雅各布的遗孀又拒绝了欧洲一个富商捐资出版的建议. 最后, 在莱布尼兹的一再敦促下, 雅各布的儿子才于 1712 年 10 月开始整理并印刷《猜度术》. 而此时, 雅各布的侄子尼古拉斯 (Nicolas Bernoulli II, 1687-1759) 正在法国帮助蒙特摩 (P.R.Montmort,1678–1719) 准备《赌博游戏的分析随笔》第二版. 1713 年 5 月, 当尼古拉斯回到巴塞尔时, 《猜度术》的整理和印刷工作已接近尾声. 直到此时, 雅各布的儿子才敢与他这位大堂兄打交道, 请他帮助润饰定版. 此时再作任何补充都太晚了. 为了使该书尽早付印, 尼古拉斯只匆匆写了一篇两页的序言, 并为较严重的印刷错误编了一张勘误表 [2]. 而不少概率史家据此就认为是尼古拉斯整理出版了《猜度术》. 如著名的哲学家和数学教授沃尔夫 (C.Wolff) 在其《数学辞典》(Leipzig,1716) 中就持有这一观点, 同样的错误也发生在托德亨特 (Todhunter) 等人的论述中 [1].

收稿日期: 2004-08-13; **接受日期**: 2005-03-10
基金项目: 国家自然科学基金 (10471111); 吴文俊丝绸之路天元基金.

1713 年 8 月, 在其作者死后八年, 《猜度术》终于问世了. 该书除前言共 306 页, 呈小四开本形式, 内容可分成五部分. 在第一卷 (P1-71) 中, 雅各布对荷兰数学家惠更斯 (C.Huygens,1629-1695)1657 年出版的《机遇的规律》作了较为详细的注释, 其长度为惠更斯原文的五倍. 雅各布对某些问题给出了自己的证明, 并把一些问题推广到一般情形, 因而其注释比原文更有价值. 第二卷 (P72-137) 比较系统地论述了排列组合知识, 并给出著名的 "伯努利数" 和 "伯努利方程". 第三卷 (P138-209) 由 24 个问题组成, 是前述理论的应用. 第四卷 (P210-239) 包含了本书的精华 – 伯努利大数定律. 另外, 该卷还论述了雅各布特有的哲学思想. 第五卷是附录, 包含两部分内容. 一部分是关于无穷级数的五篇论文, 另一部分 (P271-306) 以书信的形式讨论了网球比赛中的计分问题 [3].

2 系统化概率知识

至 17 世纪中叶, 关于等可能性、古典概率、期望等基本概念、加法公式、乘法定理、条件概率和全概率公式等基本工具、组合 (排列) 、递推法、方程 (分析) 法等求概率的技巧, 都已逐步建立, 但在有关著作中并未都以一般的形式给出, 仅停留在解决一些具体的问题上, 缺乏系统的整理和完整的理论体系. 由《猜度术》中的论述可知, 雅各布研究概率论始于 17 世纪 80 年代, 《猜度术》是他 20 年深思熟虑的成果. 其前三部分, 可以说是对以往概率论知识的总结, 是古典概型的系统化和深入化.

雅各布对掷 $n(n \geq 2)$ 颗骰子所得点数和为 m 的问题给了一个较长的注释. 针对这个问题, 他设计出一个表格, 并得出其有利场合数为 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$ 展开式中 x^m 这一项的系数, 这不仅是概率论中的一个妙解, 而且开了母函数的先河.

在研究重复博弈的问题中, 雅各布指出, 每次重复中所涉事件概率不变且相互独立. 虽前人在著作中默认了这一点, 但明确提出这是第一次. 故今天称其为 "伯努利概型". 他给出了乘法定理 (独立情况) 的现在表述形式, 并证明了如果在 $a+b$ 次试验中, 某人获胜的次数为 a , 失败的次数为 b , 则在 n 次试验中恰有 r 次获胜的概率为 $c_n^{n-r} a^r b^{n-r}/(a+b)^n$. 类似地, 在 n 次试验中至少有 r 次获胜的概率为

$$\sum_{j=0}^{n-r} C_n^j a^{n-j} b^j/(a+b)^n.$$

这样, 雅各布就推广了帕斯卡 (B.Pascal,1623-1662) 所讨论的点子问题.

雅各布开创了用无穷级数求和计算概率的方法. 如在一游戏中, 甲、乙二人轮流掷两颗骰子, 甲要的点数为 6, 乙要的点数为 7. 一旦有人掷出所要点数则游戏结束. 若甲先掷, 分别求甲、乙获胜的概率.

雅各布给出以下解答：设 b 为甲在 a 次试验中掷出 6 点的次数, c 为甲失败的次数, e 为乙在 a 次试验中掷出 7 点的次数, f 为乙失败的次数, 则 $a=b+c=e+f$. 考察甲、乙两人每次各自掷出所要点数的期望, 则得以下无穷数列：

$$\frac{b}{a}, \frac{ce}{a^2}, \frac{bcf}{a^3}, \frac{c^2ef}{a^4}, \frac{bc^2f^2}{a^5}, \frac{ec^3f^2}{a^6}, \frac{bc^3f^2}{a^7}, \frac{c^4ef^3}{a^8}, \ldots$$

故利用几何级数求和公式可得甲的期望为： $ab/(a^2-cf)$, 乙的期望为 $ce/(a^2-cf)$.

现在教科书上的“直线上的随机游动问题”，在雅各布时代称为“赌徒的破产问题”. 雅各布首创利用差分方程法彻底解决了该问题。假设甲有 m 个筹码，乙有 n 个筹码，在每次比赛中甲乙二人的获胜机会比为 $a:b$. 每次比赛时，败者要给对方一个筹码，考察某人全部输光的概率. 为简便见，下用今天的表达形式求解该问题. 设 u_x 表示甲有 x 个筹码时赢得对方全部筹码的概率，则在下一场比赛中，甲要么得一个筹码，要么失去一个筹码，其概率分别为 $a/(a+b)$, $b/(a+b)$. 故有关系式

$$u_x = \frac{a}{a+b}u_{x+1} + \frac{b}{a+b}u_{x-1}.$$

类似递推下去，则有 $u_x = c_1 + c_2(a/b)^x$. 其中 c_1, c_2 为待定常数.
因当 $x=0$ 时， $u_x = 0$ ；当 $x = m+n$ 时， $u_x = 1$, 则有

$$0 = c_1 + c_2, 1 = c_1 + c_2(a/b)^{m+n}$$

易得

$$c_1 = -c_2 = \frac{a^{m+n}}{a^{m+n} - b^{m+n}}$$

所以

$$u_x = \frac{a^{m+n} - a^{m+n-x}b^x}{a^{m+n} - b^{m+n}}$$

令 $x = m$, 则有

$$u_m = \frac{a^{n(a^m - b^m)}}{a^{m+n} - b^{m+n}}$$

同理可得，甲输光的概率为

$$\frac{b^{m(a^n - b^n)}}{a^{m+n} - b^{m+n}}.$$

3 引进伯努利数

在《猜度术》的第二卷中, 尽管雅各布一再声称斯霍滕 (Schooten) 、莱布尼兹、沃列斯 (J.Wallis, 1616–1703) 、普列斯特 (J.Prestet) 等已对他所提问题进行了研究, 因而他所提问题一点也不新, 但 “排列” 这个名词是他首次引进的. 雅各布还证明了 n 个相异物体的不同排列数为 $n!$, 而在 n 个不同物体中取 r 个不同物体的排列数为 $n(n-1)\cdots(n-r-1)$. 关于组合，他利用帕斯卡三角形得出组合系数的性质，并指责帕斯卡在没有证明的情况下，毫无顾忌地利用该性质.

为了求出 $\sum n, \sum n^2, \cdots \sum n^{10}$ 的表达式，雅各布引进了 “伯努利数” 这一重要概念 (现在数学的许多分支需要用到 “伯努利数”), 并给出一般结果的通式:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^c =& \frac{n^{c+1}}{c+1} + \frac{n^c}{2} + \frac{c}{2}B_2 n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}B_4 n^{c-3} + \\ & \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}B_6 n^{c-5} + \cdots,\end{aligned}$$

这里 $B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, B_6 = 1/42, \cdots$ 这就是所谓的“伯努利数”．其计算方法为，该数与其前边 n 的幂次的各项系数和等于 1. 如由于

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + B_4 n,$$

所以 $B_4 = 1 - 1/5 - 1/2 - 1/3 = 1/30$.

雅各布的这个结果超过了海塞姆 (Ibn al-Haytham,965-1040)[4]. 据说借助上述公式，雅各布只花七八分钟时间就算出了前 1000 个数十次方相加之和为 91, 409, 924, 241, 424, 243, 424, 241, 924, 242, 500. 而他人为了验证此结果竟花了三天三夜的时间，对此雅各布感到很自豪.

设 $f(x)$ 是一个单变量实函数，在研究求和 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(i)$ 的公式中，雅各布给出一个关于 x 的多项式

$$P_k(x) = \frac{x^k}{k!} + \frac{B_1 x^{k-1}}{1!(k-1)!} + \frac{B_2 x^{k-2}}{2!(k-2)!} + \frac{B_3 x^{k-3}}{3!(k-3)!} + \cdots + \frac{B_k}{k!},$$

其中 $B_1 = -1/2, B_{2k+1} = 0, k = 1, 2, \cdots$ 这多项式如今称为“伯努利多项式”也变得十分有用.

4 创立大数定律

“所要探讨的是，是否随着观测次数的增大，记录下来的赞成与不赞成例数的比值接近真实比值的概率也随之不断增加，使得这个概率最终将超过任意确信度.”这是雅各布 · 伯努利所论述的大数定律．它在《猜度术》的第四卷占据其中心位置．泊松 (S.D.Possion, 1781-1840) 称这个“主命题”为“伯努利大数定律”．这是《猜度术》一书最重要的部分，该书对后世的影响如此之大，其原因就是这 30 页的内容．由于大数定律的极端重要性， 1913 年 12 月彼得堡科学院曾举行庆祝大会，纪念“大数定律”诞生 200 周年.

雅各布以前，人们对概率的概念多半从主观方面来解释，即解释为一种“期望”．并且这种期望是以古典概型为依据的，即先验的等可能性假设．雅各布指出，这种方法有极大的局限性，也许只能在赌博中可用．在更多的场合，由于无法数清所有可能的情况就不行了．他提出要处理更大范围的问题，必须选择另一条道路．那就是“后验地去探知我们所无法先验地确定的东西，也就是从大量同类事例的观察结果中去探知它．”这就从主观的“期望”解释转到了客观的“频率”解释．大约在 1687-1689 年间，雅各布首次在其“沉思录”中叙述并证明了他的“主命题”．从通信时间来看，雅各布将“主命题”告诉他弟弟约翰的时间早于 1690 年．在 18 世纪始，他还告知了莱布尼兹，不过未附证明，但莱布尼兹对其结果一度产生过怀疑 [5]．雅各布说“频率的不稳定性随观察次数的增加而减少”的现象，“即使一个没有受过教育，以前也没有受过训练的人，凭天生的直觉，也会理解的．但是，这个原理的科学证明却一点也不简单.”于是，雅各布用数学语言提出了该问题并给出证明.

雅各布考察的是“缶子模型”：设一缶内有白球 r 个，黑球 s 个，可得“随机抽取一球为白球”的概率为 $P = r/(r+s)$, 则对给定常数 c, 可以找到足够大的 n, 使自此缶内进行 $N = n(r+s) = nt \ \ (t = r+s)$ 次有放回的抽球时，满足

$$P(|X/N - p| \le 1/t) > cP(|X/N - p| > 1/t)$$

或等价于

$$P(|X/N - p| > 1/t) < (c+1)^{-1}, \tag{1}$$

其中 X 表示 N 次抽球中白球出现数.

证明 令 $\varepsilon=1/t$, $A_0=P(Np<X<Np+N\varepsilon)$

$$A_k=P(Np+kN\varepsilon<X\leq Np+(k+1)N\varepsilon),\quad k=1,2,\cdots$$

可以证得当 N 充分大时，有

$$A_0>c(A_1+A_2+A_3\cdots).$$

同理，令

$$A_0'=P(Np-N\varepsilon<X<Np),$$

$$A_k'=P(Np-(k+1)N\varepsilon<X\leq Np+kN\varepsilon),\quad k=1,2,\cdots$$

有

$$A_0'>c(A_1'+A_2'+A_3'\cdots),$$

得

$$A_0+A_0'>c(A_1+A_2+A_3\cdots+A_1'+A_2'+A_3'\cdots),$$

即 (1) 式成立.

雅各布并不局限于证明大数定律, 还要进一步找到 (1) 式成立所需 N 的大小, 即给出估计值的一个精确度. 他利用二项式定理证明了为使 (1) 式成立, 式中的 N 必须满足 $N\geq\max(N_1,N_2)$ 其中

$$N_1=m_1t+st(m_1-1)/(r+1),\qquad N_2=m_2t+rt(m_2-1)/(s+1),$$

这里 m_1 为不小于 $\log[c(s-1)]/[\log(r+1)-\log r]$ 的最小整数, 而 m_2 为不小于 $\log[c(r-1)]/[\log(s+1)-\log s]$ 的最小整数 (雅各布时代 log 即为 ln).

雅各布给出一个例子来说明其结果. 令 $r=30,s=20$ 则某事件出现的概率为 30/50, 计算该事件出现次数与全部次数之比处于 29/50 和 31/50 之间的概率. 其结果为：当 $c=1000$ 时, N 取值为 25550, 概率值为 0.999; 若 $c=10000,N=25550+5708=31258$, 概率值为 0.9999; 若 $c=100000,N=31258+5708=36966$, 概率值为 0.99999. 就在这个例子后，《猜度术》嘎然而止.

伯努利大数定律现代可叙述为：某事件在 N 试验中的频率 X/N 依概率收敛于其概率 P, 即对 $\forall\varepsilon>0$, 有

$$P(|X/N-p|<\varepsilon)>1-\eta\qquad(\eta>0)$$

或

$$\lim_{N\to\infty}P(|X/N-p|<\varepsilon)=1.$$

值得惊奇的是雅各布没有用更直观的提法 $X/N\to P$, 若在当时，如此提出虽更直接但却无法证明. 这也许就是雅各布的高明之处. 由上知，在伯努利大数定律中，若 $c=1000$, 则 $N\geq 25550$. 而若用切比雪夫不等式估计时 $N\geq 600600$, 超出雅各布的值 23 倍多，可见雅各布对概率的估值是相当精细的. 然而， 25550 已大于巴塞尔的人口数字，这对于 18 世纪早期的人们而言是一个过于庞大的数字. 雅各布或许感到自己的方法并不成功，如第四卷虽然题为“论概率论

在社会、道德和经济等领域中的应用”，但他并没有把已经允诺的关于其方法在政治、经济学中的应用写入书中 [4].

5 其他观点和不足

在《猜度术》中，雅各布还给出了其他一些有影响的观点. 如明确区分了“古典概率”和“统计概率”. 他分别称之为“可以先验地计算”的概率和“后验地计算的概率”. 前者是基于对称性即等可能性，它不用进行实际观察就可知结果. 如掷一个均匀骰子，就没有理由认为一面比另一面更容易发生. 而更加广泛的一类现象需要“后验地计算”其概率，如天气的预测，人患某疾病的概率等。这就需要从统计的观点来解决. 雅各布还引进了所谓“道德确定性”概念. 他讨论了在现实生活中所观察到的各种迹象，以及这些迹象如何被组织成一条单纯的可能性陈述，意识到在大多数现实条件下，绝对确定是不可能实现的，规定对一个近乎必然的结果，其出现的概率不应该小于 0.999. 相反，若其结果出现的概率不大于 0.001, 那它就近乎不可能发生的. 现在将其称之为“事实上的确定性”或者“小概率事件原理”. 但雅各布对事物采取了一种机械决定论的立场. 他认为世界上的事物受严格的因果律支配. 他说，如果从现在直到永远，所有事件都被连续地观测到 (靠这点，可能性最终变成必然性), 将会发现世界上每件事情发生都有着明确的原因和遵循明确的法则，甚至对看来是相当偶然的事情，我们被强迫假定有一定必然性，似乎有点像命中注定的. 这样，他就否定了随机性 [6]. 雅各布在《猜度术》第 15 页、 27 页、 29 页和 146 页等多次提醒在研究概率这门学科时极易犯错误，尤其是在没有严格计算的情况下. 仅以其中第 14 题为例来说明 [3].

设某人先掷一骰子，然后按其所掷点数将骰子重复掷若干次. 若后来所掷点数和超过 12, 将获得全部赌金；若点数和等于 12, 只能得赌金一半，若点数和小于 12, 将一无所获.

雅各布算出其正确答案为 15295/31104, 其结果小于 1/2, 即游戏不利于某人. 之后，雅各布又给出一个貌似有理但实际上错误的解法.

在第一次试验中，某人以 1/6 的概率掷出 1 点，在此情况下，他只能再掷一次骰子，而他获得 1-6 点的概率相等，故他平均能掷点数为 $(1+2+3+4+5+6)/6=7/2$. 同样第一次试验中，某人以 1/6 的概率掷出 2 点，此时可以掷两次骰子，在此情况下，他获得点数和为 2-12 的概率相等. 故他平均能掷点数为 $(2+12)/2=7$ 同理可以算出第一次掷出 3 点、 4 点、 5 点、 6 点时，相应的所掷点数平均值分别为 $21/2, 14, 35/2$ 和 21. 因而所有平均值的平均数值为

$$\frac{1}{6}(\frac{7}{2}+7+\frac{21}{2}+14+\frac{35}{2}+21)=\frac{49}{4}$$

其结果大于 12, 游戏反而对某人有利. 雅各布给出一简捷的判别方法说明该解法的错误. 若仅掷一次骰子一定得不到 12 点，而即使掷 6 次骰子所得点数和也不一定能确保大于 12 点，其平均值怎么可能为 49/4 呢？但他好像没有能力明确指出错误所在.

虽雅各布如此谨慎，但他也犯了一个错误. 雅各布把随机变量分成两种即纯自变量和混合自变量. 假设有三个纯自变量，它们导致同一事件发生. 假设其概率分别为 $1-c/a, 1-f/d, 1-j/g$, 则事件发生的概率为 $1-cfi/adg$. 假设再增加两个混合变量，其概率分别为 $q/(q+r), t/(t+u)$, 雅各布给出事件发生的概率为 $1-cfiru/[adg(ru+qt)]$. 若 $q=0$ 时，所得结果显然与实际情况相悖. 在闪烁光芒的著作中出现了一点错误，犹如一块光彩照人的美玉出现瑕点，令人惋惜，但是白璧微瑕，瑕不掩瑜.

《猜度术》是雅各布一生中最有创造力的著作，该书的出版标志着概率论已建立在稳固的数学基础上并成为一个独立的数学分支. 美国概率史家海金 (Hacking) 称此书为 “概率概念漫长形成过程的终结与数学概率论的开端. ” [7] 时至今日，雅各布的概率思想在概率论领域仍有着重要影响.

衷心感谢我的导师曲安京教授对本文的悉心指导！

参考文献:

[1] TODHUNTER I. *A History of the Mathematical of Theory of Probability from the Times of Pascal to That of Laplace* [M]. New York: Chelsea, 1965.

[2] 苏淳，等. 译. 一个学者家族 [J]. 数学译林， 1988, **3**: 227–235.
SU Chun. et al. *The Bernoullis: a family of scholars* [J]. Translation. Mathematical Translation, 1988, **3**: 227–235. (in Chinese)

[3] BERNOULLI J. *Ars conjectandi* [M]. Basel, 1713.

[4] 李文林，等. 译. 数学史通论 [M]. 北京：高等教育出版社， 2004, 2.
LI Wen-lin. et al. *A History of Mathematics an Introduction* [M]. Translation. Beijing: Higher Education Press, 2004, 2. (in Chinese)

[5] ANDERS H. *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750* [M]. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.

[6] SHEYNIN O B. *On the early history of the law of large numbers* [J]. Biometrika, 1968, **55**: 459–467.

[7] HACKING I. *Jacques Bernoulli's Art of conjecturing* [J]. British J. Philos. Sci., 1971, **22**: 209–229.

Study on Jacob Bernoulli's Art of Conjecturing

XU Chuan-sheng[1,2]

(1. Centre for the History of Mathematics and Sciences, Northwest University, Shaanxi 710069, China;
2. Department of Mathematics, Linyi Normal University, Shandong 276001, China)

Abstract: Art of Conjecturing is the first foundational work on the theory of probability. Its publication symbolizes the independence of the theory of probability as a branch of mathematics. This paper analyses Jacob Bernoulli's new thoughts about probability, such as Bernoulli's law of large numbers and Bernoulli's number. Besides, we clear up the problem about the arranger and publisher of Art of Conjecturing.

Key words: art of conjecturing; law of large numbers; probability; expectation.