文章编号: 1000-341X(2007)02-0359-09 **文献标识码**: **A**

裁元齐次 Moran 集的 Hausdorff 维数

钟 婷[1], 杨竹莘[2]
(1. 吉首大学自动化系, 湖南 张家界 427000; 2. 东北财经大学数量经济系, 辽宁 大连 116025)
(E-mail: zhongting_2005@126.com)

摘 要: 将齐次 Moran 集 [1] 迭代过程中的 k 项序列集 $D_k=\{(i_1,\ldots,i_k):1\le i_j\le n_j,1\le j\le k\}$ 裁减为 $\tilde{D}_k=\{(i_1,\ldots,i_k):1\le i_j\le n_j,\quad i_j\ne 2 \text{ unless } i_{j-1}=1,\quad 2\le j\le k\}$, 相应的集合称为裁元齐次 Moran 集. 本文确定了一类裁元齐次 Moran 集的 Hausdorff 维数.

关键词: 裁元齐次 Moran 集; k 项序列集; Hausdorff 维数.
MSC(2000): 28A80
中图分类: O174.12

1 引言与定义

文献 [1], [2] 对 Moran 集作了详细的研究.

由大于 1 的整数序列 $\{n_k\}_{k\ge1}$ 和小于 1 的正实数序列 $\{c_k\}_{k\ge1}$ 可确定 $J\subset\mathbf{R}^d$ 上的一个齐次 Moran 集 [1]:

$$E=E(J,n_k,c_k)=\bigcap_{k\ge0}E_k,$$

其中

$$E_k=\bigcup_{\sigma\in D_k}J_\sigma,$$

$$D_k:=\{(i_1,\ldots,i_k)\in N^k:1\le i_j\le n_j,1\le j\le k\}.$$

本文讨论的是一类裁元齐次 Moran 集.

定义 1 $n_k\ge3$ 时, 如果将齐次 Moran 集 $E(J,n_k,c_k)$ 构造过程中的 k 项序列集 D_k 裁减为:

$$\tilde{D}_k=\{(i_1,\ldots,i_k)\in N^k:1\le i_j\le n_j,\quad i_j\ne 2 \text{ unless } i_{j-1}=1,\quad 2\le j\le k\} \tag{1.1}$$

令

$$\tilde{E}_k=\bigcup_{\sigma\in\tilde{D}_k}J_\sigma,$$

那么

$$\tilde{E}=\tilde{E}(J,n_k,c_k)=\bigcap_{k\ge0}\tilde{E}_k$$

称为由序列 $\{n_k\}_{k\ge1}$ 和 $\{c_k\}_{k\ge1}$ 确定的裁元齐次 Moran 集. $\mathcal{F}_k=\{J_\sigma:\sigma\in\tilde{D}_k\}$ 称为 $\tilde{E}$ 的 k 阶基本元.

收稿日期: 2005-05-17; **接受日期**: 2005-07-19

在裁元齐次 Moran 集中，不同的 $k-1$ 阶基本元 $\sigma\in D_{k-1}$ 所包含的 k 阶基本元 $J_{\sigma*j}$ 的个数不一样，有 n_k 个和 n_k-1 个的两种情况，所以集 $\tilde{E}$ 不再是 Moran 集. 要求集 $\tilde{E}$ 的 Hausdorff 维数，不能像 Moran 集那样定义质量分布 [2]，或者降阶补齐 [2]；也不能按文献 [3] 针对 Contor 集的办法来证明等价覆盖网. 本文针对一类特殊的裁元齐次 Moran 集，通过分析其 k 阶基本元个数及其升降阶规律来证明其 Hausdorff 维数.

2 集 $\tilde{E}$ 的 k 阶基本元个数

集 $\tilde{E}$ 的 k 阶基本元个数也是 $\tilde{D}_k$ 的 k 项序列集 $(i_1i_2\cdots i_k)$ 的个数，对此，有

引理 2.1 (1.1) 式定义的 k 项序列集个数 $\sharp\tilde{D}_k=\sharp(i_1i_2\cdots i_k)$ 满足：

$$\sharp\tilde{D}_k=a_1\cdot a_2\cdots a_k \tag{2.1}$$

其中

$$a_j=\ (n_j-1)+\cfrac{1}{(n_{j-1}-1)+\cfrac{1}{(n_{j-2}-1)+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{\vdots}{(n_2-1)+\frac{1}{n_1}}}}} \qquad \ddots \qquad +\cfrac{1}{(n_2-1)+\frac{1}{n_1}} \tag{2.2}$$

是一个有限连分数.

证明 记 $\bar{i}_j$ 为 $\{1,2,\ldots,n_j\}$ 中不等于 i_j 的数，由 (1.1) 式

$$\sharp(i_1,\ldots,i_{k-2},\bar{1},2)=0,$$

$$\sharp(i_1,\ldots,i_{k-2},1,2)=\sharp(i_1,\ldots,i_{k-2}),$$

所以

$$\sharp(i_1,\ldots,i_{k-1},2)=\sharp(i_1,\ldots,i_{k-2}).$$

而

$$\sharp(i_1,\ldots,i_{k-1},\bar{2})=\sharp(i_1,\ldots,i_{k-1}),$$

因此

$$\begin{aligned}\sharp(i_1i_2\cdots i_k)&=(n_k-1)\cdot\sharp(i_1,\ldots,i_{k-1},\bar{2})+\sharp(i_1,\ldots,i_{k-1},2)\\&=(n_k-1)\cdot\sharp(i_1,\ldots,i_{k-1})+\sharp(i_1,\ldots,i_{k-2}).\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\frac{\sharp\tilde{D}_k}{\sharp\tilde{D}_{k-1}}&=(n_k-1)+\frac{\sharp\tilde{D}_{k-2}}{\sharp\tilde{D}_{k-1}}=(n_k-1)+\cfrac{1}{\frac{\sharp\tilde{D}_{k-1}}{\sharp\tilde{D}_{k-2}}}\\&=(n_k-1)+\cfrac{1}{(n_{k-1}-1)+\cfrac{1}{\frac{\sharp\tilde{D}_{k-2}}{\sharp\tilde{D}_{k-3}}}}=\cdots=a_k.\end{aligned}$$

从而有：

$$\sharp\tilde{D}_k = a_k\cdot\sharp\tilde{D}_{k-1} = a_k\cdot a_{k-1}\cdot\sharp\tilde{D}_{k-2} = \cdots = a_k\cdot a_{k-1}\cdots a_1.$$

引理 2.2　对于由 (2.2) 式确定的 $a_j, (j=1,\ldots,k)$, 如果

$$\begin{aligned} n_1 = n_3-1 = n_5-1 = \cdots = n_{2k+1}-1 = m_1,\\ n_2-1 = n_4-1 = \cdots = n_{2k}-1 = m_2, \end{aligned}\qquad 且\quad m_1<m_2,$$

则有 (i) $a_1<a_3<a_5<\cdots<m_1+1\le m_2<\cdots<a_6<a_4<a_2$;

(ii) $a_1a_2<a_3a_4<a_5a_6<\cdots\le a^2\le\cdots<a_6a_7<a_4a_5<a_2a_3$;

(iii) $\frac{m_1-1}{a}<\frac{a_1\cdots a_k}{a^k}<1$.

这里 a 是

$$\lim_{k\to\infty}a_ka_{k+1}=\frac{m_1m_2+\sqrt{(m_1m_2)^2+4m_1m_2}+2}{2}=:a^2\quad 的算术平方根. \tag{2.3}$$

证明　结论 (i) 显然.

(ii) 因为奇数项序列 $\{a_{2k+1}\}$ 单调递增有上界，所以

$$\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}=a_*存在，满足a_*=m_1+\frac{1}{m_2+\frac{1}{a_*}}$$

解得

$$a_*=\lim_{k\to\infty}a_{2k}=\frac{m_1m_2+\sqrt{(m_1m_2)^2+4m_1m_2}}{2m_2}=\liminf_{k\to\infty}a_k.$$

同理可得，偶数项序列 $\{a_{2k}\}$ 的极限为

$$a^*=\lim_{k\to\infty}a_{2k}=\frac{m_1m_2+\sqrt{(m_1m_2)^2+4m_1m_2}}{2m_1}=\limsup_{k\to\infty}a_k.$$

因此 $\{a_k\}$ 的排序是

$$a_1<a_3<a_5<\cdots<a_*<a^*<\cdots<a_6<a_4<a_2. \tag{2.4}$$

因为 $a_{2k}a_{2k+1}=a_{2k}(m_1+\frac{1}{a_{2k}})=m_1a_{2k}+1$ 的增减性与序列 $\{a_{2k}\}$ 相同，$a_{2k-1}a_{2k}=a_{2k-1}(m_2+\frac{1}{a_{2k-1}})=m_1a_{2k-1}+1$ 的增减性与序列 $\{a_{2k+1}\}$ 相同. 所以按 $\{a_k\}$ 的排序可得 $\{a_ka_{k+1}\}$ 的排序为

$$a_1a_2<a_3a_4<a_5a_6<\cdots<a_6a_7<a_4a_5<a_2a_3,$$

且

$$\lim_{k\to\infty}a_{2k}a_{2k+1}=m_1\lim_{k\to\infty}a_{2k}+1=m_1a^*=\frac{m_1m_2+\sqrt{(m_1m_2)^2+4m_1m_2}+2}{2},$$

$$\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}a_{2k}=m_2\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}+1=m_2a_*=\frac{m_1m_2+\sqrt{(m_1m_2)^2+4m_1m_2}+2}{2}.$$

可见，对于任意 k,

$$\lim_{k\to\infty}a_ka_{k+1}=\frac{m_1m_2+\sqrt{(m_1m_2)^2+4m_1m_2}+2}{2}=:a^2\quad 存在.$$

从而有

$$a_1a_2 < a_3a_4 < a_5a_6 < \cdots \le a^2 \le \cdots < a_6a_7 < a_4a_5 < a_2a_3. \tag{2.5}$$

由 (2.5) 式,

$$\frac{a_1\cdots a_{2k}}{a^{2k}} = \frac{a_1a_2}{a^2}\cdot\frac{a_3a_4}{a^2}\cdots\frac{a_{2k-1}a_{2k}}{a^2} < 1.$$

由 (2.4) 和 (2.5) 式

$$\frac{a_1\cdots a_{2k}}{a^{2k}} = \frac{a_1}{a}\cdot\frac{a_2a_3}{a^2}\cdot\frac{a_4a_5}{a^2}\cdots\frac{a_{2k-2}a_{2k-1}}{a^2}\cdot\frac{a_{2k}}{a} > \frac{a_1}{a}\cdot\frac{a_{2k}}{a} > \frac{m_1-1}{a}$$

从而 k 为偶数时, $\frac{m_1-1}{a} < \frac{a_1\cdots a_k}{a^k} < 1$.
同理可证, k 为奇数时, 也有: $\frac{m_1-1}{a} < \frac{a_1\cdots a_k}{a^k} < 1$. 证毕.

3 $\tilde{E}$ 的基本元之升降阶规律

以下总假设 $\{n_k\}_{k\ge1}$ 满足引理 2 条件, $\{c_k\}_{k\ge1}$ 是正常数列, $\tilde{E}$ 是这样的 $\{n_k\}_{k\ge1}$ 和 $\{c_k\}_{k\ge1}$ 确定的裁元齐次 Moran 集. 设 $s=-\log_c a$, 这里 a 仍由 (2.3) 式确定.

对于 $\tilde{E}$ 的自然覆盖网 $\mathcal{F}_{2k}=\{J_\sigma:\sigma\in\tilde{D}_{2k}\}$ 和 $\mathcal{F}_{2k+1}=\{J_\sigma:\sigma\in\tilde{D}_{2k+1}\}$, 有

引理 3.1 $\mathcal{H}^s_{\mathcal{F}_{2k+1}}(\tilde{E}) \le \mathcal{H}^s_{\mathcal{F}_{2k}}(\tilde{E})$,即:

$$\sum_{J_\sigma\in\mathcal{F}_{2k+1}}|J_\sigma|^s \le \sum_{J_\sigma\in\mathcal{F}_{2k}}|J_\sigma|^s.$$

证明 由 (2.4) 式, $a_{2k+1} < a_* < a$. 因为 $s=-\log_c a$, 所以 $a_{2k+1}c^s < ac^s = 1$, 从而有

$$\sum_{J_\sigma\in\mathcal{F}_{2k+1}}|J_\sigma|^s = a_1\cdots a_{2k}a_{2k+1}c^{(2k+1)s} \le a_1\cdots a_{2k}c^{2ks}(a_{2k+1}c^s) \le \sum_{J_\sigma\in\mathcal{F}_{2k}}|J_\sigma|^s.$$

引理 3.1 表明 $\tilde{E}$ 的 $\mathcal{F}_{2k}=\{J_\sigma:\sigma\in\tilde{D}_{2k}\}$ 覆盖网要比 $\mathcal{F}_{2k+1}=\{J_\sigma:\sigma\in\tilde{D}_{2k+1}\}$ 覆盖网更经济.

下面研究 $\tilde{E}$ 的单个基本元的升降阶规律.

以 $J^k_{\sigma*i}$ 表示尾数是 i 的 $\tilde{D}_k$ 中词对应的 k 阶基本元, 则 $\tilde{E}$ 的基本元可分成四类:

$$J^{2k}_{\sigma*1};J^{2k}_{\sigma*\bar{1}};J^{2k+1}_{\sigma*1};J^{2k+1}_{\sigma*\bar{1}}$$

这里符号 “ $\bar{1}$ ” 表示非 1 整数.

由 $\tilde{D}_k$ 的定义, $J^{2k}_{\sigma*1}$ 升阶后包含 m_1+1 个 $2k+1$ 阶基本元, 其中一个 $J^{2k+1}_{\sigma*1}$ 和 m_1 个 $J^{2k+1}_{\sigma*\bar{1}}$, 记作

$$J^{2k}_{\sigma*1} \xrightarrow{\text{升阶}} 1\cdot J^{2k+1}_{\sigma*1} + m_1\cdot J^{2k+1}_{\sigma*\bar{1}}. \tag{A}$$

因为 $\bar{1}$ 后不能接 2, 所以

$$J^{2k}_{\sigma*\bar{1}} \xrightarrow{\text{升阶}} 1\cdot J^{2k+1}_{\sigma*1} + (m_1-1)\cdot J^{2k+1}_{\sigma*\bar{1}}. \tag{B}$$

同理:

$$J^{2k+1}_{\sigma*1} \xrightarrow{\text{升阶}} 1\cdot J^{2k+2}_{\sigma*1} + m_2\cdot J^{2k+2}_{\sigma*\bar{1}}, \tag{C}$$

$$J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+1} \xrightarrow{\text{升阶}} 1\cdot J_{\sigma*1}^{2k+2}+(m_2-1)\cdot J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+2}. \tag{D}$$

逐级按 (A),(B),(D) 式升阶三类基本元 $J_{\sigma*1}^{2k}; J_{\sigma*\bar{1}}^{2k}; J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+1}$ (k 为任意整数), 以下称这一过程为“升阶留 $J_{\sigma*1}^{2k+1}$ 过程”. 给出下列记号：

对 $J_{\sigma*1}^{2k}$ 实行“升阶留 $J_{\sigma*1}^{2k+1}2l+1$ 次”，所得基本元集合记为 $\mathcal{V}_{2k,1}=\{V_i\}_{2k,1}$;

对 $J_{\sigma*\bar{1}}^{2k}$ 实行“升阶留 $J_{\sigma*1}^{2k+1}2l+1$ 次”，所得基本元集合记为 $\mathcal{V}_{2k,\bar{1}}=\{V_i\}_{2k,\bar{1}}$;

对 $J_{\sigma*1}^{2k+1}$ 实行“升阶留 $J_{\sigma*1}^{2k+1}2l$ 次”，所得基本元集合记为 $\mathcal{V}_{2k+1,1}=\{V_i\}_{2k+1,1}$;

对 $J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+1}$ 实行“升阶留 $J_{\sigma*1}^{2k+1}2l$ ” 次，所得基本元集合记为 $\mathcal{V}_{2k+1,\bar{1}}=\{V_i\}_{2k+1,\bar{1}}$.

则有

引理 3.2 存在 $L>0$, 当 $l>L$ 时，下列不等式都成立：

(i). $\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k,1}}|J_\sigma|^s\le|J_{\sigma*1}^{2k}|^s$;

(ii). $\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k,\bar{1}}}|J_\sigma|^s\le|J_{\sigma*\bar{1}}^{2k}|^s$;

(iii). $\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k+1,\bar{1}}}|J_\sigma|^s\le|J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+1}|^s$;

即：将 $J_{\sigma*1}^{2k}, J_{\sigma*\bar{1}}^{2k}, J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+1}$ “升阶留 $J_{\sigma*1}^{2k+1}2L$ 次” 后，上述和不增.

证明 对 $J_{\sigma*1}^{2k}$ 逐级“升阶留 $J_{\sigma*1}^{2k+1}$ ”：

$$\begin{aligned}
J_{\sigma*1}^{2k} &\xrightarrow{\text{升阶}} 1\cdot J_{\sigma*1}^{2k+1}+m_1\cdot J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+1} && \text{由 (A) 式}\\
&\xrightarrow{\text{升阶}} J_{\sigma*1}^{2k+1}+m_1[1\cdot J_{\sigma*1}^{2k+2}+(m_2-1)\cdot J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+2}] && \text{由 (D) 式}\\
&\xrightarrow{\text{升阶}} J_{\sigma*1}^{2k+1}+m_1\{[J_{\sigma*1}^{2k+3}+m_1\cdot J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+3}]+(m_2-1)[J_{\sigma*1}^{2k+1}+(m_1-1)\cdot J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+1}]\} && \text{由 (A,B)}\\
&= J_{\sigma*1}^{2k+1}+m_1m_2J_{\sigma*1}^{2k+3}+m_1(m_1m_2-m_2+1)\cdot J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+3}.
\end{aligned}$$

循环上述过程直到升阶 $2l+1$ 次，得

$$\begin{aligned}
J_{\sigma*1}^{2k} \xrightarrow{\text{升阶}} & J_{\sigma*1}^{2k+1}+[m_1m_2J_{\sigma*1}^{2k+3}+m_1m_2(m_1m_2-m_2+1)\cdot J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+5}+\\
& m_1m_2(m_1m_2-m_2+1)^2\cdot J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+7}+\\
& \cdots+m_1m_2(m_1m_2-m_2+1)^{l-1}\cdot J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+2l+1}]+m_1(m_1m_2-m_2+1)^l\cdot J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+2l+1}.
\end{aligned}$$

所以对于 $J_{\sigma*1}^{2k}$ 的“升阶留 $J_{\sigma*1}^{2k+1}$ ” 集 $\mathcal{V}_{2k,1}=\{V_i\}_{2k,1}$, 有：

$$\begin{aligned}
\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k,1}}|J_\sigma|^s =&|J_{\sigma*1}^{2k+1}|^s+[m_1m_2|J_{\sigma*1}^{2k+3}|^s+m_1m_2(m_1m_2-m_2+1)|J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+5}|^s+\cdots+\\
& m_1m_2(m_1m_2-m_2+1)^{l-1}|J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+2l+1}|^s]+m_1(m_1m_2-m_2+1)^l|J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+2l+1}|^s\\
=&c^{(2k+1)s}+[m_1m_2c^{(2k+3)s}+m_1m_2(m_1m_2-m_2+1)c^{(2k+5)s}+\cdots+\\
& m_1m_2(m_1m_2-m_2+1)^{l-1}c^{(2k+2l+1)s}]+m_1(m_1m_2-m_2+1)^lc^{(2k+2l+1)s}.
\end{aligned}$$

由于中括号内作为等比数列的公比：

$$(m_1m_2-m_2+1)c^{2s}=(m_1m_2-m_2+1)\frac{2}{m_1m_2+\sqrt{(m_1m_2)^2+4m_1m_2}+2}<1$$

所以，对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在整数 L, 当 $l > L$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k,1}} |J_\sigma|^s =& c^{(2k+1)s} + m_1m_2c^{(2k+3)s}\cdot\frac{1-[(m_1m_2-m_2+1)c^{2s}]^l}{1-(m_1m_2-m_2+1)c^{2s}} + \\ & m_1(m_1m_2-m_2+1)^l c^{(2l+2k+1)s} \\ \le & c^{(2k+1)s}[1+m_1m_2c^{2s}\cdot\frac{1}{1-(m_1m_2-m_2+1)c^{2s}}+\varepsilon]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

考察其主部:

$$\begin{aligned} & c^{(2k+1)s} + m_1m_2c^{(2k+3)s}\cdot\frac{1}{1-(m_1m_2-m_2+1)c^{2s}} \\ = & c^{2ks}\{c^s[1+m_1m_2\cdot\frac{1}{c^{-2s}-(m_1m_2-m_2+1)}]\}. \end{aligned}$$

由 $s=-\log_c a$ 及 (2.3) 式，得不等式

$$\begin{aligned} c^{2s} = \frac{1}{a} &= \frac{2}{m_1m_2+\sqrt{(m_1m_2)^2+4m_1m_2}+2} \\ &< \frac{2}{m_1m_2+\sqrt{(m_1m_2)^2+3m_1m_2+9/4}+2} < \frac{1}{m_1m_2+7/4} \end{aligned}$$

代入 (3.1) 式便得：当 $l > L$ 时，永远有

$$\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k,1}} |J_\sigma|^s < (1+\varepsilon)c^{2ks} = (1+\varepsilon)|J_{\sigma*1}^{2k}|^s.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可得

$$\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k,1}} |J_\sigma|^s < |J_{\sigma*1}^{2k}|^s \ \text{成立.}$$

容易看出

$$\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k,\bar{1}}} |J_\sigma|^s < \sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k,1}} |J_\sigma|^s; \quad \sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k+1,\bar{1}}} |J_\sigma|^s < \sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k,1}} |J_\sigma|^s,$$

所以，对于上面的 L, 当 $l > L$ 时，更有

(ii). $\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k,\bar{1}}} |J_\sigma|^s \le |J_{\sigma*\bar{1}}^{2k}|^s$; (iii). $\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k+1,\bar{1}}} |J_\sigma|^s \le |J_{\sigma*\bar{1}}^{2k+1}|^s$ 成立.
唯有对 $J_{\sigma*1}^{2k+1}$“升阶留 $J_{\sigma*1}^{2k+1}$”后，结果与上面相反，按 (i) 同样的证明过程可得:

引理 3.3 对于任意自然数 l (将 $J_{\sigma*1}^{2k+1}$ “升阶留 $J_{\sigma*1}^{2k+1}$ ” 的次数), 不等式

$$\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k+1,1}} |J_\sigma|^s > |J_{\sigma*1}^{2k+1}|^s \ \text{成立.}$$

即：将 $J_{\sigma*1}^{2k+1}$ “升阶留 $J_{\sigma*1}^{2k+1}$ 任意次”后，和不减.

换句话说就是: 将 $\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k+1,1}}|J_\sigma|^s$ 降阶补齐到 $J_{\sigma*1}^{2k+1}$, 其和不增.

4 $\tilde{E}$ 的 Hausdorff 维数

定理 1 设 $\tilde{E}$ 是由定义 1 定义的裁元齐次 Moran 集, 则 $\tilde{E}$ 的 Hausdorff 维数上界是

$$\dim_H\tilde{E}\le\liminf_{k\to\infty}\frac{\log a_1\cdots a_k}{-\log c_1\cdots c_k}.$$

证明 设 $s=\liminf_{k\to\infty}\frac{\log a_1\cdots a_k}{-\log c_1\cdots c_k}$, 则对于任意 $\varepsilon>0$, 存在整数序列 $\{k_i\}\nearrow\infty$ 及整数 K, 当 $k_i>K$ 时, 有

$$(c_1\cdots c_{k_i})^{s+\varepsilon}<\frac{1}{a_1\cdots a_{k_i}}.$$

又因为 $\tilde{E}$ 可被 $\sharp\tilde{D}_{k_i}=a_1\cdot a_2\cdots a_{k_i}$ 个长度为 $c_1\cdots c_{k_i}$ 的基本元 $\{J_\sigma\}_{\sigma\in\tilde{D}_{k_i}}$ 覆盖. 所以

$$\mathcal{H}^{s+\varepsilon}(\tilde{E})\le\lim_{i\to\infty}\sum_{\sigma\in\tilde{D}_{k_i}}|J_\sigma|^{s+\varepsilon}=\lim_{i\to\infty}(a_1\cdots a_{k_i})(c_1\cdots c_{k_i})^{s+\varepsilon}<1.$$

因此 $\dim_H\tilde{E}\le s-\varepsilon$. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性, 即得 $\dim_H\tilde{E}\le s$.

要证明相反的不等式, 先按文献 [2] 中第八章的一个网测度引理 (引理 2 和引理 3) 来给出我们的

引理 4.1 存在非零常数 A, 使得对任意 $s>0$, 有

$$\mathcal{H}^s(\tilde{E})\ge A\cdot\mathcal{H}^s_{\mathcal{F}}(\tilde{E}).$$

虽然文 [2] 中相应的引理是针对一般 Moran 集的, 但因 s 的任意性, 其证明方法可以照搬到裁元齐次 Moran 集上而不影响其正确性.

现在给出本文的主要结果

定理 2 设 $\{n_k\}_{k\ge1}$ 满足引理 2 条件, $c_k=c>0$, 则由 $\{n_k\}_{k\ge1}$ 和 $\{c_k\}_{k\ge1}$ 确定的裁元齐次 Moran 集 $\tilde{E}$ 的 Hausdorff 维数是

$$\dim_H\tilde{E}=-\log_c a.$$

这里 a 是

$$\lim_{k\to\infty}a_ka_{k+1}=\frac{m_1m_2+\sqrt{(m_1m_2)^2+4m_1m_2}+2}{2}=:a^2$$

的算术平方根.

证明 由引理 2.2 的 $\frac{m_1-1}{a}<\frac{a_1\cdots a_k}{a^k}<1$, 和所设的 $c_k=c$ 代入定理 1 便得

$$\dim_H\tilde{E}\le\liminf_{k\to\infty}\frac{\log a_1\cdots a_k}{-\log c_1\cdots c_k}\le\frac{\log a}{-\log c}=-\log_c a.$$

下面证明相反的不等式, 根据引理 4.1, 只需考虑 $\mathcal{F}$ 中的元素作为覆盖类. 因为

$$\lim_{k\to\infty}|J_\sigma|=\lim_{k\to\infty}c^k=0,(\sigma\in\tilde{D}_k),$$

所以对任意 $\delta>0$, 存在正整数 K, 使得当 $k>K$ 时, $|J_\sigma|\le\delta,\sigma\in\tilde{D}_k$.

现设 $\mathcal{U}=\{U_i\}$ 为 $\tilde{E}$ 的任一 δ 覆盖，其中 $U_i\in\mathcal{F}$. 由于 $\tilde{E}$ 是紧集，我们可以从中挑出一个无包含关系的有限覆盖，令

$$k_1=\min\{k:U_i\in\mathcal{F}_k\},k_2=\max\{k:U_i\in\mathcal{F}_k\},$$

则 $k_2\ge k_1\ge K$.

考虑将 $\tilde{E}$ 的全部 k_1 阶基本元逐级按 (A),(B),(D) 式升阶三类基本元 $J^{2k}_{\sigma*1};J^{2k}_{\sigma*\bar{1}};J^{2k+1}_{\sigma*\bar{1}}$($k$ 为任意整数) 直到第 k_2+2L 阶 (本文称其为“升阶留 $J^{2k+1}_{\sigma*1}$ 过程”), 所得基本元素集记为 $\mathcal{V}=\{V_i\}$, 则 $\mathcal{V}=\{V_i\}$ 仍为 $\tilde{E}$ 的网覆盖，下面证明

$$\sum_{J_\sigma\in\{U_i\}}|J_\sigma|^s\ge\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}}|J_\sigma|^s. \tag{4.1}$$

可通过两个步骤将 $\tilde{E}$的 $\mathcal{U}$ 覆盖网化成 $\mathcal{V}$ 覆盖网.

步骤一. 将覆盖网 $\mathcal{U}=\{U_i\}$ “升阶留 $J^{2k+1}_{\sigma*1}$ ”：

从 $\mathcal{U}=\{U_i\}$ 的最低 (k_1阶) 开始逐级“升阶留 $J^{2k+1}_{\sigma*1}$ ” 直到第 k_2+2L 阶，所得新的网覆盖记为 $\mathcal{W}=\{W_i\}$, 则由命题 2,

$$\sum_{J_\sigma\in\{U_i\}}|J_\sigma|^s\ge\sum_{J_\sigma\in\{W_i\}}|J_\sigma|^s. \tag{4.2}$$

此时

$$\sharp\{J^{2k+1}_{\sigma*1}:J^{2k+1}_{\sigma*1}\in\{W_i\}\}\le\sharp\{J^{2k+1}_{\sigma*1}:J^{2k+1}_{\sigma*1}\in\{V_i\}\}.$$

步骤二. 将网覆盖 $\mathcal{W}=\{W_i\}$ 实行“降阶补 $J^{2k+1}_{\sigma*1}$ ”

从 $\mathcal{W}=\{W_i\}$ 第 k_2 阶开始逐级“降阶补 $J^{2k+1}_{\sigma*1}$ ” 直到第 k_1 阶，可使得

$$\sharp\{J^{2k+1}_{\sigma*1}:J^{2k+1}_{\sigma*1}\in\{W_i\}\}=\sharp\{J^{2k+1}_{\sigma*1}:J^{2k+1}_{\sigma*1}\in\{V_i\}\}.$$

从而所得新的网覆盖就是 $\mathcal{V}=\{V_i\}$, 且由引理 3.2,

$$\sum_{J_\sigma\in\{W_i\}}|J_\sigma|^s\ge\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}}|J_\sigma|^s. \tag{4.3}$$

综合 (4.2),(4.3) 便得 (4.1).

由引理 3.1, 我们可以假设上面的 $k_1=2k+1$ 是奇数，否则可以将偶数 $2k$ 阶基本元全部升阶到 $2k+1$ 阶，而且和不增.

由于 $\mathcal{U}=\{U_i\}$ 是 $\tilde{E}$ 的元素在 $\mathcal{F}$ 中的任一 δ 覆盖，所以

$$\mathcal{H}^s_{\delta,\mathcal{F}}(\tilde{E})\ge\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}}|J_\sigma|^s=\sharp\tilde{D}_{2k}|J^{2k+1}_{\sigma*1}|^s+(\sharp\tilde{D}_{2k+1}-\sharp\tilde{D}_{2k})\sum_{J_\sigma\in\{V_i\}_{2k+1,\bar{1}}}|J_\sigma|^s>\sharp\tilde{D}_{2k}|J^{2k+1}_{\sigma*1}|^s.$$

上面等式是因为 $\tilde{E}$ 的 $2k+1$ 阶基本元中有 $\sharp\tilde{D}_{2k}$ 个 $J^{2k+1}_{\sigma*1}$ 类元素，剩余的就是 $\sharp\tilde{D}_{2k+1}-\sharp\tilde{D}_{2k}$ 个 $J^{2k+1}_{\sigma*\bar{1}}$ 类元素.

由引理 2.1, 2.2(iii) 及 $s=-\log_c a$ 可得

$$\sharp\tilde{D}_{2k}|J_{\sigma*1}^{2k+1}|^s = a_1a_2\cdots a_{2k}(c^{2k+1})^s = \frac{a_1a_2\cdots a_{2k}}{a^{2k}}\cdot\frac{1}{a} > \frac{m_1-1}{a^2} > 0.$$

所以,

$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{F}}(\tilde{E}) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_{\mathcal{F},\delta}(\tilde{E}) > 0.$$

从而 $\dim_H\tilde{E}\geq s$. 结合上面证明的 $\dim_H\tilde{E}\leq s$, 定理 2 获证.

参考文献:

[1] MORAN P A P. *Additive functions of intervals and Hausdorff measure* [J]. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1946, **42**: 15–23.

[2] 文志英. 分形几何的数学基础 [M]. 上海：上海科技教育出版社， 2000.
WEN Zhi-ying. *Mathematical Foundations of Fractal Geometry* [M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 2000. (in Chinese)

[3] FENG De-jun, RAO Hui, WU Jun. *The net measure properties of symmetric Cantor sets and their applications* [J]. Progr. Natur. Sci.(English Ed.), 1997, **7**: 172–178.

[4] YAN Ping. *Dimensions of a class of high-dimensional homogeneous Moran sets and Moran classes* [J]. Progr. Natur. Sci. (English Ed.), 2002, **12**: 655–660.

Hausdorff Dimensions of Some Reduced Homogeneous Moran Sets

ZHONG Ting[1], *YANG Zhu-xin*[2]

(1. Department of Automation, Jishou University, Hunan 427000, China;
2. Department of Quantitative Economics, Dongbei University of Finance & Economics, Liaoning 116025, China
)

Abstract: $D_k=\{(i_1,\ldots,i_k):1\leq i_j\leq n_j, 1\leq j\leq k\}$ in the iterative process of the homogeneous Moran is reduced to $\tilde{D}_k=\{(i_1,\ldots,i_k):1\leq i_j\leq n_j, i_j\neq 2\quad\text{unless}\quad i_{j-1}=1, 2\leq j\leq k\}$, the corresponding set is called symmetric cantor set. The Hausdorff dimensions of $\tilde{E}$ are determined.

Key words: reduced homogeneous Moran set; k-sequence set; Hausdorff dimension.