第27卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.2
2007年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2007

文章编号: 1000-341X(2007)02-0432-05 **文献标识码**: **A**

准模糊图拟阵基的交换

刘文斌
(通信指挥学院基础部，湖北 武汉 430010)
(E-mail:liuwenbinlx@126.com)

摘 要: 本文讨论了准模糊图拟阵基的交换定理，在此基础上给出了基有序的准模糊图拟阵的一些性质.

关键词: 拟阵；模糊拟阵.
MSC(2000): 05B35
中图分类: O157.2; O159

1 基本概念

定义 1.1[1] 设 E 是有限集， I 是 E 的子集族. 若 I 满足下列条件：

1) $\emptyset \in I$;

2) 若 $X \in I, Y \subseteq X$, 则 $Y \in I$;

3) 若 $X, Y \in I, |X| < |Y|$, 则有 $W \in I$, 使： $X \subset W \subseteq X \cup Y$,

则称对偶 (E, I) 为 E 上的一个拟阵. 记为 $M = (E, I)$.

任意的 $X \subseteq E$, 若 $X \in I$, 则称 X 为 M 的独立集，否则称 X 为 M 的相关集. M 的极大独立集称为 M 的基. M 的全部基组成的集合称为 M 的基集. 记为 B. M 的极小相关集称为 M 的圈. M 的全部圈组成的集合称为 M 的圈集. 记为 C. 若 $O \in M$ 且 $|O| = 1$, 则称 O 为 M 的环.

引理 1.1[1] 设 E 是有限集， B 是 E 的非空子集合，则 B 是 E 上的基集的充要条件是 B 满足下列两条：

1) 任意的 $B_1, B_2 \in B$, 都有 $|B_1| = |B_2|$;

2) 任意的 $B_1, B_2 \in B$, 任意的 $x \in B_1$, 都有 $y \in B_2$, 使得： $(B_1 \backslash x) \cup y \in B$.

定义 1.2[1] 拟阵 M 的秩函数是一个函数 $\rho : 2^E \to Z^+$, 使对任意的 $A \subseteq E$ 有 $\rho(A) = \max\{|X| |X \subseteq A, X \in I\}$. $\rho(E)$ 称为拟阵 M 的秩，通常记为 $\rho(E) = \rho(M)$.

下面介绍几个有关模糊数学的概念：设 E 是一个集合，则 E 上的模糊集 μ 是一个映射 $\mu : E \to [0, 1]$. E 上模糊集的全体记为 $F(E)$.

任意的 $\mu, \nu \in F(E)$, 有下列概念和记法：

$\mathrm{supp}(\mu) = \{x \in E | \mu(x) > 0\}$ 称为 μ 的支撑集. 若 $\mathrm{supp}(\mu) = \emptyset$, 则称为模糊空集，仍记为 $\emptyset$. $m(\mu) = \inf\{\mu(x) | x \in \mathrm{supp}\mu\}$. $R^+(\mu) = \{\mu(x) > 0 | \forall x \in E\}$. $|\mu| = \sum_{x \in E} \mu(x)$ 称为模糊集 μ 的势. $Cr(\mu) = \{x \in E | \mu(x) \geq r\}$, 其中 $r \in [0, 1]$ 称为 μ 的 r 水平集. $\mu \cap \nu = \min\{\mu, \nu\}$ 称为模糊集 μ 和 ν 的交. $\mu \cup \nu = \max\{\mu, \nu\}$ 称为模糊集 μ 和 ν 的并. 任意的 $x \in E$, 有 $\mu(x) \leq \nu(x)$,

收稿日期: 2004-03-22; **接受日期**: 2004-07-01

则称模糊集 μ 被包含于模糊集 ν, 记为 $\mu \le \nu$. 如果 $\mu \le \nu$, 且存在 $x \in E$, 使 $\mu(x) < \nu(x)$, 则称模糊集 μ 被真包含于模糊集 ν, 记为 $\mu < \nu$.

记 $x \in E, \mu\backslash x$ 表示模糊集： $(\mu\backslash x)(y) = \begin{cases} \mu(y), & \text{当 } y \in E\backslash x, \\ 0, & \text{当 } y = x. \end{cases}$

$\forall X \subseteq E, \forall r \in (0,1)$, $\omega(X,r)$ 表示模糊集： $\omega(x,r) = \begin{cases} r, & x \in X, \\ 0, & x \notin X \end{cases}$ 称为 X 上的水平为 r 的初等模糊集.

易证，任意的 $\mu \in F(E)$, 若 $R^+(\mu) = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, 则： $\mu = \omega(C_{r_1}(\mu), r_1) \vee \cdots \vee \omega(C_{r_n}(\mu), r_n)$.

定义 1.3[2] 设 E 是一个有限集， $\Psi \subseteq F(E)$ 是一个满足下列条件的非空模糊集族：

1) $\emptyset \in \Psi$;

2) 若 $\mu \in \Psi, \nu \in F(E)$, 且 $\nu \le \mu$, 则 $\nu \in \Psi$;

3) 若 $\mu, \nu \in \Psi, |\mathrm{supp}\mu| < |\mathrm{supp}\nu|$, 则存在 $\omega \in \Psi$ 使

(a) $\mu < \omega \le \mu \vee \nu$;

(b) $m(\omega) \ge \min\{m(\mu), m(\nu)\}$,

则称对偶 $\Pi = (E, \Psi)$ 是 E 上的模糊拟阵， Ψ 称为 Π 的独立模糊集族. 若 $\mu \in F(E)$, 但 $\mu \notin \Psi$, 则称 μ 为 Π 的模糊相关集. 极大模糊独立集称为 Π 的模糊基. Π 的全部模糊基组成集族称为 Π 的模糊基集，记为 Θ. 若 $\mu \in F(E)\backslash\Psi$, 任意的 $x \in \mathrm{supp}(\mu)$, 都有 $\mu\backslash x \in \Psi$, 则称 μ 是 Π 的模糊圈. Π 的全体模糊圈组成的集族称为 Π 的模糊圈集，记为 Ξ. 若 μ 是 Π 的模糊圈且 $|\mathrm{supp}\mu| = 1$, 则称 μ 是 Π 的模糊环. 若 μ 是 Π 的模糊圈又是初等模糊集，则称 μ 是 Π 的初等模糊圈.

我们定义函数， $\rho : F(E) \to [0, +\infty)$, 任意的 $\mu \in F(E)$, $\rho(\mu) = \sup\{|\nu| | \nu \le \mu, \nu \in \Psi\}$. 其中 $|\nu| = \sum_{x \in E} \nu(x)$. 称 ρ 是 Π 的模糊秩函数. 易证： $\mu \in \Psi \Leftrightarrow \rho(\mu) = |\mu|$.

引理 1.2[2] 设有模糊拟阵 $\Pi = (E, \Psi), r \in (0,1]$, 令 $I_r = \{C_r(\mu) | \forall \mu \in \Psi\}$, 易证 $M_r = (E, I_r)$ 都是 E 上的拟阵. 但 E 是有限集，所以只有有限个不同的拟阵. 由此，可以得出结论，存在一个有限序列 $r_0 < r_1 < \cdots < r_n$, 使

1) $r_0 = 0, r_n \le 1$;

2) 当 $0 < s \le r_n$ 时， $I_s \ne \emptyset$; 当 $s > r_n$ 时， $I_s = \emptyset$;

3) 若 $s, t \in (r_i, r_{i+1})$, 则 $I_s = I_t$ $(0 \le i \le n-1)$;

4) 若 $r_i < s < r_{i+1} < t < r_{i+2}$, 则 $I_s \supset I_t$ $(0 \le i \le n-2)$,

我们称序列 $r_0 < r_1 < \cdots < r_n$ 为 Π 的基本序列.

对 $1 \le i \le n$, 设 $r'_i = (r_i + r_{i+1})/2$, 称子拟阵序列 $M_{r'_1} \supset M_{r'_2} \supset \cdots \supset M_{r'_n}$ 为 Π 的导出拟阵列. 若 $M_{r'_i} = M_{r_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, 则称 Π 是闭模糊拟阵.

引理 1.3[5] 设 $\Pi = (E, \Psi)$ 是闭模糊拟阵， $0 = r_1 < r_2 < \cdots < r_n \le 1$ 是基本序列， $M_{r_1} \supset \cdots \supset M_{r_n}$ 为其导出拟阵序列， $\mu \in F(E)$, 则 μ 是 Π 的一个模糊基 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{supp}(\mu)$ 是 M_{r_1} 的基， $C_{r_i}(\mu)$ 是 $\mathrm{supp}(\mu)$ 在 M_{r_1} 中的极大独立子集，而且 $R^+(\mu) \subseteq \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$.

2 圈好模糊拟阵与准模糊图拟阵

定义 2.1[6] 设 $\Pi = (E, \Psi)$ 是模糊拟阵， $M_n \subset \cdots \subset M_2 \subset M_1$ 为基导出拟阵序列. 若 $C \subseteq E$ 是 M_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ 的非环圈，则 C 也是 M_1 的非环圈. 那么称 Π 是圈好模糊拟阵.

定义 2.2[4] 我们称闭的圈好模糊拟阵为准模糊图拟阵.

引理 2.1[4] (模糊基公理) 设 E 为有限集, $\Theta \subseteq F(E)$, 则 Θ 是准模糊图拟阵的模糊基集 $\Leftrightarrow \Theta$ 满足下列条件:

1) 任意的 $\mu_1, \mu_2 \in \Theta$, 若 $\mu_1 \leq \mu_2$, 则 $\mu_1 = \mu_2$;

2) 任意的 $\mu_1, \mu_2 \in \Theta$, 都有 $|\mathrm{supp}\mu_1| = |\mathrm{supp}\mu_2|$;

3) 任意的 $\mu_1, \mu_2 \in \Theta$, 任意的 $e \in \mathrm{supp}\mu_1$, 都有 $e' \in \mathrm{supp}\mu_2$, 使 $(\mu_1\backslash e)\|_{\mu_2}e' \in \Theta$, 其中 $(\mu_1\backslash e)\|_{\mu_2}e' = \begin{cases} \mu_1, & x \in E\backslash e, \\ \mu_2, & x = e'. \end{cases}$

3 准模糊图拟阵基的交换

设 $\Pi = (E, \Psi)$ 是准模糊图拟阵, μ_1, μ_2 是 Π 的两个基, 由引理 2.1 知可以交换 $\mathrm{supp}\mu_1$ 与 $\mathrm{supp}\mu_2$ 的元素, 即下面的定理成立:

定理 3.1 设 $\Pi = (E, \Psi)$ 是准模糊图拟阵, E 为有限集, Θ 是准模糊图拟阵的模糊基集, $\mu_1 \neq \mu_2$ 是 Π 的基, 则对任意的 $e \in \mathrm{supp}\mu_1$, 存在 $e' \in \mathrm{supp}\mu_2$, 使 $(\mu_1\backslash e)\|_{\mu_2}e'$ 是 Π 的基.

证明 由引理 2.1 即可得出.

定理 3.2 设 $\Pi = (E, \Psi)$ 是准模糊图拟阵, 基本序列是 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leq 1$, 导出拟阵序列为 $M_{r_1} \supset M_{r_2} \supset \cdots \supset M_{r_n}$, E 为有限集, Θ 是准模糊图拟阵的模糊基集, μ 是 Π 的基, ν 是 Π 的模糊集, 但不一定为基, 设 $b_1, b_2 \in \mathrm{supp}\mu$, $a_1, a_2 \notin \mathrm{supp}\mu$, $\nu(a_1) = \lambda_1$, $\nu(a_2) = \lambda_2$ (且 $\mu\backslash b_1\|_\nu a_1 \in \Theta, \mu\backslash b_2\|_\nu a_2 \in \Theta$, 而 $(\mathrm{supp}\mu\backslash b_1) \cup a_2$ 和 $(\mathrm{supp}\mu\backslash b_2) \cup a_1$ 至少有一个不是 M_{r_1} 的基, 则: $\mu\backslash\{b_1, b_2\}\|_\nu\{a_1, a_2\} \in \Theta$. 这时可称 $\{b_1, b_2\}, \{a_1, a_2\}$ 为双可行交换.

证明 不防设 $(\mathrm{supp}\mu\backslash b_1) \cup a_2$ 不是 M_{r_1} 的基. 因为 Π 的基本序列是 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leq 1$, 导出拟阵序列为 $M_{r_1} \supset M_{r_2} \supset \cdots \supset M_{r_n}$, 由极大性知, $\mathrm{supp}\mu$ 是 M_{r_1} 的基, 而 $a_1, a_2 \notin \mathrm{supp}(\mu)$, 则 $\mathrm{supp}\mu \cup a_2$ 是 M_{r_1} 的圈, 记此圈为 C, 因为 $\mathrm{supp}\mu\backslash b_1 \cup a_2$ 不是 M_{r_1} 的基, 则 $b_1 \notin C$. 又 $\mu\backslash b_1\|_\nu a_1 \in \Theta, \mu\backslash b_2\|_\nu a_2 \in \Theta$, 所以 $\mathrm{supp}\mu\backslash b_1 \cup a_1$ 和 $\mathrm{supp}\mu\backslash b_2 \cup a_2$ 是 M_{r_1} 的基, 知 $b_2 \in C$, 故 $\mathrm{supp}\mu\backslash b_1 \cup a_1 \cup a_2$ 仍含圈 C, 又 $b_2 \in C$, 于是 $(\mathrm{supp}\mu\backslash b_1 \cup a_1)\backslash b_2 \cup a_2$ 是 M_{r_1} 的基, 由引理 1.3 知, 有 $\mu' \in \Theta$, 使 $\mathrm{supp}\mu' = X$. 再由引理 2.1 知:

$$\mu' = \begin{bmatrix} \mu(x) & x \in E\backslash(b_1 \cup b_2) \\ \lambda_1 & x = a_1 \\ \lambda_2 & x = a_2 \\ 0 & x = b_2 \\ 0 & x = b_1 \end{bmatrix} = \mu\backslash\{b_1, b_2\}\|_v\{a_1, a_2\}.$$

定理 3.3 设 $\Pi = (E, \Psi)$ 是准模糊图拟阵, E 为有限集, Θ 是准模糊图拟阵的模糊基集, 设 μ_1, μ_2 是 $\Pi = (E, \Psi)$ 的两个不同的基, 且 $\mathrm{supp}\mu_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_t, g_{t+1}, \ldots, g_r\}$, $\mathrm{supp}\mu_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_t, g_{t+1}, \ldots, g_r\}$, 其中对任意的 $1 \leq i, j \leq t$ 有 $e_i \neq f_j, 1 \leq t \leq r$, 则存在 $f_1, f_2, \ldots, f_t$ 的一个排列 $f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_t}$, 使 $\mu_1\backslash e\|_{\mu_2}f_{j_k} \in \Theta, k = 1, 2, \ldots, t$.

证明 设 $\Pi = (E, \Psi)$ 的基本序列是 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leq 1$, 导出拟阵序列为 $M_{r_1} \supset M_{r_2} \supset \cdots \supset M_{r_n}$, 又极大性知, $\mathrm{supp}\mu_1, \mathrm{supp}\mu_2$ 是 M_{r_1} 的基, 则 $\mathrm{supp}\mu_1 \cup \{f_i\}$ 是 M_{r_1} 的圈, 记为 $C_i = C(f_i, \mathrm{supp}\mu_1), 1 \leq i \leq t$. 证明, 对 $k = 1, 2, \ldots, t$ 有

$$\rho(\cup_{i=1}^k C_i) \leq |\cup_{i=1}^k C_i| - k, \tag{1}$$

其中 ρ 是导出拟阵 M_{r_1} 的秩函数. 当 $k=1$ 时，显然 $\rho(C_1)\le |C_1|-1$. 假设 (1) 式对 $k-1$ 成立，往证它对 k 亦成立. 记 $A=\cup_{i=1}^{k-1}C_i$. 由归纳法假定 $\rho(A)\le |A|-k+1$. 我们断言 $C_k\cap A$ 是 C_k 的真子集. 若不然，则 $C_k\subseteq A$. 于是存在某个 $i, 1\le i\le k-1$, 使 $f_k\in C_i$, 这与 C_i 的定义矛盾. 于是 $C_k\cap A$ 是 M_{r_1} 的独立集. 由秩函数的子模性知

$$\begin{aligned}\rho(\cup_{i=1}^{k}C_i)&=\rho(A\cup C_k)\le\rho(A)+\rho(C_k)-\rho(A\cap C_k)\le |A|-k+1+|C_k|-1-|A\cap C_k|\\&=|A\cup C_k|-k=|\cup_{i=1}^{k}C_i|-k.\end{aligned}$$

于是 (1) 式成立.

令 $X=\{f_1,f_2,\dots,f_t\}, Y=\{e_1,e_2,\dots,e_t\}$. 作二分图 $G=(X,Y,E)$ 使边 $f_ie_j\in E$ 当且仅当 $e_j\in C(f_i,B_1)=C_i$. 我们说明图 G 有一个完美匹配. 若不然，由 Hall 定理，必存在 $X_0\subseteq X$, 使 $|\delta X_0|<|X_0|$. 不失一般性，设 $X_0=\{f_1,f_2,\dots,f_k\}, 1\le k\le t$. 易见 $\delta X_0\subseteq\cup_{i=1}^{k}C_i$. 令 $C=(\cup_{i=1}^{k}C_i)\backslash\delta X_0$, 由 (1) 式知

$$\rho(C)\le\rho(\cup_{i=1}^{k}C_i)\le|\cup_{i=1}^{k}C_i|-k=|\cup_{i=1}^{k}C_i|-|X_0|<|\cup_{i=1}^{k}C_i|-|\delta X_0|=|C|.$$

于是 C 是 M_{r_1} 的相关集. 但显然 $C\subseteq\mathrm{supp}\mu_2$, 矛盾. G 有完美匹配，设 G 的完美匹配为 $\{e_1f_{i_1},e_2f_{i_2},\dots,e_tf_{i_t}\}$, 则由 G 的定义知 $\mu_1\backslash e\|_{\mu_2}f_{j_k}\in\Theta, 1\le k\le t$. □

推论 3.1 设 $\Pi=(E,\Psi)$ 是准模糊图拟阵，E 为有限集，Θ 是准模糊图拟阵的模糊基集，设 μ_1,μ_2 是 $\Pi=(E,\Psi)$ 的两个不同的基，则存在一个双射 $f':\mathrm{supp}\mu_1\to\mathrm{supp}\mu_2$, 使对所有的 $e\in\mathrm{supp}\mu_1, (\mu_1\backslash e)\|_{\mu_2}f'(e)$ 是 Π 的一个基.

此推论即定理 3.3.

推论 3.2 设 $\Pi=(E,\Psi)$ 是准模糊图拟阵，E 为有限集，Θ 是准模糊图拟阵的模糊基集，若 μ_1,μ_2 是 $\Pi=(E,\Psi)$ 的两个不同的基，且 $\mathrm{supp}\mu_1\cap\mathrm{supp}\mu_2\ne\Phi, S_1\subseteq\mathrm{supp}\mu_1$, 则存在 $S_2\subseteq\mathrm{supp}\mu_2$ 使 $(\mu_1\backslash S_1)\|_{\mu_2}S_2$ 和 $(\mu_2\backslash S_2)\|_{\mu_1}S_1$ 是 Π 的基.

证明 设 $\Pi=(E,\Psi)$ 的基本序列是 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n\le 1$, 导出拟阵序列为 $M_{r_1}\supset M_{r_2}\supset\cdots\supset M_{r_n}$, 由极大性知，$\mathrm{supp}\mu_1,\mathrm{supp}\mu_2$ 是 M_{r_1} 的基. 若 $\rho(M_{r_1})=1$, 显然定理成立. 若 $\rho(M_{r_1})<k$ 时定理成立，证明 $\rho(M_{r_1})=k>1$ 时定理也成立. 令 $T=E\backslash(\mathrm{supp}\mu_1\cap\mathrm{supp}\mu_2)$, $M'=M_{r_1}\cdot T$, 显然，$\rho(M')<k$. 令 $A_1=\mathrm{supp}\mu_1\backslash\mathrm{supp}\mu_2$. $A_2=\mathrm{supp}\mu_2\backslash\mathrm{supp}\mu_1$, $S_1'=S_1\backslash\mathrm{supp}\mu_2$. 由 M' 的定义知，A_1, A_2 是 M' 的独立集. 由归纳法假定，存在 $S_2'\subseteq A_2$, 使 $(A_1\backslash S_1')\cup S_2'$, $(A_2\backslash S_2')\cup S_1'$ 是 M' 的独立集. 令 $S_2=S_2'\cup(S_1\cap\mathrm{supp}\mu_2)$, 则 $S_2\subseteq\mathrm{supp}\mu_2$, 我们证明 $(\mathrm{supp}\mu_1\backslash S_1)\cup S_2$ 是 M_{r_1} 的基. 定义 $X=(A_1\backslash S_1')\cup S_2'\cup(\mathrm{supp}\mu_1\cap\mathrm{supp}\mu_2)$, 显然 X 是 M_{r_1} 的基. 但

$$\begin{aligned}X&=(A_1\backslash S_1')\cup S_2'\cup(\mathrm{supp}\mu_1\cap\mathrm{supp}\mu_2)=(A_1\cup(\mathrm{supp}\mu_1\cap\mathrm{supp}\mu_2)\backslash S_1'\cup S_2'\\&=(\mathrm{supp}\mu_1\backslash S_1')\cup S_2'=A_1\backslash(S_1'\cup(S_1\cup\mathrm{supp}\mu_2)\cup S_2'\cup(S_1\cap\mathrm{supp}\mu_2)\\&=(\mathrm{supp}\mu_1\backslash S_1)\cup S_2,\end{aligned}$$

所以由引理 1.3 知，有 $\mu_3\in\Theta$, 使 $\mathrm{supp}\mu_3=X$. 再由引理 2.1 知：

$$\mu_3(x)=\begin{bmatrix}\mu_1(x) & x\in E\backslash S_1\\ \mu_2(x) & x\in S_2\\ 0 & x\in S_1\end{bmatrix}=(\mu_1\backslash S_1)\|_{\mu_2}S_2.$$

同理可证 $(\mu_2\backslash S_2)\|_{\mu_1}S_1$ 是 Π 的基.

推论 3.3 设 $\Pi=(E,\Psi)$ 是准模糊图拟阵, E 为有限集, Θ 是准模糊图拟阵的模糊基集, 设 μ 是准模糊图拟阵 Π 的一个基, $S_1=\{e_1,\ldots,e_k\}\subseteq \mathrm{supp}\mu$, μ' 是准模糊图拟阵的模糊集, 且 $\mathrm{supp}\mu'=S_2=\{a_1,\ldots,a_k\}\notin \mathrm{supp}\mu$. 若对任意的 $i\in\{1,\ldots,k\}$, 有 $e_i\in C(\mathrm{supp}\mu,a_i)$, 而当 $j<i$ 时, $e_i\notin C(\mathrm{supp}\mu,a_j)$. 其中 $C(\mathrm{supp}\mu,a_i)$ 是 $\mathrm{supp}\mu\cup a_i$ 所含的圈. 则 $\mu\backslash S_1\|_{\mu'}S_2$ 是 Π 的基.

证明 当 $k=1$ 时, 显然定理成立. 若 $k=n-1$ 时定理成立, 我们证明 $k=n>1$ 时定理亦成立. 设 $\Pi=(E,\Psi)$ 的基本序列是 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leq 1$, 导出拟阵序列为 $M_{r_1}\supset M_{r_2}\supset\cdots\supset M_{r_n}$, 由极大性知, $\mathrm{supp}\mu$ 是 M_{r_1} 的基. 令 $\mu_1=\mu\backslash e_n\|_{\mu'}a_n$, 显然 μ_1 是 Π 的基. 令 $S_1'=\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}\}$, $S_2'=\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\}$, 则 $S_1'\subseteq\mathrm{supp}\mu_1$, $S_2'\notin\mathrm{supp}\mu$. 且对 $1\leq i\leq n-1$, $e_i\in C(\mathrm{supp}\mu_1,a_i)$. 而当 $j<i$ 时, $e_i\notin C(\mathrm{supp}\mu_1,a_j)$. 由归纳法假定, $\mu_1\backslash S_1'\|_{\mu'}S_2'$ 是 Π 的基, 即 $\mu\backslash S_1\|_{\mu'}S_2=\mu\backslash(S_1'\cup e_n)\|_{\mu'}(S_2'\cup a_2)=\mu'\backslash S_1'\|_{\mu'}S_2'$ 是 Π 的基.

由推论 3.3 易见下面的推论成立.

推论 3.4 设 $\Pi=(E,\Psi)$ 是准模糊图拟阵, E 为有限集, Θ 是准模糊图拟阵的模糊基集, μ_1, μ_2 是准模糊图拟阵 $\Pi=(E,\Psi)$ 的两个基且 $S_1=\{e_1,\ldots,e_k\}\subseteq\mathrm{supp}\mu_1\backslash\mathrm{supp}\mu_2$, $S_2=\{a_1,\ldots,a_k\}\subseteq\mathrm{supp}\mu_2\backslash\mathrm{supp}\mu_1$. 若对任意的 i 有 $e_i\in C(\mathrm{supp}\mu_1,\ a_i)$, 而当 $j<i$ 时 $e_i\notin C(a_i,\mathrm{supp}\mu_1)$ 且 $a_i\in C(e_i,\mathrm{supp}\mu_2)$, 而当 $j<i$ 时, $a_i\notin C(e_j,\mathrm{supp}\mu_2)$, 其中 $C(\mathrm{supp}\mu,a_i)$ 是 $\mathrm{supp}\mu\cup a_i$ 所含的圈. 则 $\mu_1\backslash S_1\|_{\mu_2}S_2$ 和 $\mu_2\backslash S_2\|_{\mu_1}S_1$ 是 Π 的基.

参考文献:

[1] WELSH D J A. *Matroid Theory* [M]. Academic Press, London, 1976.

[2] GOETSCHEL R JR, VOXMAN W. *Fuzzy matroids* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, **27**: 291–302.

[3] GOETSCHEL R JR, VOXMAN W. *Fuzzy circuits* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, **32**: 35–43.

[4] 吴德垠. 准模糊图拟阵 [J]. 重庆大学学报 (自然科学版), 1996, **19**(3): 100–109.
WU De-yin. *Quasi-Fuzzy graph matroids* [J]. J. Chongqing Univ. (Natural Sci.), 1996, **19**(3): 100–109. (in Chinese)

[5] GOETSCHEL R JR, VOXMAN W. *Bases of fuzzy matroids* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, **31**: 253–261.

[6] 吴德垠. 模糊图拟阵 [J]. 重庆大学学报 (自然科学版), 1996, **19**(4): 44–48.
WU De-yin. *Fuzzy graphic matroids* [J]. J. Chongqing Univ. (Natural Sci.), 1996, **19**(4): 44–48. (in Chinese)

Basic Exchange of Quasi-Fuzzy Graph Matroids

LIU Wen-bin

(Department of Basic Courses, Academy of Command Communication, Wuhan 430010, China)

Abstract: This paper discusses basic exchange theorems of the quasi-fuzzy graph matroids, and gives some properties of the quasi-fuzzy matroids.

Key words: matroid; fuzzy matroid.