文章编号: 1000-341X(2007)03-0554-09 **文献标识码**: **A**

多圆盘上对偶 Toeplitz 算子的性质

卢玉峰, 尚书霞
(大连理工大学应用数学系，辽宁 大连 116024)
(E-mail: lyfdlut@dlut.edu.cn)

摘 要: 本文研究了多圆盘上对偶 Toeplitz 算子的有界性、紧性和谱的特征.

关键词: 对偶 Toeplitz 算子; 有界性; 紧性; 谱.
MSC(2000): 47B35; 47B47
中图分类: O177.3

1 引 言

设 D 是复平面 C 上的单位圆盘，对于一个固定的正整数 $n \geq 1$, 单位多圆盘 D^n 是单位圆盘 D 的 n 重笛卡尔积. $\mathrm{d}V$ 是 D^n 上使得 D^n 的测度等于 1 的正规化 Lebesgue 测度. 对 $p \in [1,\infty]$, $L^p = L^p(D^n, \mathrm{d}V)$ 是 D^n 上 (关于测度 $\mathrm{d}V$) p 次可积的 Lebesgue 可测函数全体的 Banach 空间 (L^∞ 是 D^n 上本性有界可测函数). Bergman 空间 $L_a^2(D^n)$ 是由 L^2 中全纯函数组成的闭子空间. P 表示 L^2 到 $L_a^2(D^n)$ 上的 Bergman 正交投影, 记 $Q = I - P$. 给定函数 $f \in L^\infty$, Toeplitz 算子 $T_f : L_a^2(D^n) \to L_a^2(D^n)$ 和对偶 Toeplitz 算子 $S_f : (L_a^2(D^n))^\perp \to (L_a^2(D^n))^\perp$ 分别定义为

$$T_f h = P(fh), h \in L_a^2(D^n),$$

$$S_f u = (I - P)(fu), u \in (L_a^2(D^n))^\perp.$$

显然它们都是有界线性算子.

尽管对偶 Toeplitz 算子在许多方面不同于 Toeplitz 算子, 但是们它们也有一些相同的性质. K. Stroethoff 和 D. Zheng 研究了单位圆盘上对偶 Toeplitz 算子的代数性质和谱性质 [1]. 本文第一作者在 n 维复空间 C^n 的单位球上刻画了以多重调和函数为符号的对偶 Toeplitz 算子的交换性 [2]. 最近我们又得到了多圆盘上以一般的函数为符号的对偶 Toeplitz 算子的交换、本性交换和本性半交换等性质 [3]. 本文主要刻画多圆盘上对偶 Toeplitz 算子的有界性、紧性和谱特征.

首先我们需要下列有关 Bergman 空间的基本事实.

Toeplitz 算子和对偶 Toeplitz 算子的性质与 Hankel 算子的性质紧密相连. 任给 D^n 上有界可测函数 f, Hankel 算子 $H_f : L_a^2(D^n) \to (L_a^2(D^n))^\perp$ 定义为

$$H_f h = (I - P)(fh) = Q(fh), h \in L_a^2(D^n).$$

收稿日期: 2005-12-12; **接受日期**: 2006-07-03
基金项目: 国家自然科学基金 (10671028).

在分解 $L^2 = L_a^2(D^n) \oplus (L_a^2(D^n))^\perp$ 下，任给一个有界可测函数 $f \in L^\infty$, 乘法算子 M_f 可以表示为

$$M_f = \begin{bmatrix} T_f & H_{\bar{f}}^* \\ H_f & S_f \end{bmatrix}.$$

由恒等式 $M_{fg} = M_f M_g$ 可知，这些算子间存在着如下的关系：

$$T_{fg} = T_f T_g + H_{\bar{f}}^* H_g, \tag{1.1}$$

$$S_{fg} = S_f S_g + H_f H_{\bar{g}}^*, \tag{1.2}$$

$$H_{fg} = H_f T_g + S_f H_g. \tag{1.3}$$

对函数 $f, g \in L^2$, 我们定义秩为一的算子 $f \otimes g$ 为

$$(f \otimes g)h = \langle h, g \rangle f, h \in L^2.$$

容易验证算子 $f \otimes g$ 的范数是 $\|f\|\|g\|$. 若 A 与 B 都是有界线性算子，则

$$A(f \otimes g)B^* = (Af) \otimes (Bg).$$

设 $w \in D^n$, 酉算子 U_w 定义为 $U_w f = (f \circ \varphi_w) k_w$. 由于酉算子 U_w 在空间 $L_a^2(D^n)$ 上是自伴的，我们可以得到，对任意的函数 $f \in L^\infty$ 都有 $U_w T_f U_w = T_{f \circ \varphi_w}$.

对于任意的多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 我们有下面的记号

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad C_{2,\alpha} = (-1)^{|\alpha|} \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

这里任一 α_k 都是非负整数．对于任意的 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in D^n$, 也有记号 $z^\alpha = {z_1}^{\alpha_1} \cdots {z_n}^{\alpha_n}$.

设 $\lambda \in D$, 定义 D 上的分式线性变换 φ_λ 为： $\varphi_\lambda(z) = \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda} z}$. 每一个 φ_λ 都是圆盘上一个自同构，事实上， $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_\lambda$. 设 $w = (w_1, \ldots, w_n) \in D^n$, 定义多圆盘上的映射 φ_w 为

$$\varphi_w(z) = (\varphi_{w_1}(z_1), \ldots, \varphi_{w_n}(z_n)).$$

易证 φ_w 是 D^n 上的一个自同构.

对 $z, w \in D^n$, Bergman 空间 $L_a^2(D^n)$ 的再生核是

$$K_w(z) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1 - \bar{w}_j z_j)^2}.$$

若用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 Bergman 空间 $L_a^2(D^n)$ 中的内积，那么 $\langle h, K_w \rangle = h(w)$, $h \in L_a^2(D^n), w \in D^n$. 特别地有

$$\|K_w\| = \langle K_w, K_w \rangle^{\frac{1}{2}} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - |w_j|^2}.$$

在本文中 $\|\cdot\|$ 表示 L^2 中的范数．函数

$$k_w(z) = \prod_{j=1}^n \frac{1 - |w_j|^2}{(1 - \bar{w}_j z_j)^2}$$

是 Bergman 空间 $L_a^2(D^n)$ 的正规化再生核. 由再生性可知，正交投影 P 可以描述为

$$Pf(z)=\int_{D^n} f(w)\overline{K_z(w)}\mathrm{d}V(w), z\in D^n.$$

对空间 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 上的有界线性算子 T 和 $w\in D^n$, 我们定义变换 $\mathcal{L}_w(T)$ 为

$$\mathcal{L}_w(T)=\sum_{|\alpha|=0}^{2n} C_{2,\alpha}S_{\varphi_w^\alpha}TS_{\bar{\varphi}_w^\alpha}.$$

2 有界和紧的对偶 Toeplitz 算子

对 $f\in L^2(D^n,\mathrm{d}V)$, 对偶 Toeplitz 算子 S_f 定义为

$$S_fu=Q(fu), u\in (L_a^2(D^n))^\perp\bigcap L^\infty(D^n,\mathrm{d}V),$$

且此定义是稠密的. 在这一节我们将刻画有界和紧的对偶 Toeplitz 算子的一些特性.

$\mathcal{X}_{w+sD^n}$ 表示 $w+sD^n$ 上的特征函数. 对 $w\in D^n$ 和 $0<s<\min\{1-|w_i|:1\le i\le n\}$, 定义 D^n 上的函数 $g_{w,s}$ 为 $g_{w,s}(z)=\overline{(z_1-w_1)}\mathcal{X}_{w+sD^n}(z)$, $z\in D^n$. 对每一个多重指标 α,

$$\int_{D^n} z^\alpha\overline{g_{w,s}(z)}\mathrm{d}V(z)=\int_{sD^n}(z+w)^\alpha z_1\mathrm{d}V(z)=0.$$

因此 $g_{w,s}\in (L_a^2(D^n))^\perp$, 从而 $\overline{(z_1-w_1)}g_{w,s}\in (L_a^2(D^n))^\perp$. 定义 $u_{w,s}=\frac{g_{w,s}}{\|g_{w,s}\|}$, 显然 $u_{w,s}$ 是空间 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 中的单位向量.

定理 2.1 对 $w\in D^n$ 和 $0<s<\min\{1-|w_i|:1\le i\le n\}$, 当 $s\to 0^+$ 时，函数 $u_{w,s}$ 在空间 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 中弱趋向于 0.

证明 对 $\psi\in L^2(D^n,\mathrm{d}V)$, 运用 Cauchy–Schwarz 不等式，可以得到

$$|\langle\psi,g_{w,s}\rangle|=|\int_{w+sD^n}\psi(z)\overline{g_{w,s}(z)}\mathrm{d}V(z)|\le\|g_{w,s}\|\big(\int_{w+sD^n}|\psi(z)|^2\mathrm{d}V(z)\big)^{1/2}.$$

故

$$|\langle\psi,u_{w,s}\rangle|\le\big(\int_{w+sD^n}|\psi(z)|^2\mathrm{d}V(z)\big)^{1/2}.$$

从而可知当 $s\to 0^+$ 时，函数 $u_{w,s}$ 在 $L^2(D^n,\mathrm{d}V)$ 中弱趋向于 0, 更有 $u_{w,s}$ 在 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 中弱趋向于 0. □

引理 2.2 设 $f\in L^2(D^n,\mathrm{d}V)$, 则对每个 $w\in D^n$ 都有 $\lim_{s\to 0^+}\|H_f^*u_{w,s}\|=0$.

此引理可以类似于文献 [1] 中引理 7.1 给出证明，在此证明省略.

下面的引理 2.3 在本文中将多次用到，其证明类似于文献 [1] 中引理 7.2.

引理 2.3 若 $f\in L^2(D^n,\mathrm{d}V)$, 则对几乎所有的 $w\in D^n$ 有 $|f(w)|=\lim_{s\to 0^+}\|S_fu_{w,s}\|$.

对 $f\in L^2(D^n,\mathrm{d}V)$, 我们考虑分别在 $L_a^2(D^n)$ 和 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 上稠密定义的 Toeplitz 算子 T_f 和对偶 Toeplitz 算子 S_f. 众所周知，存在无界的函数 f, 使得以此函数为符号的 Toeplitz 算子 T_f 在 $L_a^2(D^n)$ 上是有界的. 对于对偶 Toeplitz 算子，我们有下面的结论.

定理 2.5 若 $f\in L^2(D^n,\mathrm{d}V)$, 则 S_f 是有界算子当且仅当 $f\in L^\infty(D^n)$, 且此时有 $\|S_f\|=\|f\|_\infty$.

证明 充分性显然. 若 $f\in L^\infty(D^n,\mathrm{d}V)$, 则 S_f 有界且 $\|S_f\|\le\|f\|_\infty$. 为了证明必要性, 我们设 S_f 是有界的, 则对所有的 $w\in D^n$ 和 $0<s<\min\{1-|w_i|:1\le i\le n\}$ 都有 $\|S_f u_{w,s}\|\le\|S_f\|$. 由引理 2.3 可得结论 $\|f\|_\infty\le\|S_f\|$ 成立. □

Brown 和 Halmos 已经证明了 Hardy 空间上的紧的 (全连续的)Toeplitz 算子只有零算子, 对于 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子这个结论显然是不对的. 事实上, 在 Bergman 空间上, 对偶 Toeplitz 算子有与 Toeplitz 算子完全相反的结论.

定理 2.6 若 $f\in L^\infty(D^n,\mathrm{d}V)$, 则 S_f 是紧算子当且仅当 f 在 D^n 上几乎处处等于 0.

证明 由于 $u_{w,s}$ 在 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 中弱趋向于 0, 故若 S_f 是紧算子, 则对每一个 $w\in D^n$, 当 $s\to0^+$ 时, 都有 $\|S_f u_{w,s}\|\to0$. 再由引理 2.3 可知, 对几乎所有的 $w\in D^n$ 有 $f(w)=0$ 成立. □

在本节中, 我们得到了比文献 [3] 中定理 3.1 更一般化的形式.

定理 2.7 设 $f,g\in L^\infty(D^n)$, 若 S_fS_g 是对偶 Toeplitz 算子 S_h 的一个紧摄动, 则对几乎所有的 $w\in D^n$, 都有 $f(w)g(w)=h(w)$ 并且算子 $H_fH_{\bar g}^*$ 是紧的.

证明 假设 $S_fS_g-S_h$ 是紧算子, 则由等式 $S_{fg}=S_fS_g+H_fH_{\bar g}^*$ 可知

$$S_{fg-h}-H_fH_{\bar g}^*=S_fS_g-S_h$$

也是紧算子. 对 $w\in D^n$, 当 $s\to0^+$ 时, $u_{w,s}$ 在 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 中弱趋向于 0, 因此

$$\|(S_{fg-h}-H_fH_{\bar g}^*)u_{w,s}\|\to0.$$

由引理 2.2 又可以得到 $\|H_fH_{\bar g}^*u_{w,s}\|\to0$, 从而 $\|S_{fg-h}u_{w,s}\|\to0$. 再由引理 2.3 可知, 对几乎所有的 $w\in D^n$, 有 $\|S_{fg-h}u_{w,s}\|^2\to|f(w)g(w)-h(w)|^2$. 从而对几乎所有的 $w\in D^n$, 有 $f(w)g(w)-h(w)=0$ 成立, 故我们得到 $S_{fg-h}=0$, 从而也有 $H_fH_{\bar g}^*$ 是紧算子. □

3 对偶 Toeplitz 代数上的符号映射

Hardy 空间集合上 Toeplitz 代数的符号映射在文献 [5] 中第七章已经描述过了. 本节我们主要证明多圆盘上对偶 Toeplitz 代数符号映射的存在性. 符号映射的构造需要用到下面的引理, 其证明类似于文献 [1] 中引理 8.1.

引理 3.1 若算子 S 属于由所有有界对偶 Toeplitz 算子的半换位子构成的闭理想, 则对所有的 $w\in D^n$, 当 $s\to0^+$ 时, 有 $\|Su_{w,s}\|\to0$.

$\mathcal{B}((L_a^2)^\perp)$ 是 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 上所有有界线性算子集合. 若 $\mathcal{F}$ 是 $L^\infty(D^n)$ 的一个子集, 我们用 $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ 来表示 $\mathcal{B}((L_a^2)^\perp)$ 中包含 $\{S_f:f\in\mathcal{F}\}$ 的最小闭子代数. $\mathcal{I}(L^\infty(D^n))$ 是对偶 Toeplitz 代数. 令 $\mathcal{D}$ 是对偶 Toeplitz 代数 $\mathcal{I}(L^\infty(D^n))$ 的半换位子理想. 下面我们要证明存在从 $\mathcal{I}(L^\infty(D^n))$ 到 $L^\infty(D^n)$ 内的一个符号映射.

定理 3.3 存在从对偶 Toeplitz 代数 $\mathcal{I}(L^\infty(D^n))$ 到 $L^\infty(D^n)$ 内的一个 C^*- 收缩同态 ρ , 使得对任意的 $f\in L^\infty(D^n)$, 都有 $\rho(S_f)=f$.

证明 首先定义 ρ 是对偶 Toeplitz 算子的有限积的有限和. 若 $S=\sum_{i=1}^n S_{f_{i1}}S_{f_{i2}}\cdots S_{f_{in_i}}$,

我们定义

$$\rho(S)=\sum_{i=1}^{n} f_{i1}f_{i2}\cdots f_{in_i}.$$

我们必须证明 $\rho(S)$ 是良定义的．假设 S 有另外一种表示： $S=\sum_{i=1}^{m} S_{g_{i_1}}S_{g_{i_2}}\cdots S_{g_{im_i}}$. 令

$$F=\sum_{i=1}^{n} f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{in_i},\quad G=\sum_{i=1}^{m} g_{i_1}g_{i_2}\cdots g_{im_i}.$$

我们只需证明 $F(w)=G(w)$ 在 D^n 上几乎处处成立．易知 $S-S_F$ 和 $S-S_G$ 都在半换位子理想 $\mathcal{D}$ 中，因此 S_F-S_G 也在理想 $\mathcal{D}$ 中．运用引理 3.1 可知对所有的 $w\in D^n$, 都有

$$\lim_{s\to 0^+}\|(S_F-S_G)u_{w,s}\|=0.$$

另一方面，由引理 2.3 我们知道对几乎所有的 $w\in D^n$ 有

$$|F(w)-G(w)|=\lim_{s\to 0^+}\|(S_F-S_G)u_{w,s}\|.$$

因此，对几乎所有的 $w\in D^n$ 都有 $F(w)=G(w)$, 从而 $\rho(S)$ 是良定义的.

对任意的 $S\in\mathcal{I}(L^\infty(D^n))$ 和给定的正整数 k, 都存在对偶 Toeplitz 算子有限积的有限和 F_k 使得 $\|S-F_k\|<1/k$. 从证明的第一部分可知， $\rho(F_k)$ 是良定义的．由

$$\|\rho(F_k)-\rho(F_m)\|_\infty\le\|F_k-F_m\|$$

可知 $\{\rho(F_k)\}$ 是 $L^\infty(D^n)$ 中的一个 Cauchy 序列．设 $\rho(S)$ 是 Cauchy 序列 $\{\rho(F_k)\}$ 在 $L^\infty(D^n)$ 中的极限．易证 $\rho(S)$ 与序列 $\{F_k\}$ 的选择无关.

显然映射 ρ 是线性的，且易证 $\rho(S^*)=\overline{\rho(S)}$. 为了证明 ρ 是收缩的，我们只需证明对 S 是对偶 Toeplitz 算子有限积的有限和，有 $\|\rho(S)\|_\infty\le\|S\|$. 记 $F=\rho(S)$, 则算子 $D=S-S_F$ 在半换位子理想 $\mathcal{D}$ 中，故由引理 3.1 得到，当 $s\to 0^+$ 时， $\|Du_{w,s}\|\to 0$. 再运用引理 2.3 得到，对几乎所有的 $w\in D^n$, 都有

$$\|S\|=\|S_F+D\|\ge\lim_{s\to 0^+}\|(S_F+D)u_{w,s}\|=|F(w)|,$$

从而 $\|\rho(S)\|_\infty=\|F\|_\infty\le\|S\|$.

要证明 ρ 是一个 C^*- 代数同态，只需证明对对偶 Toeplitz 算子有限积形式的算子 S 和 T 都有 $\rho(ST)=\rho(S)\rho(T)$. 由命题 3.2 我们可以证明对 $f_1,\dots,f_n\in L^\infty(D^n)$, 有

$$\rho(S_{f_1}\cdots S_{f_n})=\rho(S_{f_1})\cdots\rho(S_{f_n})$$

成立，从而得证. □

我们称 ρ 是对偶 Toeplitz 代数 $\mathcal{I}(L^\infty(D^n))$ 上的符号映射．对 $f\in L^\infty(D^n)$, 定义映射 $\xi: L^\infty(D^n)\to\mathcal{B}((L_a^2)^\perp)$ 为 $\xi(f)=S_f$.

定理 3.4 设 $\mathcal{D}$ 是对偶 Toeplitz 代数 $\mathcal{I}(L^\infty(D^n))$ 中的半换位子理想，则由 ξ 诱导的映射 $\bar{\xi}: L^\infty(D^n)\to\mathcal{I}(L^\infty(D^n))/\mathcal{D}$ 是一个 $*$- 等距同构．因此对等距截面 ξ, 都存在一个短正合序列

$$(0)\to\mathcal{D}\to\mathcal{I}(L^\infty(D^n))\xrightarrow{\rho}L^\infty(D^n)\to(0).$$

证明 映射 $\bar{\xi}$ 显然是线性收缩的. 对函数 $f, g \in L^\infty(D^n)$, 有算子

$$\xi(f)\xi(g) - \xi(fg) = S_f S_g - S_{fg}$$

在半换位子理想 $\mathcal{D}$ 中. 因此映射 $\bar{\xi}$ 在 $L^\infty(D^n)$ 上是乘法的.

为了证明映射 $\bar{\xi}$ 是等距的，我们需要证明对 $f \in L^\infty(D^n)$ 和 $K \in \mathcal{D}$, 有 $\|S_f + K\| \geq \|S_f\|$ 成立. 由于 $\|S_f\| = \|f\|_\infty$, 故我们只需证明 $\|S_f + K\| \geq \|f\|_\infty$. 由于 K 在半换位子理想中，由定理 3.1 可知对所有的 $w \in D^n$, 有 $\lim_{s\to 0^+}\|Ku_{w,s}\| = 0$. 由引理 2.3 我们又知道对几乎所有的 $w \in D^n$, 有 $\lim_{s\to 0^+}\|S_f u_{w,s}\| = |f(w)|$. 因此对几乎所有的 $w \in D^n$, 有

$$\|S_f + K\| \geq \lim_{s\to 0^+}\|(S_f + K)u_{w,s}\| = |f(w)|.$$

这样就得到了 $\|S_f + K\| \geq \|f\|_\infty$, 得证. □

下面的引理 3.5 见文献 [3] 中定理 2.1 的证明.

引理 3.5 设 $f, g \in L^\infty$, $w \in D^n$ 则

$$(H_f k_w) \otimes (H_{\bar{g}} k_w) = \mathcal{L}_w(H_f H_{\bar{g}}^*).$$

定理 3.6 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 中的紧算子组成的理想 K 包含于对偶 Toeplitz 代数的半换位子理想 $\mathcal{I}(L^\infty(D^n))$ 中.

证明 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{I}(L^\infty(D^n))$ 的半换位子理想. 首先我们要证明对任意的多重指数 α 和 β, $\mathcal{D}$ 都包含秩一的算子 $\bar{z}^\alpha \otimes \bar{z}^\beta$.

作为引理 3.5 的一个特殊情况，我们有

$$\begin{aligned}\bar{z}^\alpha \otimes \bar{z}^\beta &= (H_{\bar{z}^\alpha}1) \otimes (H_{\bar{z}^\beta}1) = H_{\bar{z}^\alpha}(1 \otimes 1)H_{\bar{z}^\beta}^* = \mathcal{L}_0(H_{\bar{z}^\alpha}H_{\bar{z}^\beta}^*)\\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{2n} C_{2,\alpha} S_{z^\alpha} H_{\bar{z}^\alpha} H_{\bar{z}^\beta}^* S_{\bar{z}^\alpha}.\end{aligned}$$

由于 $S_{fg} - S_f S_g = H_f H_{\bar{g}}^*$, 故 $H_{\bar{z}^\alpha}H_{\bar{z}^\beta}^* = S_{\bar{z}^\alpha z^\beta} - S_{\bar{z}^\alpha}S_{z^\beta} \in \mathcal{D}$, 从而 $\bar{z}^\alpha \otimes \bar{z}^\beta$ 在 $\mathcal{D}$ 中.

下面我们将证明集合 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{B}((L_a^2(D^n))^\perp)$ 中是不可约的. 设 $\mathcal{B}((L_a^2(D^n))^\perp)$ 的非零闭子线性空间 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{D}$ 的约化空间. 我们只需证明 $\mathcal{N} = \mathcal{B}((L_a^2(D^n))^\perp)$.

首先我们要证明下面的声明是正确的.

声明 对任意的 $1 \leq i \leq n$, 都有 $\bar{z}_i \in \mathcal{N}$.

证明 由于 $\mathcal{N}$ 是非零的，故可设 φ 是 $\mathcal{N}$ 中一非零函数. 由于函数 $z^\alpha\bar{z}^\beta$ 的线性组合在 $L^2(D^n, \mathrm{d}V)$ 中是稠密的，且 φ 是一个非零函数，故所有的 $z^\alpha\bar{z}^\beta$ 与 φ 都是不正交的. 因此，一定存在多重指数 α, β 使得 $\langle\varphi, z^\alpha\bar{z}^\beta\rangle \neq 0$. 由于 $\varphi \in (L_a^2(D^n))^\perp$ 与函数 z^α 正交，故一定存在正整数 $1 \leq j \leq n$ 使得 $\beta_j > 0$. 对 $\beta^j = (\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, \underset{j}{\beta_j - 1}, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_n)$, 有

$$\langle\varphi, z^\alpha\bar{z}^\beta\rangle\bar{z}_i = \langle\bar{z}^\alpha z^{\beta^j}\varphi, \bar{z}_j\rangle\bar{z}_i = \langle S_{\bar{z}^\alpha z^{\beta^j}}\varphi, \bar{z}_j\rangle\bar{z}_i = (\bar{z}_i \otimes \bar{z}_j)S_{\bar{z}^\alpha z^{\beta^j}}\varphi.$$

由证明的第一部分可知 $\bar{z}_i \otimes \bar{z}_j \in \mathcal{D}$, 又由于 $\mathcal{D}$ 是一个理想，所以 $(\bar{z}_i \otimes \bar{z}_j)S_{\bar{z}^\alpha z^{\beta^j}} \in \mathcal{D}$. 由于 $\mathcal{N}$ 对 $\mathcal{D}$ 中每一个算子都是约化的，故 $\langle\varphi, z^\alpha\bar{z}^\beta\rangle\bar{z}_i \in \mathcal{N}$. 因为 $\langle\varphi, z^\alpha\bar{z}^\beta\rangle \neq 0$, 我们得到 $\bar{z}_i \in \mathcal{N}$, 从而此声明得证.

设 ψ 是 $(L_a^2(D^n))^{\perp}$ 中与 $\mathcal{N}$ 正交的一个函数．假设 β 非零且 $\beta_i>0$, α 是另一个多重指数，则 $(\bar{z}_i\otimes\bar{z}_i)S_{\bar{z}^\alpha z^{\beta^i}}\in\mathcal{D}$. 由于 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{D}$ 的约化空间，故 $\langle\psi,z^\alpha\bar{z}^\beta\rangle\bar{z}_i=(\bar{z}_i\otimes\bar{z}_i)S_{\bar{z}^\alpha z^{\beta^i}}\psi$ 与 $\mathcal{N}$ 是正交的．由于 $\bar{z}_i\in\mathcal{N}$, 我们一定有 $\langle\varphi,z^\alpha\bar{z}^\beta\rangle=0$, 且当 β 是零指数时也是成立的，这是由于 $\psi\in(L_a^2(D^n))^{\perp}$. 所以对任意的多重指数 α 和 β, ψ 与所有的函数 $z^\alpha\bar{z}^\beta$ 都是正交的，故有结论 ψ 在 D^n 上几乎处处为零，因此 $\mathcal{N}=(L_a^2(D^n))^{\perp}$, 从而证明了 $\mathcal{D}$ 是不可约分的.

注意到 $\mathcal{D}$ 包含非零的紧算子 $\bar{z}^\alpha\otimes\bar{z}^\beta=H_{\bar{z}^\alpha}(1\otimes1)H_{\bar{z}^\beta}^*$. 由文献 [5] 中定理 5.39 知， $\mathcal{D}$ 包含 $(L_a^2(D^n))^{\perp}$ 上所有紧算子理想 $\mathcal{K}$. □

定理 3.7 $(L_a^2(D^n))^{\perp}$ 上紧算子理想 $\mathcal{K}$ 是 C^*- 代数 $\mathcal{I}(C(\overline{D^n}))$ 的一个半换位子理想，序列

$$(0)\to\mathcal{K}\to\mathcal{I}(C(\overline{D^n}))\to C(\overline{D^n})\to(0)$$

是一个短正合．也就是说，商代数 $\mathcal{I}(C(\overline{D^n}))/\mathcal{K}$ 是到 $C(\overline{D^n})$ 上的一个 *- 等距同构.

证明 用 $\mathcal{S}$ 表示对偶 Toeplitz 代数 $\mathcal{I}(C(\overline{D^n}))$ 中的半换位子理想，由前面定理证明可知 $\mathcal{K}$ 包含于 $\mathcal{S}$. 对 $\bar{D}$ 上函数 f 和 g, 半换位子

$$S_{fg}-S_fS_g=H_fH_g^*$$

是紧的．由于 $\mathcal{S}$ 是由 $C(\overline{D^n})$ 中的带符号的对偶 Toeplitz 算子的半换位子生成的，故可得到 $\mathcal{S}$ 包含于 $\mathcal{K}$, 因此 $\mathcal{K}$ 等于半换位子理想 $\mathcal{S}$. 得证. □

在文献 [3] 中已经证明了两个对偶 Toeplitz 算子的乘积只有当其中一个算子是零算子时才是零算子．运用符号映射可以得到这个结论的一般形式．事实上，我们可以得到对偶 Toeplitz 算子乘积是紧的必要条件．我们有比定理 2.6 更一般的形式如下：

定理 3.8 设 $f_1,\dots,f_n\in L^\infty(D^n)$, 若 $S_{f_1}S_{f_2}\cdots S_{f_n}$ 是紧算子，则对几乎所有的 $w\in D^n$ 有 $f_1(w)f_2(w)\cdots f_n(w)=0$.

证明 若 $S_{f_1}S_{f_2}\cdots S_{f_n}$ 是紧算子, 则由定理 3.6 可得 $S_{f_1}S_{f_2}\cdots S_{f_n}$ 在半换位子理想 $\mathcal{D}$ 中. 又容易得到 $S_{f_1f_2\cdots f_n}$ 也在 $\mathcal{D}$ 中，故 $\rho(S_{f_1f_2\cdots f_n})=0$, 从而 $f_1f_2\cdots f_n=0$ 在 D^n 上几乎处处成立. □

下面的结果表明以有界调和函数为符号的对偶 Toeplitz 算子的有限积不是零，除非其中有一个对偶 Toeplitz 是零算子． Hardy 空间上的 Toeplitz 算子是否也有相似的结论，这个问题仍然没有解决.

推论 3.9 设 $f_1,f_2,\dots,f_n$ 是 D^n 上有界调和函数，则下面的条件是等价的：

(1) $S_{f_1}S_{f_2}\cdots S_{f_n}$ 是紧算子;

(2) $S_{f_1}S_{f_2}\cdots S_{f_n}=0$;

(3) 存在 D^n 上的一个零函数 f_i.

4 对偶 Toeplitz 算子的谱性质

在本节中我们将讨论对偶 Toeplitz 算子的谱和本质谱.

命题 4.1 设 f 是 $L^\infty(D^n)$ 上一个函数，若 S_f 是可逆的，则 f 在 $L^\infty(D^n)$ 中也是可逆的.

证明 假设对于某个 $\delta>0$, 有 $\|S_fu\|\geq\delta$, 这里 u 是 $(L_a^2(D^n))^{\perp}$ 中范数为 1 的任意函数. 由引理 2.3 可知，对几乎所有的 $w\in D^n$, 都有 $f(w)=\lim_{s\to0^+}\|S_fu_{w,s}\|\geq\delta$. 从而得证. □

若 f 是 D^n 上一个可测函数，则 f 的本性值域 $\mathcal{R}(f)$ 是所有复数 λ 的集合， λ 满足对任意的 $\varepsilon>0$, 都有集合 $\{z\in D^n:|f(z)-\lambda|<\varepsilon\}$ 具有零测度．我们有下面的谱嵌入定理，它完全相似于由 Hartman 和 Wintner 得到的 Hardy 空间中 Toeplitz 算子的谱嵌入定理 (见文献 [5] 中推论 7.7):

定理 4.2　若 f 在 $L^\infty(D^n)$ 中，则 $\mathcal{R}(f)\subset\sigma(S_f)$.

证明　由于对任意的 $\lambda\in\mathbf{C}$, 有 $S_f-\lambda=S_{f-\lambda}$, 运用命题 4.1 就可得到 $\mathcal{R}(f)\subset\sigma(S_f)$.　□

推论 4.3　ξ 是从 $L^\infty(D^n)$ 到 $\mathcal{B}((L_a^2(D^n))^\perp)$ 内的一个等距映射.

证明　运用定理 4.2 和文献 [5] 中命题 2.28 , 我们得到对 $f\in L^\infty(D^n)$, 有

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty\geq\|S_f\|\geq r(S_f)&=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(S_f)\}\\&\geq\sup\{|\lambda|:\lambda\in\mathcal{R}(f)\}=\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

因此 ξ 是等距的.　□

K.Stroethoff 和 D.Zheng 在文献 [1] 中证明了 Bergman 空间上对偶 Toeplitz 算子的谱包含于符号的本性值域的凸闭包中．设 E 是复平面上一个子集，我们用 $h(E)$ 来表示 E 的凸闭包. 用文献 [5] 中推论 7.19 的证明方法同样可以得到在多圆盘上此结论也是成立的.

定理 4.4　对每一个 $f\in L^\infty(D^n)$, 都有 $\sigma(S_f)\subset h(\mathcal{R}(f))$.

$(L_a^2(D^n))^\perp$ 上有界算子 S 是 Fredholm 当且仅当算子 $S+\mathcal{K}$ 在 Calkin 代数 $\mathcal{B}((L_a^2(D^n))^\perp)/\mathcal{K}$ 中是可逆的．下面的命题表明，对偶 Toeplitz 算子只有当它的符号可逆时才是 Fredholm.

命题 4.5　若 f 是 $L^\infty(D^n)$ 上一个函数，且有 S_f 是一个 Fredholm 算子，则 f 在 $L^\infty(D^n)$ 中可逆.

证明　用 $\mathcal{K}$ 表示 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 上的紧算子理想， $\mathcal{D}$ 表示由所有有界对偶 Toeplitz 算子的半换位子生成的理想. 若 S_f 是一个 Fredholm 算子, 则 $S_f+\mathcal{K}$ 在 Calkin 代数 $\mathcal{B}(L_a^2(D^n))^\perp/\mathcal{K}$ 中是可逆的. 由于 $\mathcal{I}(L_a^2(D^n))^\perp/\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{B}(L_a^2(D^n))^\perp/\mathcal{K}$ 的闭自伴子代数, 运用文献 [5] 中定理 4.28 知, $S_f+\mathcal{K}$ 在 $\mathcal{I}(L_a^2(D^n))^\perp/\mathcal{K}$ 中是可逆的．由定理 3.6 知 $\mathcal{K}\subset\mathcal{D}$, 故 $S_f+\mathcal{D}$ 在代数 $\mathcal{I}(L_a^2(D^n))^\perp/\mathcal{D}$ 中也是可逆的，从而得到 $f=\rho(S_f)$ 在 $L^\infty(D^n)$ 中是可逆的.　□

$(L_a^2(D^n))^\perp$ 上的有界线性算子 S 的基本谱用 $\sigma_e(S)$ 表示，则 $\sigma_e(S)$ 就是 $S+\mathcal{K}$ 在 Calkin 代数 $\mathcal{B}((L_a^2(D^n))^\perp)/\mathcal{K}$ 中的谱．我们有对偶 Toeplitz 算子的基本谱嵌入定理:

定理 4.6　若 f 是 $L^\infty(D^n)$ 上一个函数，则 $\mathcal{R}(f)\subset\sigma_e(S_f)$.

证明　由于对复数 λ 有 $S_f-\lambda=S_{f-\lambda}$, 故由命题 4.5 则得到 $\mathcal{R}(f)\subset\sigma_e(S_f)$.　□

定理 4.7　若 $f\in L^\infty(D^n)$ 且满足 Hankel 算子 H_f 和 $H_{\bar{f}}$ 都是紧的，则 $\mathcal{R}(f)=\sigma_e(S_f)$.

证明　由上面的定理可知只需证明 $\sigma_e(S_f)\subset\mathcal{R}(f)$ 即可．若 $\lambda\in\mathbf{C}\backslash\mathcal{R}(f)$, 则存在某一个 $\varepsilon>0$, 对几乎所有的 $z\in D^n$ 有 $|f(z)-\lambda|\geq\varepsilon$ 成立，从而 $g=1/(f-\lambda)\in L^\infty(D^n)$. 由 (1.2) 式知有

$$S_{f-\lambda}S_g=I-H_fH_{\bar{g}}^*,\quad S_gS_{f-\lambda}=I-H_gH_{\bar{f}}{}^*.$$

又由于 $H_fH_g^*$ 和 $H_g^*H_f$ 都是紧的, 故 $S_{f-\lambda}+\mathcal{K}$ 在 Calkin 代数中是可逆的, 从而 $\lambda\in\mathbf{C}\backslash\sigma_e(S_f)$.

命题 4.8　若 f 是 D^n 上一个非常数的实值简单可测函数且 H_f 是紧的, 则 $\sigma(S_f)$ 和 $\sigma_e(S_f)$ 都是不连通的.

证明　由定理 4.7 可知， $\mathcal{R}(f)=\sigma_e(S_f)$ 是非空有限集合．由于 S_f 是自伴的，故属于不同特征值的特征向量必正交．由于 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 是可分 Hilbert 空间，故算子 S_f 的点谱 $\sigma_p(S_f)$

至多可数. 由 $\sigma(S_f)\backslash\sigma_e(S_f)\subset\sigma_p(S_f)$ 导出谱集 $\sigma(S_f)$ 也至多可数. 又由于 $\mathcal{R}(f)\subset\sigma(S_f)$, 故 $\sigma(S_f)$ 一定是不连通的. □

命题 4.9 若 f 是 D^n 连续实值函数，则 $\sigma(S_f)=\sigma_e(S_f)$ 必连通.

证明 由 f 是连续实值函数易知 $\mathcal{R}(f)=\overline{f(D^n)}$ 是一个区间. 结合定理 4.2 和定理 4.6, 我们就得到了 $\sigma(S_f)=\sigma_e(S_f)=\overline{f(D^n)}$. □

由上面的命题表明以有界实值调和函数为符号的对偶 Toeplitz 算子的谱是连通的，我们并不知道以有界复值调和函数为符号的对偶 Toeplitz 算子的谱的连通性. 但是对有界解析和共轭解析函数为符号的对偶 Toeplitz 算子我们有下面的结果.

定理 4.10 若 f 是 D^n 上的有界解析或共轭解析函数，则 $\sigma(S_f)=\sigma_e(S_f)=\overline{f(D^n)}$.

证明 由于 $S_f^*=S_{\bar{f}}$, 故这里我们只需考虑 f 是 D^n 上共轭解析函数即可. 若 f 是共轭解析函数，则 $L_a^2(D^n)$ 为乘法算子 $M_{\bar{f}}$ 下的不变量，所以 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 也是算子 M_f 下的不变量. 进而可得 S_f 是 M_f 到 $(L_a^2(D^n))^\perp$ 上的一个限制. 若复数 λ 不在 $\overline{f(D^n)}$ 中，则 $S_{f-\lambda}$ 有逆算子 $S_{1/(f-\lambda)}$, 因此 $\sigma(S_f)\subset\overline{f(D^n)}$. 由定理 4.6 可知， $f(D^n)\subset\sigma_e(S_f)$, 故得证. □

参考文献:

[1] STROETHOFF K, ZHENG De-chao. *Algebraic and spectral properties of dual toeplitz operators* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2002, **354**(6): 2495–2520.

[2] LU Yu-feng. *Commuting dual Toeplitz operators with pluriharmonic symbols* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2005, **302**(1): 149–156.

[3] LU Yu-feng, SHANG Shu-xia. *Commuting dual Toeplitz operators on the polydisk* [J]. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 2007, **23**(5): 857–868.

[4] RUDIN W. *Real and Complex Analysis* [M]. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1974.

[5] DOUGLAS R. *Banach Algebra Techniques in Operator Theory* [M]. Academic Press, New York-London, 1972.

Properties of Dual Toeplitz Operators on the Polydisk

LU Yu-feng, SHANG Shu-xia

(Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China)

Abstract: In this paper, we study the boundedness and compactness of Dual Toeplitz operators on the polydisk and give the characterization of spectra of these operators.

Key words: dual Toeplitz operator; boundedness; compactness; spectrum.