文章编号: 1000-341X(2007)03-0563-14 **文献标识码**: **A**

某些图论问题的进展

张 克 民
(南京大学数学系, 江苏 南京 210093)
(E-mail: zkmf1@nju.edu.cn)

摘 要: 本文介绍了图论中某些问题的进展情况. 其中问题 1–50 是 Bondy 和 Murty 著的 “图论及其应用” 一书附录 IV 中的问题. 问题 51–90 是从其它方面收集来的新问题.

关键词: 未解决问题; 图论.
MSC(2000): 05C99; 05-02
中图分类: O157.5

在 Bondy 和 Murty 的 “图论及其应用” 一书的附录 IV 中, 搜集了当时图论中五十个未解决的问题. 这些问题对中国图论的发展起了一定的作用. 正因为如此田丰于 1986 年在曲阜师范大学学报上发表了与本文同名的文章, 论述它们的进展和相关的文献. 现在又 20 年过去了, 故有必要重新再来谈谈. 同时随着图论学科的发展, 老的问题解决了, 一批新的有意义的问题不断产生, 本文在上述 50 个问题之后又遴选了一些新的问题, 供读者参考. 本文的术语和记号参见 Bondy 和 Murty 的 “图论及其应用” 一书.

1. 重构猜想 (S.M. Ulam, 1929; P.J. Kelly, 1941) 和边重构猜想 (L.Lovász, 1972).

- 已有反例说明对无限图, 即使对于森林, 本猜想也不成立. 见 P.K. Stockmeyer (JGT, 1(1977), 19–25) 构造了无穷多个反例. 对有向图他也有类似的结果;
- P.Erdös 证明几乎所有的图本猜想成立;
- 已知一些特殊图类如: 不连通图, 树, 以及由图的色多项式, 特征多项式 $\cdots$ 可以重构;
- 有关重构猜想可参阅 J.A. Bondy 和 R.L. Hemminger 的综述文章 (JGT, 1(1977), 227–268) 及 1983 年他们的补充文章;
- 边重构猜想, 已知的结果比重构猜想要多很多. 特别, L.Lovász, W.Müller and C.St J.A. Nash-Williams 证明了每个满足 $\varepsilon > \nu \log \nu$ 的单图是边可重构的.

2. 图 G 可嵌入图 H 中是指 H 中存在一个与 G 同构的子图. 刻画可嵌入 k- 方体图的图的特征. (V.V. Firsov, 1965)

- 无实质性的进展;
- M.R. Garey 和 R.L. Graham 在 JCT, B18(1975), 84–95 中提供了一些方法.

3. 每个 4- 正则单图含一个 3- 正则子图. (C.Berge and N.Sauer, 1973)

- 它已被下面两位作者独立地给予证明.

张利民, 长沙铁道学院院报, 1(1985), 111–129;

收稿日期: 2007-01-05; **接受日期**: 2007-03-23
基金项目: 国家自然科学基金 (10471131).

B.A. Ta AH , 265(1982), 43–44 或 , 36(1984), 239–259;

• 后者得到更一般的结果：设 $0 < k < r$ 为正奇数，则每个 r- 正则图含一个 k- 正则子图. N.Alon, S.Friedland 和 G.Kalai (JCT, B37(1984), 92–93) 给出了一些推广结果.

4. 不存在每对顶点均由唯一长为 $k(> 2)$ 的路联接起来的图. (A.Kotzig, 1974)

• A. Kötzig, 在 Graph Theory and Related Topics, eds. J.A. Bondy & U.S.R. Murty, Academic Press, New York (1979), 358–367 中解决了 $2 < k < 9$ 的情况;

• Yang Yuansheng, Lin Jianhua, Wang Chunli 和 Li Kaifeng 在 Disc. Math. 211(2000), 287–298 中解决了 $k = 9, 10, 11$ 的情况;

• Xing Keyi 和 Hu Baosheng 在 Disc. Math. 135(1994), 387–393 中解决了 $k > 11$ 的情况. 从而问题似乎全部解决了，但非常遗憾 R.Höggkvist 指出在该文的证明中存在一个漏洞 (见 http://www.math.fau.edu/locke/unsolv4r.htm), 从而对 $k > 11$ 的情况，问题仍未解决.

5. 每个连通图 G 最多是 $[(\nu+1)/2]$ 条边不相交的路的并图. (T.Gallai, 1962)

• Fan Genghua (JCT, B84(2002), 54–83) 已解决了此问题. 若把问题中的连通性条件除去，则每个图最多是 $[2\nu/3]$ 条边不相交的路的并图;

• 对有向图，R.C. Ó Brien (JCT, B22(1977), 168–174) 证明了：每个 $\nu \geq 4$ 的严格有向图，最多是 $[\nu^2/2]$ 条弧不相交的有向路的并图.

6. 每个 2- 边连通的单图是 $v - 1$ 个圈的并图. (P.Erdös, A.W. Goodman and L.Pósa, 1966)

• 已被 L.Pyber 在 Combinatorica, 5(1985), 67–79 中证明了：每个 ν 阶 2- 边连通单图是 $v - 1$ 个圈及边的并图;

• Fan Genghua 在 JCT, B84(2002), 54–83 中有进一步的推广结果.

7. 若 G 是一单块，且至少有 $\nu/2 + k$ 个度不小于 k 的顶点，则 G 含有长度至少为 $2k$ 的圈. (D.R. Woodall, 1975)

• 几乎已被 Li Hao 在 JCT, B86(2002), 172–185 中证明. 他证明了：G 含有长度为 $\min\{n, 2k-13\}$ 的圈.

8. 令 $f(m,n)$ 为不含 m- 圈的 n 阶单图的边数的最大可能值. 已知结果是:

$$f(m,n) = \begin{cases} [n^2/4], & \text{若 } m \text{ 是奇数}, m \leq \frac{1}{2}(n+3), \\ \binom{n-m+2}{2} + \binom{m-1}{2}, & \text{若 } m \geq \frac{1}{2}(n+3). \end{cases}$$

确定未知情况的 $f(m,n)$.

• Z.Furedi 在 JCT, B68(1996), 1–6 中确定了 $f(4,n)$.

9. 令 $f(n)$ 为不含 3- 正则子图的 n 阶单图的边数的最大可能值，确定 $f(n)$. (P.Erdös and N.Sauer, 1974)

• P. Erdös 和 M. Simonovits 在 Combinatorial Theory and its Applications I eds. P.Erdös, A.Rényi and V.T. Sós, (1970) North-Holland, Amsterdam, 378—392 中确定的上界 $f(n) < Cn^{8/5}$, 这里 C 是某一个常数;

• 本问题目前已知最好的下界是在 L.Pyber, V.Rodel 和 E.Szemeredi 在 JCT, B63(1995), 41–54 中给出，其下界为 $Cn\log\log n$.

10. 确定唯一泛圈图 G (简记 UPC- 图). 即 G 是 n 阶单图，且恰含有唯一的一个 k- 圈，$3\le k\le n$. (R.C. Entringer, 1973)

对于本问题有如下结果：

• 施永兵在科学通报， 30(1985), 252–254 中得到：对于外平面图类，只有 4 个 UPC- 图；

• Shi Yongbing 在 Disc. Math. 59(1986), 167–180 中得到了 7 个 UPC- 图，它们分别为 3,5,8,8,14,14,14 个顶点，并猜测除这 7 个图外，无其它 UPC- 图；

• Shi Yongbing, H.P. Yap 和 S.K. Teo 在 Graph Theory and its Applications East and West (Jinan,1986), 487–499, Ann. New York Acad. Soc., 576 New York, 1989 中推广了 UPC- 图的概念为 r-UPC- 图，并得到一些结果；

• 施永兵在南京大学学报 (特刊), (1991), 127–129 中推广 UPC- 图到有向图类；最近卜月华 (已投稿， 2007) 得到所有顶点数小于 9 的 UPC- 有向图和较一般的方法求 UPC- 有向图.

11. 令 $f(n)$ 为不含有相同长度的两个圈的 n 阶单图的边数的最大可能值. 确定 $f(n)$ (P.Erdös,1975)

• Shi Yongbing 在 Disc. Math. 71(1988), 57–71 中证明了： $f(n)\ge n+[(\sqrt{8n-23}+1)/2], n\ge 3$.

• Lai Chunhui 在 Disc. Math. 122(1993), 363–364 及漳州师范学院学报 (自然科学版), 8(4)(1994), 30–34 中猜测： $f(n)=n+[(\sqrt{8n-23}+1)/2], n\ge 3$, 并对 $3\le n\le 17$ 证明猜测成立. 但在 n 充分大时，猜测不正确；

• Lai Chunhui 在 Australasian J. of Combin. 27(2003), 101–105 中证明了 $f(n)\ge n+36t$, 这里 $t=1260r+169 \quad (r\ge 1)$ 和 $n\ge 540t^2+87905.5t+3994.5$;

• P.Boros, Y.Caro, Z.Füredi 和 R.Yuster 在 JCT, B82(2001), 270–284 中证明了： $f(n)\le n+1.98\sqrt{n}(1+o(1))$. 连同上面的结果有如下结论： $\lim_{n\to\infty}\inf(f(n)-n)/\sqrt{n}\ge\sqrt{2.4}$.

12 . 若 G 是单图，且 $\varepsilon>\nu(k-1)/2$, 则 G 含有任一 k 条边的树. (P.Erdös and V.T. Sós, 1963)

本问题的部分结果如下：

• P.Erdös 和 T.Gallai 在 Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 10(1959), 337–356 中证明了包含长为 k 的路；

• J.F. Scale 和 M.Wozniak 在 JCT, B70(1997), 367–372 中证明了如 G 还具有 C_4-free, 则本猜测成立；

• Yin Jianhua 和 Li Jiongsheng 在应用数学学报 (英文版), 20(2004), 397–400 中证明了当 G 的补图是 C_4-free 图时，猜测成立；

• A.F. Sidorenko 在 Combinatorica, 9(1989), 207–215 中证明了某些特例；

• Wang Min, Li Guojun 和 Liu Aide 在 Ars Combin. 55(2000), 123–127 中当 G 的补图的围长 $g(\bar{G})>4$ 时，证明了本问题； S.Brandt 和 E.Dobson 在 Disc. Math. 150(1996), 411–414 中也证明了此结果.

13. 求 $(6,5)$- 笼.

问题已解决，详见：

• M.O'Keefe 和 Wong Pak-Ken 在 JCT, B26(1979), 145–149 中找到了 $(6,5)$- 笼，其顶点数

为 40; Wong Pak-Ken 在 JGT, 3(1979), 407–409 中证明了 $(6,5)$- 笼的唯一性;

• 进一步有关笼的结果，可查： http://www.cs.uwa.edu.au/∼ gordon/cages/allcages.html

14. 求图的带宽的界. (L.H. Harper, 1964)

• 本问题无实质性进展，因为它已被证明是 NP-hard 问题;

• 在性能比方面，已知在 $O(\log|V|^{4.5})$ 内可近似的，但 “对于任意给定的正整数 k 都是不可近似的”, 可参看 W.Unger 的文章： Proc. 39^{th}Ann. IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, (1998), 82–91. 进一步可参考 U. Feige, J. of Computer and System Sciences, 60(2000), 510–529. A.Gupta, J of Algorithms, 40(2001), 24–36 的文章.

15. 刻画优美图. (S.Golomb, 1972). 特别猜测：每棵树是优美. (A.Rosa, 1966)

• 本问题无实质性的进展. 但零星的非实质性的结果很多. 可参看谢力同、刘桂真的文章：曲阜师范大学学报 (自然科学版), 1(1984), 8–15, 该文后面附了大量文献，及马克杰著的 “优美图”, 北京大学出版社， 1991.

16. n 阶 3- 连通图，且具有尽可能小的生成树数目的图是 n 阶的轮. (W.T. Tutte, 1940)

• F.Göbel 和 A.A. Jagers 在 JCT, B26(1979), 346–348 中举出了许多反例，否定了上面的问题.

17. 设 u 和 v 是图 G 的两个顶点，用 a_n 表示删除它们就破坏了所有最长为 n 的 (u,v)- 路的顶点的最小数目，用 b_n 表示最长为 n 的内部不相交的 (u,v)- 路的最大数目. 设 $f(n)$ 表示 a_n/b_n 的最大可能值. 确定 $f(n)$. (V.Neumann-Lara, 1974)

• 已知其界为：$\sqrt{n/2} \le f(n) \le n/2$. (参见 L.Lovász, V.Neumann-Lara and M.D. Plummer, Periodica Math.Hungar. 9 (1978), 269–276);

• S.M. Boyes 和 G.Exoo 在 JGT, 6(1982), 205–209 中证明了 $f(n)$ 是线性的;

• 若 $a'_n, b'_n, f'(n)$ 分别表示 $a_n, b_n, f(n)$ 在边连通意义下的数值. G.Exoo 在 Disc. Math. 44(1983), 317–318 中证明了： $[(n+2)/3] \le f'(n) \le [n/2]$.

18. 每个 3- 正则 3- 连通平面二部图是 Hamiltonian. (D.W. Barnette and E.Jucovič, 1970)

• P.R. Goodey 在 J. London Math. Soc. 5(2)(1972), 504–510 中证明了如面度均为 4 或 6 的平面图时，本猜测成立;

• 如除去平面性这条件， Horton 图是一反例.

19. 刻画强迫 Hamilton 序列. (C.St.J.A. Nash-Williams, 1970)

• 虽已得到许多结果，其中包括像 Ore, Chvátal 等强迫条件，但本问题至今没实质性的进展. 有关这问题可可参看 S.B. Rao, Lecture Notes in Math. 885(1981), 441–458 及李炯生的数学进展， 23(3)(1994), 193–204 的综述文章.

20. 每个连通的顶点可迁图 (记为 CVT- 图) 含有 Hamilton 路. (L.Lovász,1968)

• p 表示素数, 已知 $p, 2p, 3p, p^2$ 或 p^3 个顶点的 CVT- 图, 除 Petersen 图外, 均具有 Hamilton 圈，从而对这些图类问题成立. D.Marušić 和 T.D. Parsons 在 Disc Math. 42(1982), 227–242 中证明了每个含 $5p$ 个顶点的 CVT- 图具有 Hamilton 路，同时考虑了 $4p$ 的一些情况;

• L.Babai 在 JGT, 3(1979), 301–304 中提出构造不含 Hamilton 圈的 CVT- 图，得到除 K_1, K_2 外，还有下面 4 个图： Petersen 图， Coxeter 图以及把它们的每个顶点换成三角形后所

得到的图. C. Thomassen 猜测仅有有限个这样的图.

21. (a) 任一 2-tough 图是 Hamiltonian. (V.Chvátal, 1971)

(b) 任一 3/2-tough 图含有 2- 因子. (V.Chvátal, 1971)

• (a) 的结论不成立. 见 D.Bauer, H.J. Broersma 和 H.J. Veldman 在 Disc. Math. Appl. 99(2000), 317–321 的文章中构造了 $(9/4-\varepsilon)$-tough 的非 Hamilton 图，甚至是非 Hamilton 路的图;

• (b) 的结论不成立. 见 H.Enomoto, B.Jackson, P.Katerinis 和 A.Saito 在 JGT, 9(1985), 87–95 的文章. 他们得到下面结果：如 $k\geq 1$, 对任一正实数 s, 则存在一个满足 $k|V(G)|$ 是偶数且 $|V(G)|\geq k+1$ 的 $(k-s)$-tough 图不含 k- 因子. 如把上面结果中的 $s=0$, H.Enomoto 在 Graphs Combin. 2(1986), 223–225 中证明 G 中含有 k- 因子.

• 关于图的坚韧度 (Toughness), 可看 D.Bauer, H.J. Broersma 和 E.Schmeichel 在 Graph and Combinatorics, 22(2006), 1–35 的综述文章.

22. (a) 若 bind$G\geq 3/2$, 则 G 含三角形. (D.R. Woodall, 1973)

(b) 若 bind$G\geq 3/2$, 则 G 是泛圈的. (D.R. Woodall, 1973)

• (a) 已被施容华在应用数学学报 (英文版), 2(1985), 79–86 和 154–160 中证明成立. 另外 W.Goodard 和 D.J. Kleitman 在 JGT, 17(1993), 629–631 中有一个简短证明;

• (b) 已被施容华在应用数学学报 (英文版), 3(1987), 257–269 中证明成立.

23. 每个非空正则单图包含两个不相交的极大独立集. (C.Berge, 1973; C.Payan, 1974)

• 在一般情况下，问题的结论是错误的. C.Payan 在 Disc. Math. 23(1978), 273–277 中构造了反例;

• 对 $(\nu-k)$- 正则图，当 $k<2(\sqrt{2\nu}-1)$ 时， P.Erdös, A.M. Hobbs 和 C.Payan 在 Disc. Math. 42(1982), 57–61 中证明本问题结论是正确的.

24. 求 Ramsey 数 $r(3,3,3,3)$?

• 目前最好的结果是： $41\leq r(3,3,3,3)\leq 62$. 它的下界是由 F.R.K. Chung 在 Disc. Math. 5(1973), 317–321 中得到；它的上界是由 S. Fettes, R.L.Kramer 和 S.P. Radziszowski 在 Ars Combin. 72(2004), 41–63 中得到;

• 有关 Ramsey 数的更多内容, 可参看：The Electronic J. of Combinatorics 杂志的 Dynamic Surveys 中 S.P. Radziszowski 的 Small Ramsey Numbers, Revision #11(2006) 的文章.

25. 对于 $m<n$, 令 $f(m,n)$ 为满足如下性质的图 G 的最小可能顶点数目，这里 G 不含 K_n, 但对任一 2- 边着色恒含有单色 K_m 子图. 求 $f(m,n)$ 的上、下界. (J.Folkman, 1970)

• J.Folkman 在 SIAM J. Appl. Math. 18(1970), 19–24 中证明了上述图的存在性. 已知：$f(3,6)=8$; $f(3,n)=6$, 当 $n\geq 7$;

• K.Piwakowski, S.P. Radziszowski 和 S.Urbamski 在 JGT, 32(1999), 41–49 中得到了 $f(3,5)=15$, 且对其它的 $f(m,n)$ 得到某些界.

26. 若 $\chi(G)=n$, 则 $r(G,G)\geq r(n,n)$. (P.Erdös, 1973)

• R.J. Faudree 和 B.D. McKay 在 JCMCC, 13(1993), 23–31 中得到如下反例：当 $G=W_6$ 时，有 $r(G,G)=17<r(4,4)=18$.

27. 求能嵌入平面使其每一边是单位长的直线段的图 G 的最大可能的色数？ (L.Moser, 1958)

- 本问题没有实质性进展.
- 注意： G 不一定是平面图. 显然有： $4 \le \chi(G) \le 7$.

28. 任一色多项式的系数的绝对值构成一个单峰序列. (R.C. Read, 1968)

- 本问题无实质性进展. 但关于 Tutte 多项式的系数的一个类似的猜测是不成立的.

29. 若 G 不是完全图，且 $\chi(G) = m + n - 1$, 这里 $m, n \ge 2$. 则存在 G 的不相交的子图 G_1, G_2 使得 $\chi(G_1) = m, \chi(G_2) = n$. (L.Lovász,1968)

- 这个问题的叙述是不正确的，因为很容易举出它的反例. 例如： $m = n = 3$, K_5 与 K_1 之间连一条边所构成的图就是一个反例；
- 正确的叙述是：若 G 中不含 K_{m+n-1}, 且 $\chi(G) = m + n - 1$, 这里 $m, n \ge 2$. 则存在两个不相交的子图 G_1, G_2 使得 $\chi(G_1) = m, \chi(G_2) = n$;
- 新叙述的问题尚无实质性进展.

30. 强完美图猜测： G 是完美的充要条件是 G, G^c 的任何导出子图都不是长大于 3 的奇圈. (C.Berge, 1961)

- 对完美图 L.Lovász 在 JCT, B13(1972), 95–98 中证明了另一个有用的结果：完美图的补图是完美的；
- M.Chudnovsky, N.Robertson, P.Seymour 和 R.Thomas 在 Math. Program, 97(2003), 405–422 是一篇综述，其中第二部分给出本猜测的纲要性的证明；
- M.Conforti, G.Cornuéjios 和 K.Vuškovic 在 JCT, B87(2003), 300–330 中给出了一个比上述猜测更强的猜测；
- M.Chudnovsky, N.Robertson, P.Seymour 和 R.Thomas 在 Annals of Mathematics, 164(2006), 51–229 中给出了强完美图猜测及它的更强的猜测的一个完整的证明.

31. 若 G 是 3- 正则单块，而 H 是将 G 中每一条边重复一次所得到的图，则 $\chi'(H) = 6$. (D.R. Fulkerson, 1971)

- 本问题无实质性进展；
- F.Jaeger 在 1985 年将它改述成如下猜测：每个 2- 边连通图能被 6 个偶子图的 4- 圈覆盖. 进一步可参看问题 51.

32. 若 G 是偶数阶的单图，且 $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, 则对某个 $v \in V, \chi'(G - v) = \chi'(G)$ 成立. (I.T. Jakobsen; L.W. Beineke and R.J. Wilson, 1973)

- M.K. Goldberg 在 JCT, B31(1981), 282–291 中给出了一系列反例，否定了这猜测；
- 本猜测对顶点数 $\nu \le 10$ 和 12 个顶点的 3- 正则图是成立的.

33. 全着色猜测：对任一单图 $G = (V, E)$, $V \cup E$ 中元素能被 $\Delta + 2$ 种色着色使得没有两个相邻或相关的元素着同色. (M.Behzad, 1965)

- 本问题已知最好的结果是: 若 G 是单图, 且其最大度 Δ 充分大, 则全色数 $\chi_T(G) \le \Delta + C$, 这里 $C \le 10^{26}$ 的一个常数. 它是由 M.Molloy 和 B.Reed 在 Combinatorics, 18(1998), 214–280 中得到的；
- A.V. Kostochka 在 Disc. Math., 162(1996), 199–214 中证明了：当 $\Delta \le 5$ 时，全着色猜

测成立.

34. 若 G 是单图且 $\varepsilon > 3\nu - 6$, 则 G 含一个 K_5 剖分. (G.A. Dirac, 1964)

• W.Mader 在 Combinatorics, 18(1998), 569–595 中得到比它更强的如下结果：若 G 是单图且 $\varepsilon = 3\nu - 5$, 则 G 含一个 K_5 剖分. 从而问题已解决.

35. 刻画可行 (potentially) 平面序列. (S.L. Hakimi, 1963)

• 本问题未解决. 除可参看问题 19 中指出的文献外, 还可参看综述文章：S.B. Rao, Lecture Notes in Math., 885(1981), 417–440.

36. 若 G 是无环平面图，则 $\alpha \geq \nu/4$. (P.Erdös, 1968)

• 本问题已被 K.Appel 和 W.Haken 在 Bull. Amer. Math. Soc., 82(1976), 711–712 中证明.

37. 每个平面图是 4- 可着色的. (F.Guthrie, 1852)

• 在问题 36 中的文献及在 Illinois J. of Math., 21(1977), 429–567 中已被证明. 之后有一个更好的证明见：N.Robertson, D.P. Sanders, P.D. Seymour 和 R.Thomas, Electron Res. Announce Amer. Math. Soc., 2(1996), 17–25 或 JCT, B70(1997), 2–44 的文章.

38. 每个 k- 色图均含一个可收缩为 K_k 的子图. (H.Hadwiger, 1943)

• A.V. Kostochka 在 Combinatorica, 4(1984), 307–316 中证明了几乎所有的 n 阶图 Hadwiger 猜测成立;

• N.Robertson, P.D. Seymour 和 R.Thomas 在 Combinatorica, 13(1993), 27–362 中证明 $k \leq 6$ 时， Hadwiger 猜测成立;

• P.D. Seymour 在 JCT, B31(1981), 82–94 中研究了问题 38,39 以及 50 之间的内在联系.

39. 每个 k- 色图均含一个 K_k 的剖分子图. (G.Hajós, 1961)

• 已证明 $k \leq 4$ 时问题成立;

• P.Erdös 和 S.Fajtlowicz 在 Combinatorica, 4(1981), 35–38 中证明了：几乎所有的图均是反例;

• 当 $k \geq 7$ 时， P.A. Catlin 在 JCT, B26(1979), 268–274 中具体的构造了反例，否定了本猜测;

• 本猜测仅有 k=5,6 的情况未解决;

• 与这问题相关的文献还可参看： Yu Xingxing 的 Ann.of Combin., 7(2003): 89–103 和 105–126 以及 C.Thomassen 的 JCT, B93(2005), 95–105 文章. 后者证明了图的线图本猜测成立.

40. 每个没有 Tait 着色的 2- 边连通 3- 正则单图包含可收缩成 Petersen 图的子图. (W.T. Tutte,1966)

• N.Robertson, D.P. Sanders, P.D. Seymour 和 R.Thomas 在 1998 年 8 月在 Rutgers 召开的 DIMACS DREI 会议上宣称本问题成立.

41. 对任给曲面 S, 恒存在最小不可嵌入曲面 S 的有限图簇，它们的最小度大于 2.

• H.Vollmerhaus 在 Seitrage zür Graphentheorie, 1968, 163–168 中证明可定向曲面本问题

成立;

• B.Mohar 和 C.Thomassen 在专著 Graphs on Surfaces, Johns Hopkins University Press, 1994 中证明对射影平面本问题成立;

• 本问题可参看 N.Robertson 和 P.D. Seymour 在 JCT, B 等杂志上发表的 10 余篇有关 Minor 的系列文章. 特别是 JCT, B77(1999), 162–210 这篇文章.

42. 若有向图 D 是双向连通的, 则 D 有长至少为 $\chi(D)$ 的有向圈. (M.Las Vergnas, 1974)

• J.A. Bondy 在 J. London Math. Soc., 14(2)(1976), 277–282 中证明了本问题.

43. 任一正则竞赛图可分解 $(\nu-1)/2$ 条弧不相交的有向 Hamilton 圈的并图. (P.Kelly, 1966)

• Zhou Guofei 和 Zhang Kemin 在 J. of System Science and Complexity, 16(4)(2003), 475–482 中证明了 $\nu\leq 12$ 时, 猜测成立;

• C.Thomassen 在 JGT, 10(1986) 的文章的 317 页处指出 R.Häggkvist 在私人通信中对上述问题有如下结论: 当 ν 充分大时本猜测成立. 但至今未见 R.Häggkvist 在杂志上发表的文章;

• C.Thomassen 在 Proceedings of the London Math. Soc., 45(1982), 151–168 中证明了: 任一正则竞赛图 T, 存在某个正常数 c, T 中含有 $c\sqrt{\nu}$ 条弧不相交的有向 Hamilton 圈.

44. 每个偶阶的竞赛图 T 可分解成 $\sum_{v\in V}\{0,d^+(v)-d^-(v)\}$ 条弧不相交的有向路的并图. (R.Ó Brien, 1974)

• 无实质性的进展.

45. 刻画具有如下性质的竞赛图 T: 对任给 $v\in T$, 所有子竞赛图 $T-v$ 均相互同构. (A.Kotzig, 1973)

• Lin Yucai, Huang Guoxun 和 Li Jiongsheng 在 JCT, B42(1987), 328–336 中刻画了它的可行度序列条件.

46. 若 D 是一个含有有向圈的有向图, 则存在某个弧, 将它反向后减少了 D 中所含的有向圈个数. (A.Adám, 1973)

• J.Jirásek 在 Disc. Math., 108(1992), 327–332 及姚惠能在杭州大学学报 (自然科学版), 19(1992), 65–70 中分别对某些特殊图类证明猜测是正确的;

• C.Thomassen 在 JCT, B42(1987), 128–130 中给出了多重有向图的反例; J.Jirásek 在 Comment. Math. University Carolinae, 1987, **28**: 185–189 及 E.Y. Grinberg 在 Latv. Mat. Ezhegodnik, 1988, **31**: 128–138 中也分别独立地给出了类似的反例;

• 本猜测对严格的有向图仍然是未解决问题.

47. 给定正整数 n, 证明存在最小的整数 $f(n)$ 使得在任给的至多有 n 个弧不相交的有向圈的有向图中去掉 $f(n)$ 条弧后不再含有有向圈. (T.Gallai, 1964; D.H. Younger, 1968)

• 本问题是 NP-Complete 问题. 可参看 F.Gavril 在 Proceedings 11^{th} Conference on Information Sciences and Systems, John Hopkins University, Baltimore, MD, 1977 中 91–95 的文章; 或参看 J.Bang-Jensen 和 G.Gutin, Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, London: Springer-Verlag, 2001, 554.

48. 一个 $(m+n)$- 正则图是 (m,n)- 可定向的, 若它能被定向使得每点的入度为 m 或 n. 证明每个不含 1- 边割集和 3- 边割集的 5- 正则单图是 (4,1)- 可定向的. (W.T. Tutte, 1972)

• 本问题无实质性进展;

• W.T. Tutte 指出如本问题成立. 它蕴含了 Grötzsch 定理.

49. 求一个算法使在有两个发点 x_1, x_2, 有两个收点 y_1, y_2 和两种商品网络中，求出把商品 1 从 x_1 运到 y_1, 而把商品 2 从 x_2 运到 y_2 的最大流. (L.R. Ford and D.R. Fulkerson, 1962)

• 朱永津、田丰、马仲蕃、蔡茂诚在中国科学， 6(1974), 545–550 中给出了一个算法;

• P.D. Seymour 在 JCT, B26(1979), 370–371 中证明了上述的两种物资网络流问题可以变换为两个单一物资网络流问题.

50. 5- 流猜测：每个 2- 边连通有向图 D 均有在整数模 5 的域上的环流 f 使得对所有弧 a 有 $f(a) \neq 0$. (W.T. Tutte, 1949)

• F.Jaeger 在 JCT, B26(1979), 205–216 中证明了 8- 流的存在;

• P.D. Seymour 在 JCT, B30(1981), 130–135 中证明了 6- 流的存在;

• D.H. Younger 在 JGT, 7(1983), 349–357 中给出了求 5- 流的多项式算法，特别证明了对平面图 5- 流猜测成立;

• R.Steinberg 在 JGT, 8(1984), 277–289 中证明了对可嵌入射影平面的图 5- 流猜测成立;

• W.T. Tutte 分别在 1950 和 1954 年提出了类似如下的猜测：每个 2- 边连通有向图 D, 若 D 不含 Petersen 图的剖分子图，则 D 含有 4- 流；若不存在 3- 边割，则 D 含有 3- 流.

51. 双圈覆盖猜测：对任意 2- 边连通图 G, 存在一个 G 的圈簇使得 G 中每一边恰好含在该圈簇中的两个圈上. (G.Szekers, 1973; P.D. Seymour, 1979)

• 很多图论中未解决问题，例如问题 31 和 50 均与本猜测有关;

• 对 nowhere-zero 4- 流， W.T. Tutte 证明猜测成立，从而对 3- 边可着色图猜测成立;

• 对 4- 边连通图， F.Jaeger 在 JCT, B26(1979), 205–216 中用 4- 流定理证明猜测成立;

• 对不含 Petersen minor 的图， B.Alspach, L.A. Goddyn 和 Zhang Cunquan 在 Trans. Amer. Math. Soc., 344(1994), 131–154 中证明猜测成立;

• 对含有 Hamilton 路的图， L.A. Goddyn 在 JCT, B46(1989), 253–254 中证明猜测成立;

• 综上所述结果，本猜测剩下未证明的是： 2- 边连通非 3- 边可着色的方体图是否猜测成立. 对此 J.C. Bermond, B.Jackson 和 F.Jaeger 在 JCT, B35(1983), 297–308 中用 8- 流定理证明 G 中存在一个圈簇使得每边恰含在圈簇中的 4 个圈上； Fan Genghua 在 JCT, B54(1992), 113–122 中用 6- 流定理证明了 G 中存在一个圈簇使得每边恰含在圈簇中的 6 个圈上. 从而得：G 中存在一个圈簇使得每边恰含在圈簇中的 k ($\neq 2$,=even) 个圈上;

• 可参看 F.Jaeger 在 Annals of Disc. Math., 27(1985), 1–12 的综述文章.

52. 每个 2- 边连通图存在可定向的 5- 可着色的双圈覆盖.

• 本问题蕴涵了问题 50.

53. 每一个 n 个顶点的 2- 边连通单图有一个双圈覆盖 C 满足 $|C| \leq n-1$. (J.A. Bondy, 1990)

• 参看 J.A. Bondy, Cycles and Rays (G.Hahn, G.Sabidussi and R.Woodrow, eds.) Kluwer Academic Publishers, 1990, 21–40 的文章;

• J.A. Bondy 和 Fan Genghua, Combinatorica, 11(1991), 191–205;

• Li Hao, JGT, 14(1990), 645—650.

54. 每一个 2- 边连通图有一个用 5 个偶子图的双覆盖. (U.Celmins, 1984; M.Preissman, 1981)

• 参看 F.Jaeger, Ann. Disc. Math., 27 North-Holland, 1985, 1–12.

55. 给定 2- 连通图 G 中两点 u, v, 如何求 G 中过给定点 u, v 的最小圈？能否得到多项式时间的算法？ (M.Weis, 2005)

• T.Kojima 和 K.Ando 在 Ars Combinatoria, 58(2001), 245–256 中得到一些结果.

56. 是否存在多项式时间的算法求有向图中的有向偶圈？ (D.H. Younger, 1973)

• 已由 N.Robertson, P.D. Seymour 和 R.Thomas 在 Annals of Mathematics, 150(1999), 929–975 文章中解决.

57. 求古典 Ramsey 数 $r(5,5)$?

• 目前已知最好的结果是： $43 \leq r(5,5) \leq 49$. 可参看： The Electronic J. of Combinatorics 杂志的 Dynamic Surveys 中 S.P. Radziszowski 的 Small Ramsey Numbers, Revision #11(2006) 的文章.

58. $R(C_n, K_m) = (n-1)(m-1)+1$ 对 $n \geq m \geq 3$ 且 $(n,m) \neq (3,3)$ 均成立. (P.Erdös, R.J. Faudree, C.C. Rousseau and R.H. Schelp, 1978)

• Yang Jiansheng, Huang Yiru 和 Zhang Kemin 在 Australasian J. of Combinatorics, 20(1999), 205–206 文章中证明 $n \geq m = 4$ 的情况；

• B.Bollobás, C.J. Jayawardene, Yang Jiansheng, Huang Yiru, C.C. Rousseau 和 Zhang Kemin 在 Australasian J. of Combinatorics, 22(2000), 63–71 文章中证明 $n \geq m = 5$ 的情况；

• I.Schiermeyer 在 JGT, 44(2003), 251–260 文章中证明 $n \geq m = 6$ 的情况；

• Chen Yaojun 和 Zhang Yunqing, EJC, (2007) 的文章中证明 $n \geq m = 7$ 的情况；

• Zhang Yunqing 和 Zhang Kemin, Disc. Math. (2007) 的文章中证明 $R(C_8, K_8) = 50$, 有关上述猜测其它情况仍然是未解决的问题；

• 从已知的结果 (参看： The Electronic J. of Combinatorics 杂志的 Dynamic Surveys 中 S.P. Radziszowski 的 Small Ramsey Numbers, Revision #11(2006)), 及一些未发表的结果看，有理由作如下进一步的猜测： $R(C_n, K_m) = (n-1)(m-1)+1$ 对 $n \geq 5$ 均成立.

59. 边列表着色猜测： $\chi'_l(G) = \chi'(G)$ (LECC)

• 本问题无实质性进展；

• 本问题仅有一些对某些特殊图类零星结果： 2- 部图 (F.Galvin, JCT, B63(1995), 153–158); 奇数阶完全图 (R.Häggkvist 和 J.Janssen, Combin. Probab. Comput., 6(1997), 295–313); $\Delta \geq 12$ 的平面图 (O.V. Borodin, A.V. Kostochka 和 D.R. Woodall, JCT, B71(1997), 184–204); 外平面图 (Wang Weifan 和 Lih Ko-Wei, EJC, 22(2001), 71–78); line-perfect 多重图 (D.Peterson and D.R. Woodall, Disc. Math. 202(1999), 191–199); multicircuits 图 (D.R. Woodall, Disc. Math. 202(1999), 274–277) 等.

60. 令 $c_k (k > 2)$ 记为满足如下性质的最好可能的常数使得对每一个 k- 连通图若含有长为 p 的路则蕴涵长至少为 $c_k p$ 的圈；对 k- 正则 k- 连通图可类似定义参数 d_k.

(a) 是否序列 $c_3, c_4, \ldots$ 的极限为 1;

(b) 是否序列 $d_3, d_4, \ldots$ 是非降的，且它们的极限为 1.

• J.A. Bondy 和 S.C. Locke 在 Disc. Math. 33(1981), 111–122 中得到 $2/5 \le c_3 \le 1/2$ 及 $2/3 \le d_3 \le 7/8$.

61. 给定一个图簇 F 和正整数 n, 是否存在一个仅仅依赖于 F 和 k 的常数 c 使得每个不含 F 中的子式 (minor) 的 n 个顶点的 k- 连通图中含有长度不小于 cn 的圈.

• 若取 $F = \{K_5, K_{3,3}\}$ 和 $k = 4$, 则由 Tutte 定理 (即： 4- 连通平面图是 Hamiltonian) 保证了 $c = 1$;

• T.Bohme, B.Mohar 和 C.Thomassen 在 JCT, B85(2002), 338–347 中证明了：对给定的曲面 S, 存在一个仅依赖于 S 的常数 c 使得每个能嵌入 S 的 n 个顶点的 4- 连通图 G 中含有长度不小于 cn 的圈.

62. 令图 $G = (V.E)$ 和整数 $k > 1$, $D(\subseteq V)$ 称为 G 的 non-zero (mod k) 控制集：若对任意的 $v \in V$ 总有 $|N[v] \cap D| \ne 0(\text{mod}k)$. 对任给的 $k > 1$, 是否任一图 G 恒有 non-zero (mod k) 控制集？

• Y.Caro 和 M.S. Jacobson 在 Discuss. Math. Graph Theory, 23(2003), 189–199 中得到：每个图 G 恒有 non-zero (mod 2) 控制集；从而有：每个图 G 恒有 non-zero (mod k) 控制集，当 k 为偶数.

63. 令 G 是 $k(>1)$- 连通图， S 是 G 中一个 k 条边的子集使其边诱导子图是线性森林，则除了是奇数且 S 是 G 中的边割外， G 中存在含 S 中每一边的一个圈. (L.Lovász, 1974)

• R.Häggkvist 和 C.Thomassen 在 Disc. Math. 41(1982), 29–34 中证明了若 $|S| = k - 1$, 则 G 中存在含 S 中每一边的圈;

• K.I. Kawarabayashi 在 JCT, B84(2002), 1–44 中对 S 是 k 条独立边集情况下证明了： k 不大于 7 时，结论成立；对一般的 k, 证明了 G 中存在一个或两个点不交的圈，包含 S 中每一边. 在该文中，他还宣布在他的文章 “Proof of Lovasz-Woodall conjecture (in prepartion)” 中解决了问题 63.

64. 令 G 是 3- 正则、圈 k- 边连通图， S 是 G 中一个 $k - 1$ 条边的子集使其边诱导子图是线性森林，则 G 中存在含 S 中每一边的一个圈. (D.A. Holton and C.Thomassen, 1986)

• 此问题是 D.A. Holton 和 C.Thomassen 在 Disc. Math. 62(1986), 111–112 中的 Problem 81.

65. 在 $k(>1)$- 连通中，任意两个最长圈至少有 k 个公共点. (S.Smith)

• M.Grötschel 在 Graph Theory and Combinatorics (B.Ballobás,ed.), Acad. Press, London, 1984, 171–189 中有 $k = 2$ 情况的部份结果.

66. 令 D 是独立数为 α 的强连通有向图, 则 D 最多用 α 个有向圈来顶点覆盖. (T.Gallai, 1964)

• 此问题是 T.Gallai 在 Theory of Graphs and its Applications (M.Fiedler, ed), Czech. Acad. Sci. Publ., 1964, 161 中的 Problem 15.

67. 令 D 是独立数为 α 的强连通有向图，则 D 可剖分成最多 $\alpha - 1$ 条有向路. (M.LasVergnas, 1976)

• C.C. Chen 和 P.Manalastas 在 Disc. Math. 44(1983), 243–250 中解决了 $\alpha = 2$ 的情形;

• S.Thomassé 在 JCT, B83(2002), 331–333 中解决了一般情形.

68. 弱路剖分猜测：对任意有向图 D 和任正整数 k, 有 $\alpha_k \geq \pi_k$. (N.Linial, 1981)

• 参看 C.Berge 在 Disc. Math. 165(1997), 61–70 的综述文章，其中叙述一些已解决的特殊情况.

69. 强路剖分猜测：对任意有向图 D 和任意的正整数 k, $\mathcal{P}$ 是 D 中一个 k- 最优路剖分，则 D 中存在一个偏 k- 着色 (partial k-colouring) 与 $\mathcal{P}$ 正交. (C.Berge, 1982)

• 参看 C.Berge 在 Disc. Math. 165(1997), 61–70 的综述文章，其中叙述一些已解决的特殊情况.

70. 对偶弱路剖分猜测：对任意有向图 D 和任意的正整数 k, 有 $\lambda_k \geq \chi_k$. (N.Linial, 1981)

• 参看 N.Linial, JCT, A30(1981), 331–334 的文章.

71. 每一单 4-polytope 含有一个 Hamilton 图. (D.W. Barnette, 1970)

• 参看 B.Grünbaum, Bull. Amer. Math. Soc., 76(1970), 1131–1201 的文章.

72. 每个 Cayley 图是 Hamiltonian. (T.D. Parsons)

• 参看 D.Witte 和 J.A. Gallian, Disc. Math. 51(1984), 293–304 的综述文章，指出一些已解决的特殊群对应的 Cayley 图.

73. 每个 n 个顶点的偶单图可分解成最多 $(n-1)/2$ 圈. (G.Hajós)

• 参看 N.Dean, JGT, 10(1986), 299–308 和 L.Lovász, Theory of Graph (P. Erdös and G. Katona, eds) Acad. Press, New York, 1968, 231–236 的文章.

74. 若 G 是一个最小度 > 2 的 Euler 图， T 是 G 中的一个 Euler 环游. 则 G 有一个圈分解 C, 使得 T 的相继边属于圈分解中不同的圈. (G.Sabidussi, 1975)

• 令 G 是一个连通的 Euler 圈， T 是其 Euler 环游. 称 G 中圈覆盖 C 和 T 是 compatible, 若 T 中相继边 xy, yz, 当 $d(y) > 2$ 时，它们分属于 C 中不同的圈. 本问题可叙述为满足上述条件的 G 中存在圈覆盖 C, 它和 T 是 compatible;

• H.Fleischner 证明了：问题 79 和本问题的正确性可以推出双圈覆盖猜测的正确性 (问题 51). 参看 F.Jaeger, Ann. Disc. Math. 27(1985), 1–12, North-Holland, Amsterdam;

• 参看 H.Fleischner, JCT, B29(1980), 145–167 的文章. 文中推广了上述猜测，同时证明了对一些特殊图类：平面图、无割边的方体图等成立.

75. 每个 4- 连通无爪图是 Hamilton 图. (M.Matthews and D.Sumner, 1984)

• Z.Ryjacek 在 JCT, B70(1997), 217–224 中证明了每个 4- 连通无爪图是 Hamilto 图等价于每个 4- 连通线图是 Hamilton 图;

• Zhan Simin 在 JCT, 12(1988), 209–216 中证明了每个 7- 连通无爪图是 Hamilto 图，它是目前最好的结果;

• 有关爪图的成果，可参看 E.Flandrin, R.Faudree 和 Z.Ryjacek 在 Disc. Math. 164(1997), 87–147 上的综述文章.

76. 若 D 是最小的出度和入度均不小于 k 的强连通定向图，则 D 有长度至少为 $2k+1$ 的有向圈. (B.Jackson, 1980)

• 参看 B.Jackson, Ann. Disc. Math., 8(1980), 275–277 的文章，或参看 J.Bang-Jensen 和

G.Gutin, Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, London: Springer-Verlag, 2001.

77. 每个至多有 $4k+1$ 个顶点的 k- 正则定向图，这里 $k>2$，含有有向 Hamilton 圈．(B.Jackson, 1981)

• 参看 B.Jackson, JGT, 5(1981), 145–157 的文章，或参看 J.Bang-Jensen 和 G.Gutin, Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, London: Springer-Verlag, 2001.

78. 若 C 是 3- 连通图中的最长圈，则 C 至少含有一条弦． (C.Thomassen, 1976)

• 参看 C.Thomassen, JCT, B71(1997), 211–214 的文章解决了方体图的情况 ·, 或参看 J.Bang-Jensen 和 G.Gutin, Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, London: Springer-Verlag, 2001.

79. 令 G 是一个 3- 正则、圈 4- 边连通图，则 G 有控制圈． (H.Fleischner and B.Jackson, 1989)

• 参看 H.Fleischner 和 B.Jackson, Ann. Disc. Math. 41, North-Holland, 1989, 171–178.

• H.Fleischner 和 B.Jackson 在 Ann. Disc. Math. 41(1989), 171–177 中证明了本问题等价于每个 4- 连通线图是 Hamilton 图，从而等价于问题 75；也可参见 M.Kochol 在 JCT, B78(2000), 277–279 的文章.

80. 不存在 2- 部 Hypotraceable 图． (M.Grötschel, 1980)

• 和 Hypotraceable 图有关的文章：M.Grötschel, C.Thomassen 和 Y.Wakabayashi 在 JGT, 4(1980), 377–381 中证明了 n 个顶点的有向图中存在 Hypotraceable 图的充要条件是 $n\geq 7$；C.Thomassen 在 JCT, B30(1981), 36–44 中证明平面图中存在 Hypotraceable 图；

• 对本猜测无实质性进展.

81. 若 G 是 $2n$ 个顶点最小度为 δ (这里 $\delta^2-\delta+1>n$) 的 Hamiltonian 2- 部单图，则 G 是偶泛圈的． (J.Mitchem and E.Schmeichel, 1985)

• 参看 J.Mitchem 和 E.Schmeichel, 在 Graphs and Applications (F.Harary and J.S. Maybee, eds), John Wiley and Sons, New York, 1985, 271–278 中的综合文章.

82. 令 D 是平面有向图，则 D 的围长等于满足如下性质的匹配 M 的最大边数，这里 M 是在 D 中除去 M 的边后就不再含有向圈． (D.R. Woodall, 1978)

• O.Lee 和 Y.Wakabayashi 在 JGT, 38(2001), 36–41 文章中证明了对一些特殊图类是对的；

• 本问题对非平面图不成立.

83. 令 G 是一个单图、 k 是一个正整数，则或 G 有 $k+1$ 个边不相交的三角形或 G 中存在至多 $2k$ 条边与所有三角形相交． (Zs.Tuza, 1984)

• 参看 Zs.Tuza, Finite and Infinite Sets (A.Hajnal, L.Lovász and V.T. Sós,eds) Colloq. Math. Soc. János Bolyai 37, North-Holland, 1984, 888 的文章.

84. 若 G 是 n 个顶点的 2- 连通单图，则 $E(G)$ 能被至多 $(2n-1)/3$ 圈覆盖． (J.A. Bondy, 1990)

• Fan Genghua 在 JCT, B84(2002), 54–83 中解决了本问题.

85. 如 G 是至多 $4d+1$ 个顶点的 $2d$- 正则单图，这里 $d>0$，则 G 有 Hamilton 分解． (C.St.J.A. Nash-Williams, 1971)

• 参看 C.St.J.A. Nash-Williams, Lecture Notes in Math. 186, Spriinger, 1971, 197–210 的文章;

• B.Jackson 在 J. London Math. Soc., 19(1979), 13–16 中得到在某些条件下能保证有一定的边不相交的 Hamiltion 圈.

86. 若 r 是奇数、 D 是 r- 正则定向图，则 D 有一个 good 有向路分解. (N.J. Pullman, 1980)

• 本问题包含问题 43;

• K.B. Reid 和 K.Wayland 在 JGT, 11(1987), 113–118 中对方体图证明了上述结论.

87. 每个正则 2- 部竞赛图可分解成有向 Hamilton 圈的并. (B.Jackson, 1981)

• 参看 B.Jackson, JCT, B30(1981), 332–342 的文章.

88. 每个 2- 边连通图能嵌入到某个曲面使得它的每个面的边界是一个圈. (G.Haggard, 1977)

• 参看 G.Haggard, Congressus Numerantium, 19(F.Hoffman et al., eds.), Utilitas Math., Winnipeg, 1977, 291–302 的文章.

89. 每个非负的偶权的赋权图是一个圈的和充要条件是对每个边割 S 和每个边 $f \in S, w(f) \leq \sum_{e\in S\setminus f} w(e)$. (P.D. Seymour, 1979)

• 参看 P.D. Seymour, Graph Theory and Related Topics (J.A. Bondy and U.S.R. Murty, eds), Academic Press, New York, 1979, 341–355 的文章.

90. 是否存在最小度为 4 唯一 Hamilton 单图？ (J.Sheehan, 1975)

• 参看 J.Sheehan, Recent Advances in Graph Theory (M.Fiedler, ed.) Academia, Prague, 1975, 447–480 的文章;

• H.Fleischner 给出了一个具有最小度为 4 唯一 Hamilton 图例子;

• R.C. Entringer 和 H.Swart, JCT, B29(1980), 303–309.

最后要说明，由于掌握的材料局限，且文献日新月异，许多问题的进展难免有所遗漏，在此抛砖引玉. 敬请专家指正和提供新的文献，使之更为日臻完善.

致谢 本文收集材料过程中，利用了 S.C. Locke 在网上公布的 "Unsolved Problems" 中的部份材料；还部份的采用了林国宁先生从 U.S.R. Murty 那里得到的，据说是打算放在 Bondy & Murty 合著的 "Graph Theory with Applications, 2ed Edition" 中作为新的未解决问题 (与前面 50 个问题相比，其中约一半是新的), 遗憾的是至今未见到该书第二版的问世. 特别还得到了田丰先生的许多帮助. 匿名审稿人提了不少有益的意见，在此一并表示谢意.

Progress of Some Problems in Graph Theory

ZHANG Ke-min
(Department of Mathematics, Nanjing University, Jiangsu 210093, China)

Abstract: This paper reports the progress of some problems in graph theory. Problems 1 to 50 was addressed in Appendix IV with the same numbering as in Bondy and Murty's book. And Problems 51 to 90 are newly collected.

Key words: unsolved problem; graph theory.