文章编号: 1000-341X(2007)03-0577-09　　**文献标识码**: A

Smash 积，辫积和 L-R Smash 积的新对偶

张良云，　李 强
(南京农业大学理学院，江苏　南京 210095)
(E-mail: qfjiang@sjtu.edu.cn)

摘　要: 本文主要地证明：由 H- 重模代数 A,B 构成的 Smash 积 $A\#B$ 的新对偶 ${}_H(A\#B)^0$ 恰好是由重模余代数 ${}_HA^0,{}_HB^0$ 构成的 Smash 余积 ${}_HA^0\times_H B^0$; 如果 (H,σ) 是辫化 Hopf 代数，则新对偶 ${}_HH^0$ 是右，左 H^0- 重模余代数；由量子 Yang-Baxter H- 模代数 A,B 构成的辫积 $A\propto B$ 的新对偶 $(A\propto B)^0$ 恰好是由量子 Yang-Baxter H- 模余代数 ${}_HA^0,{}_HB^0$ 构成的辫余积 ${}_HA^0\times_H B^0$. 最后它给出由 H- 双模代数 A 构成的 L-R Smash 积 $A\natural H$ 的新对偶 $(A\natural H)_H{}^0$ 的正合序列.

关键词: 重模代数；量子 Yang-Baxter 模代数； Smash 积；辫积； L-R Smash 积.
MSC(2000): 16W30
中图分类: O153.3

0 引言与准备

设 A 是域 k 上的一个代数，它的有限对偶定义为： $A^0=\{a^*\in A^*|\langle a^*,I\rangle=0,$ 其中 I 为代数 A 的余有限维理想 $\}$, 则由文献 [1] 知： A^0 是一个余代数.

设 A 是左 H- 模代数，即，A 既是一个代数又是一个左 H- 模，并且对任意 $h\in H,a,b\in A$, 满足：

(1) $h\cdot(ab)=\Sigma(h_1\cdot a)(h_2\cdot b)$;

(2) $h\cdot 1_A=\varepsilon(h)1_A$,

则由文献 [1] 知，形成 Smash 积代数 $A\#H$, 它的乘法定义为： $(a\#h)(b\#g)=\Sigma a(h_1\cdot b)\#h_2g$, 其中 $\Delta(h)=\Sigma h_1\otimes h_2$. 因此 Smash 积代数 $A\#H$ 的有限对偶 $(A\#H)^0$ 是余代数.

自然地，我们要问：$(A\#H)^0$ 是何种余代数呢？为此，文献 [2] 首次引入一种新的代数对偶概念，即，设 A 是一个代数，一个左 H- 模，定义 ${}_HA^0=\{a^*\in A^*|\langle a^*,I\rangle=0,H\cdot I\subseteq I,$ 其中 I 为代数 A 的余有限维理想 $\}$, 则 ${}_HA^0$ 是一个余代数. 特别地，当 A 是左 H- 模代数时，${}_HA^0$ 是左 H^0- 余模余代数. 因此形成 Smash 余积 ${}_HA^0\times H^0$, 并且有余代数同构 $(A\#H)^0\cong_H A^0\times H^0$. 因此 Smash 积代数 $A\#H$ 的有限对偶 $(A\#H)^0$ 恰好是 Smash 余积 ${}_HA^0\times H^0$.

由于模代数的新对偶是余模余代数，文献 [4] 中的重模代数和量子 Yang-Baxter 模代数都有模代数的结构，所以我们自然要问：

H- 重模代数和量子 Yang-Baxter H- 模代数的新对偶分别是什么？

在本文，我们将证明： H- 重模代数 A 的新对偶 ${}_HA^0$ 是文献 [5] 中的 H^0- 重模余代数，量子 Yang-Baxter H- 模代数 A 的新对偶 ${}_HA^0$ 是文献 [5] 中的量子 Yang-Baxter H^0- 模余代数；由

收稿日期: 2005-08-18; **接受日期**: 2005-11-03
基金项目: 国家自然科学基金 (10571153); 中国科学博士后基金 (2005037713).

H- 重模代数 A,B 构成的 Smash 积 $A\#B$ 的新对偶 ${}_H(A\#B)^0$ 恰好是由重模余代数 ${}_HA^0,{}_HB^0$ 构成的 Smash 余积 ${}_HA^0\times_H B^0$; 如果 (H,σ) 是辫化 Hopf 代数，则 ${}_HH^0$ 是右，左 H^0- 重模余代数；由量子 Yang-Baxter H- 模代数 A,B 构成的辫积 $A\propto B$ 的新对偶 ${}_H(A\propto B)^0$ 恰好是由量子 Yang-Baxter H^0- 模余代数 ${}_HA^0,{}_HB^0$ 构成的辫余积 ${}_HA^0\times_H B^0$.

最后我们给出由 H- 双模代数 A 构成的 L-R Smash 积 $A\natural H$ 的新对偶 ${}_H(A\natural H)_H{}^0$ 的正合序列.

本文所讨论的代数、余代数、模及余模均在域 k 上考虑．以下，回忆本文用到的基本概念与记号，详见文献 [1].

称一个 k- 空间 M 是 A- 双模, 即, 它既是左 A- 模又是右 A- 模, 并且对任意 $a,b\in A,m\in M$, 有 $a\cdot(m\cdot b)=(a\cdot m)\cdot b$.

称一个代数 A 是 H- 双模代数，即， A 是双模，并且 A 既是左 H- 模代数又是右 H- 模代数.

称一个 k- 空间 M 是 C- 双余模, 即, 它既是左 C- 余模又是右 C- 余模, 并且对任意 $m\in M$, 有 $\Sigma m_{(-1)}\otimes m_{(0)(0)}\otimes m_{(0)(1)}=\Sigma m_{(0)(-1)}\otimes m_{(0)(0)}\otimes m_{(1)}$. 这里， M 的左、右 C- 余模分别表示为 $\rho_-(m)=\Sigma m_{(-1)}\otimes m_{(0)},\rho_+(m)=\Sigma m_{(0)}\otimes m_{(1)}$.

称一个余代数 C 是左 H- 模余代数，即，它的左 H- 模结构映射 “$\cdot$” 满足：对任意 $h\in H,c\in C$, 有 $\Delta(h\cdot c)=\Delta(h)\Delta(c),\varepsilon(h\cdot c)=\varepsilon(h)\varepsilon(c)$.

称一个代数 A 是左 H- 余模代数，即，它的左 H- 余模结构映射 ρ 满足：对任意 $a,b\in A$,

$$\rho(ab)=\rho(a)\rho(b),\rho(1_A)=1_H\otimes 1_A.$$

称一个余代数 C 是左 H- 余模余代数，即，它的左 H- 余模结构映射 ρ 满足：对任意 $c\in C$,

$$\Sigma c_{(-1)}\otimes(c_{(0)})_1\otimes(c_{(0)})_2=\Sigma(c_1)_{(-1)}(c_2)_{(-1)}\otimes(c_1)_{(0)}\otimes(c_2)_{(0)},\Sigma c_{(-1)}\varepsilon_C(c_0)=\varepsilon_C(c)1_H.$$

称一个余代数 C 是 H- 双余模余代数，即， C 是 H- 双余模，并且 C 既是左 H- 余模余代数又是右 H- 余模余代数.

1 重模代数的新对偶

设 $(A,\cdot,\rho)$ 既是左 H- 模代数又是右 H- 余模代数．如果对任意 $h\in H,a\in A$ 满足如下条件：

(DA) $\rho(h\cdot a)=\Sigma h\cdot a_{(0)}\otimes a_{(1)}$,

则称 $(A,\cdot,\rho)$ 是左，右 H- 重模代数.

设 A,B 都是左，右 H- 重模代数．定义它们的 Smash 积 $A\#B$ 如下：

$$A\#B=A\otimes B,\quad (a\#x)(b\#y)=\Sigma a(x_{(1)}\cdot b)\#x_{(0)}y,$$

则由文献 [4], [5] 知 Smash 积 $A\#B$ 仍是左、右 H- 重模代数，它的左 H- 模和右 H- 余模分别定义为

(DA1) $h\rightharpoonup(a\#x)=\Sigma h_1\cdot a\#h_2\cdot x$;

(DA2) $\rho(a\#x)=\Sigma a_{(0)}\#x_{(0)}\otimes a_{(1)}x_{(1)}$.

设 $(C,\cdot,\rho)$ 既是右 H- 模余代数又是左 H- 余模余代数．如果对任意 $h\in H, c\in C$ 满足如下条件：

(DC) $\rho(c\cdot h)=\Sigma c_{(-1)}\otimes c_{(0)}\cdot h$,

则称 $(C,\cdot,\rho)$ 是右，左 H- 重模余代数，见文献 [5], [6].

设 C, D 都是右、左 H- 重模余代数．定义它们的 Smash 余积 $C\times D$ 如下：

$$C\times D=C\otimes D,\quad \Delta(c\times x)=\Sigma c_1\times x_1\cdot c_{2(-1)}\otimes c_{2(0)}\times x_2,$$

则由文献 [5] 知 Smash 余积 $C\times D$ 仍是右、左 H- 重模余代数，它的右 H- 模和左 H- 余模分别定义为

(DC1) $(c\times x)\leftharpoonup h=\Sigma c\cdot h_1\times x\cdot h_2$;

(DC2) $\rho(c\times x)=\Sigma c_{(-1)}x_{(-1)}\otimes c_{(0)}\times x_{(0)}$.

下面的引理见文献 [2] 中的命题 1.1.

引理 1.1 设 A 是左 H- 模代数，则 ${}_HA^0$ 是左 H^0- 余模余代数.

引理 1.2 设 A 是左、右 H- 重模代数，则 ${}_HA^0$ 是右、左 H^0- 重模余代数.

证明 由于 A 是左 H- 模代数，则由引理 1.1 知： ${}_HA^0$ 是左 H^0- 余模余代数，因此需要证明：

(1) ${}_HA^0$ 是右 H^0- 模余代数.

事实上，对任意 $f\in H^0, \alpha\in {}_HA^0$, 则存在 A 的余有限维左 H- 子模理想 I 和 H 的余有限维理想 J 使得 $\langle\alpha,I\rangle=0, \langle f,J\rangle=0$. 令 $L=\rho^{-1}(I\otimes H+A\otimes J)$. 则由 $\rho: A\to A\otimes H$ 是代数映射以及 $I\otimes H+A\otimes J$ 是 $A\otimes H$ 的余有限维理想知： L 是 A 的余有限维理想．进一步地，L 是 A 的左 H- 子模，这是由于

$$\rho(H\cdot L)\subseteq H\cdot L_{(0)}\otimes L_{(1)}\subseteq H\cdot I\otimes H+H\cdot A\otimes J\subseteq I\otimes H+A\otimes J.$$

而且

$$\begin{aligned}\langle\alpha\leftharpoonup f,L\rangle&=\langle\rho^*(\alpha\otimes f),L\rangle=\langle\alpha\otimes f,\rho(L)\rangle\\&=\langle\alpha\otimes f,I\otimes H+A\otimes J\rangle=\langle\alpha,I\rangle\langle f,H\rangle+\langle\alpha,A\rangle\langle f,J\rangle=0,\end{aligned}$$

因此 ${}_HA^0$ 是右 H^0- 模．不难证明 ${}_HA^0$ 是右 H^0- 模余代数.

(2) ${}_HA^0$ 是右、左 H^0- 重模.

它的证明是直接的.

引理 1.3[2,引理 1.1] 设 H 是双代数， A 和 B 均是代数．如果 A 和 B 均是左 H- 模，则张量积代数 $A\otimes B$ 仍是左 H- 模，它的左 H- 模定义为： $h\rightharpoonup(a\otimes b)=\Sigma h_1\cdot a\otimes h_2\cdot b$.

设 $\alpha\in(A\otimes B)^*$, 如果存在 A 的余有限维左 H- 子模理想 I 和 B 的余有限维左 H- 子模理想 J 使得 $\langle\alpha,I\otimes B+A\otimes J\rangle=0$, 则 $\alpha\in {}_HA^0\otimes {}_HB^0$.

定理 1.4 设 A,B 均是左、右 H- 重模代数， $A\#B$ 是它们的 Smash 积，则 $A\#B$ 的有限对偶 ${}_H(A\#B)^0$ 恰好是右、左 H^0- 重模余代数 ${}_HA^0, {}_HB^0$ 构成的 Smash 余积 ${}_HA^0\times {}_HB^0$, 即，有余代数同构： ${}_H(A\#B)^0\cong {}_HA^0\times {}_HB^0$.

证明 由引理 1.2 知： ${}_HA^0, {}_HB^0$ 都是右、左 H^0- 重模余代数，从而由文献 [5] 得到 Smash 余积 ${}_HA^0\times {}_HB^0$. 下面的证明分以下几个步骤：

(1) ${}_H(A\#B)^0 = {}_H A^0 \otimes_H B^0$.

事实上，对任意 $\alpha \in_H A^0, \beta \in_H B^0$, 则存在 A 的余有限维左 H- 子模理想 I 和 B 的余有限维左 H- 子模理想 J 使得 $\langle \alpha, I\rangle = 0$, $\langle \beta, J\rangle = 0$.

易证 $I\#B$ 是 $A\#B$ 的余有限维左 H- 子模理想，并且 $\langle \alpha\otimes\beta, I\#B\rangle = \langle\alpha, I\rangle\langle\beta, B\rangle = 0$, 因此 ${}_H A^0 \otimes_H B^0 \subseteq_H (A\#B)^0$.

反之，设 $\beta \in_H (A\#B)^0$, 则存在 $A\#B$ 的余有限维左 H- 子模理想 T 使得 $\langle\beta, T\rangle = 0$.

令 $I = \{a \in A | a\#1_B \in T\}$ 和 $J = \{b \in B | 1_A\#b \in T\}$, 则 I 和 J 分别是 A 和 B 的余有限维理想.

而且对任意 $h \in H, a \in I$, 有 $h\cdot a\#1_B = \Sigma h_1\cdot a\# h_2\cdot 1_B = h\cdot(a\#1_B) \in H\cdot T \subseteq T$, 因此 I 是 A 的左 H- 子模. 类似可证： J 也是 B 的左 H- 子模. 故 I 和 J 分别是 A 和 B 的余有限维左 H- 子模理想.

显然， $\beta \in_H (A\#B)^0 \subseteq (A\otimes B)^*$, 并且

$$I\#B + A\#J = (I\#1_B)(1_A\#B) + (A\#1_B)(1_A\#J) \subseteq T \subseteq A\otimes B$$

$$\langle \beta, I\#B + A\#J\rangle \subseteq \langle\beta, T\rangle = 0,$$

因此由引理 1.3 知： $\beta \in_H A^0 \otimes_H B^0$, 即， ${}_H(A\#H)^0 \subseteq_H A^0 \otimes_H B^0$. 故

$${}_H(A\#B)^0 = {}_H A^0 \otimes_H B^0.$$

(2) 存在余代数同构： ${}_H(A\#B)^0 \cong_H A^0 \times_H B^0$.

事实上，我们只要证明余代数 ${}_H(A\#B)^0$ 的余乘法 Δ 和余单位 ε 恰好是 Smash 余积 ${}_H A^0 \times_H B^0$ 的余乘法和余单位，即，对任意 $\alpha \in_H A^0, \beta \in_H B^0$, 有

$$\Delta(\alpha\times\beta) = \Sigma \alpha_1 \times \beta_1 \cdot \alpha_{2(-1)} \otimes \alpha_{2(0)} \times \beta_2,$$
$$\varepsilon(\alpha\times\beta) = \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta).$$

它的证明是直接的. □

例 1.5 设 (H,σ) 是辫化 Hopf 代数，则由文献 [5] 中的例 2.3 知： $(H, \rightharpoonup, \Delta)$ 是左、右 H-重模代数，其中左模作用 “ $\rightharpoonup$ ” 定义为 $h \rightharpoonup x = \Sigma\sigma(h, x_1)x_2, \Delta$ 是它的余乘法.

(1) 由引理 1.2 知 ${}_H H^0$ 是右、左 H^0- 重模余代数.

(2) 设 A 是左、右 H- 重模代数，如果 (H,σ) 是余可换的辫化 Hopf 代数，则由文献 [5] 中的推论 2.9 知：形成的 Smash 积 $A\#H$ 是左、右 H- 重模代数.

故由定理 1.4 知： Smash 余积 ${}_H A^0 \times_H H^0$ 是右、左 H^0- 重模余代数.

特别地， Smash 余积 ${}_H H^0 \times_H H^0$ 是右、左 H^0- 重模余代数.

2 量子 Yang-Baxter 模代数的新对偶

本节所考虑的 Hopf 代数 H 的对极映射 S 都是双射，它的逆映射记为 S^{-1}. H^{OP}, H^{COP} 分别表示 Hopf 代数 H 的反 Hopf 代数和反余 Hopf 代数.

设 $(A,\cdot,\rho)$ 既是左 H- 模代数又是右 $H^{OP}-$ 余模代数. 如果对任意 $h \in H, a \in A$ 满足如下条件：

(QA) $\rho(h\cdot a)=\Sigma h_2\cdot a_{(0)}\otimes h_3a_{(1)}S^{-1}(h_1)$,
则称 $(A,\cdot,\rho)$ 是左、右 H- 量子 Yang-Baxter 模代数.

设 A,B 都是左、右 H- 量子 Yang-Baxter 模代数. 定义它们的辫积 $A\propto B$ 如下：

$$A\propto B=A\otimes B,\quad (a\propto x)(b\propto y)=\Sigma ab_{(0)}\propto(b_{(1)}\cdot x)y,$$

则由文献 [4], [5] 知：辫积 $A\propto B$ 仍是左、右 H- 量子 Yang-Baxter 模代数，它的左 H- 模和右 H^{OP}- 余模分别定义为

(QA1) $h\rightharpoonup(a\propto x)=\Sigma h_1\cdot a\propto h_2\cdot x$;

(QA2) $\rho(a\propto x)=\Sigma a_{(0)}\propto x_{(0)}\otimes x_{(1)}a_{(1)}$.

设 $(C,\cdot,\rho)$ 既是右 $H^{\mathrm{COP}}-$ 模余代数又是左 H- 余模余代数. 如果对任意 $h\in H,c\in C$ 满足如下条件：

(QC) $\rho(c\cdot h)=\Sigma S^{-1}(h_3)c_{(-1)}h_1\otimes c_{(0)}\cdot h_2$,
则称 $(C,\cdot,\rho)$ 是右、左 H- 量子 Yang-Baxter 模余代数.

设 C,D 都是右、左 H- 量子 Yang-Baxter 模余代数. 定义它们的辫余积 $C\times D$ 如下：

$$C\times D=C\otimes D,\quad \Delta(c\times d)=\Sigma c_1\times d_{1(0)}\otimes c_2\cdot d_{1(-1)}\times d_2,$$

则由文献 [5] 知：辫余积 $C\times D$ 仍是右、左 H- 量子 Yang-Baxter 模余代数.

引理 2.1 设 A 是左、右 H- 量子 Yang-Baxter 模代数，则 ${}_HA^0$ 是右、左 H^0- 量子 Yang-Baxter 模余代数.

证明 由于 A 是左 H- 模代数，则由引理 1.1 知： ${}_HA^0$ 是左 H^0- 余模余代数，因此需要证明：

(1) ${}_HA^0$ 是右 $H^{0\mathrm{COP}}$- 模余代数，这里 $H^{0\mathrm{COP}}$ 表示 Hopf 代数 H^0 的反余 Hopf 代数.

事实上，对任意 $f\in H^{0\mathrm{COP}},\alpha\in_H A^0$, 则存在 A 的余有限维左 H- 子模理想 I 和 H 的余有限维理想 J 使得 $\langle\alpha,I\rangle=0,\langle f,J\rangle=0$. 令 $L=\rho^{-1}(I\otimes H^{\mathrm{OP}}+A\otimes J)$. 则由 $\rho:A\to A\otimes H^{\mathrm{OP}}$ 是代数映射以及 $I\otimes H^{\mathrm{OP}}+A\otimes J$ 是 $A\otimes H^{\mathrm{OP}}$ 的余有限维理想知： L 是 A 的余有限维理想. 进一步地， L 是 A 的左 H- 子模，这是由于

$$\begin{aligned}\rho(H\cdot L)&\overset{(\mathrm{QA})}{\subseteq}H\cdot L_{(0)}\otimes HL_{(1)}S^{-1}(H)\\&\subseteq H\cdot I\otimes HH^{\mathrm{OP}}S^{-1}(H)+H\cdot A\otimes HJS^{-1}(H)\\&\subseteq I\otimes H^{\mathrm{OP}}+A\otimes J.\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}\langle\alpha\leftharpoonup f,L\rangle&=\langle\rho^*(\alpha\otimes f),L\rangle=\langle\alpha\otimes f,I\otimes H^{OP}+A\otimes J\rangle\\&=\langle\alpha,I\rangle\langle f,H^{OP}\rangle+\langle\alpha,A\rangle\langle f,J\rangle=0,\end{aligned}$$

因此 ${}_HA^0$ 是右 $H^{0\mathrm{COP}}$- 模. 不难证明 ${}_HA^0$ 是右 $H^{0\mathrm{COP}}$- 模余代数.

(2) ${}_HA^0$ 是右、左 H^0- 量子 Yang-Baxter 模.

它的证明是直接的. □

定理 2.2 设 A, B 均是左，右 H- 量子 Yang-Baxter 模代数， $A \propto B$ 是辫积，则 $A \propto B$ 的有限对偶 ${}_H(A \propto B)^0$ 恰好是右，左 H^0- 量子 Yang-Baxter 模余代数 ${}_HA^0, {}_HB^0$ 构成的辫余积 ${}_HA^0 \times_H B^0$, 即，有余代数同构： ${}_H(A \propto B)^0 \cong_H A^0 \times_H B^0$.

证明 它的证明类似于定理 1.4, 读者自己证明.

例 2.3 设 H 是一个 Hopf 代数， $A = H^{\rm OP}$, 则由文献 [5] 中的例 4.4 知： $(A, \rightharpoonup, \Delta)$ 是左、右 H- 量子 Yang-Baxter 模代数，其中左模作用 " $\rightharpoonup$ " 定义为 $h \rightharpoonup a = \Sigma h_2 a S^{-1}(h_1)$.

(1) 由引理 2.1 知 ${}_HA^0$ 是右、左 H^0- 量子 Yang-Baxter 模余代数.

(2) 如果 H 是一个余可换 Hopf 代数，则由文献 [5] 中的例 4.5 知 $(H^*, \rightarrow, \rho)$ 是左、右 H- 量子 Yang-Baxter 模代数，其中 " $\rightarrow, \rho$" 分别定义为： $f \in H^*, h \in H$,

$$h \rightarrow f = \Sigma \langle f_3 S^{-1}(f_1), h \rangle f_2, \quad \rho(f) = f \otimes 1_H.$$

并且有辫积 $H^{\rm OP} \propto H^*$.

故由定理 2.2 得到辫余积 ${}_H(H^{\rm OP})^0 \times_H H^{*0}$. 由于辫积 $H^{\rm OP} \propto H^*$ 仍是左、右 H- 量子 Yang-Baxter 模代数, 所以由引理 2.1 知辫余积 ${}_H(H^{\rm OP})^0 \times_H H^{*0}$ 是右、左 H^0- 量子 Yang-Baxter 模余代数.

3 双模代数的新对偶

设 A 是 H- 双模代数，则由文献 [3] 得到 L-R Smash 积 $A\natural H$, 它是一个具有单位元 $1_A\natural 1_H$ 的结合代数，其乘法定义为 $(a\natural h)(b\natural g) = \Sigma(a \leftharpoonup g_2)(h_1 \rightharpoonup b)\natural h_2 g_1$.

本节的主要目的就是引入双模代数的新对偶概念，推广文献 [2] 中的一些结果，并给出 L-R Smash 积 $A\natural H$ 的对偶性质.

定义 3.1 设 H 是一个双代数， A 既是一个代数又是一个 H- 双模，它的双模作用分别表示为 " $\rightharpoonup$ ", " $\leftharpoonup$ ", 定义

$${}_HA_H{}^0 = \{a^* \in A^* | \langle a^*, I\rangle = 0, H \rightharpoonup I \leftharpoonup H \subseteq I, \text{其中 } I \text{ 为代数 } A \text{ 的余有限维理想}\}.$$

注 3.2 在定义 3.1 中,

(1) ${}_HA_H{}^0$ 也可以定义为

$${}_HA_H{}^0 = \{a^* \in A^* | \langle a^*, I\rangle = 0, \text{其中 } I \text{ 为代数 } A \text{ 的余有限维 } H\text{- 双子模理想}\}.$$

(2) 显然， ${}_HA_H{}^0 \subseteq A^0 = \{a^* \in A^* | \langle a^*, I\rangle = 0$, 其中 I 为代数 A 的余有限维理想 $\}$. 如果 A 的左、右 H- 模结构都是平凡的，即，对任意 $g, h \in H, a \in A$, $h \rightharpoonup a \leftharpoonup g = \varepsilon(h)\varepsilon(g)a$, 则 ${}_HA_H{}^0 = A^0$.

(3) 如果 A 的右 H- 模结构是平凡的，则 ${}_HA_H{}^0 =_H A^0$, 恰好是文献 [2] 中的对偶. 如果 A 的左 H- 模结构是平凡的，则 ${}_HA_H{}^0 = A_H{}^0$.

(4) 设 H 是双代数，则通过自身的乘法 H 是一个 H- 双模，而且 H 的余有限维理想 I 是 H 的余有限维 H- 双子模理想. 因此 ${}_HH_H{}^0 = H^0$.

(5) 如果 A 是有限维代数，则 ${}_HA_H{}^0 = A^*$.

引理 3.3 设 H 是双代数， A 和 B 均是代数. 如果 A 和 B 均是 H- 双模，则域 k 上的张量积代数 $A \otimes B$ 仍是 H- 双模，它的左、右 H- 模分别定义为：

$$h \rightharpoonup (a \otimes b) = \Sigma h_1 \rightharpoonup a \otimes h_2 \rightharpoonup b, (a \otimes b) \leftharpoonup h = \Sigma a \leftharpoonup h_1 \otimes b \leftharpoonup h_2.$$

并且有下列结论：

(1) 设 $\alpha \in (A\otimes B)^*$, 如果存在余有限维 H- 双子模理想 $I \subseteq A$ 和 $J \subseteq B$ 使得 $\langle \alpha, I\otimes B + A\otimes J\rangle = 0$, 则 $\alpha \in {}_H A_H{}^0 \otimes {}_H B_H{}^0$.

(2) ${}_H A_H{}^0 \otimes {}_H B_H{}^0 \subseteq {}_H(A\otimes B)_H{}^0$.

(3) 如果下列条件之一成立，则 ${}_H(A\otimes B)_H{}^0 = {}_H A_H{}^0 \otimes {}_H B_H{}^0$.

(i) Hopf 代数 H 的对极映射 S 是双射，它的逆映射记为 S^{-1}.

(ii) 对任意 $h, g \in H, h \rightharpoonup 1_A \leftharpoonup g = \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_A, h \rightharpoonup 1_B \leftharpoonup g = \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_B$.

证明 (1) 设 $\pi_1 : A \to A/I, \pi_2 : B \to B/J$ 是自然满同态，则存在唯一的线性映射 $\acute{\alpha} : A/I \otimes B/J \to k$ 使下图交换.

$$\begin{array}{ccc} A\otimes B & \xrightarrow{\alpha} & k \\ \pi_1\otimes\pi_2 \searrow & & \nearrow \acute{\alpha} \\ & A/I\otimes B/J & \end{array}$$

由于 $\dim A/I < \infty, \dim B/J < \infty$, 所以

$$\acute{\alpha} \in (A/I\otimes B/J)^* \cong (A/I)^* \otimes (B/J)^*.$$

令 $\acute{\alpha} = \Sigma \acute{\alpha}'_i \otimes \acute{\alpha}''_i \in (A/I)^* \otimes (B/J)^*$, 记 $\alpha'_i = \acute{\alpha}'\pi_1, \alpha''_i = \acute{\alpha}''_i\pi_2$, 则容易证明 $\alpha'_i \in {}_H A_H{}^0, \alpha''_i \in {}_H B_H{}^0$, 这是由于 H- 双子模理想 I 和 J 使得 $\langle \alpha'_i, I\rangle = 0$, $\langle \alpha''_i, J\rangle = 0$. 因此

$$\alpha = \acute{\alpha}(\pi_1\otimes\pi_2) = \Sigma \alpha'_i \otimes \alpha''_i \in {}_H A_H{}^0 \otimes {}_H B_H{}^0.$$

(2) 设 $\alpha \in {}_H A_H{}^0, \beta \in {}_H B_H{}^0$, 则存在余有限维 H- 双子模理想 I 和 J 使得

$$\langle \alpha, I\rangle = 0,\ \langle \beta, J\rangle = 0.$$

显然，$I\otimes B + A\otimes J$ 是 $A\otimes B$ 的余有限维 H- 双子模理想. 因为 $\langle \alpha\otimes\beta, I\otimes B + A\otimes J\rangle = 0$, 所以 $\alpha\otimes\beta \in {}_H(A\otimes B)_H{}^0$, 即， ${}_H A_H{}^0 \otimes {}_H B_H{}^0 \subseteq {}_H(A\otimes B)_H{}^0$.

(3) 设 $\alpha \in {}_H(A\otimes B)_H{}^0$, 则存在 $A\otimes B$ 的余有限维 H- 双子模理想 T 使得 $\langle \alpha, T\rangle = 0$.

令 $I = \{a \in A | a\otimes 1_B \in T\}, J = \{b \in B | 1_A \otimes b \in T\}$, 则 I 和 J 分别是 A 和 B 的余有限维理想，并且 $I\otimes B + A\otimes J \subseteq T$.

(i) 若 Hopf 代数 H 的对极映射 S 是双射，则对任意 $a \in I, b \in J, g, h \in H$, 有

$$\begin{aligned} h \rightharpoonup a \leftharpoonup g \otimes 1_B &= \Sigma h_1 \rightharpoonup a \leftharpoonup g_1 \otimes h_2 S(h_3) \rightharpoonup 1_B \leftharpoonup S^{-1}(g_3)g_2 \\ &= \Sigma h_1 \rightharpoonup (a\otimes S(h_2) \rightharpoonup 1_B \leftharpoonup S^{-1}(g_2)) \leftharpoonup g_1 \\ &\in H \rightharpoonup (I\otimes B) \leftharpoonup H \subseteq T \\ 1_A \otimes h \rightharpoonup b \leftharpoonup g &= \Sigma h_2 S^{-1}(h_1) \rightharpoonup 1_A \leftharpoonup S(g_1)g_2 \otimes h_3 \rightharpoonup b \leftharpoonup g_3 \\ &= \Sigma h_2 \rightharpoonup (S^{-1}(h_1) \rightharpoonup 1_A \leftharpoonup S(g_1) \otimes b) \leftharpoonup g_2 \\ &\in H \rightharpoonup (A\otimes J) \leftharpoonup H \subseteq T, \end{aligned}$$

即， $H \rightharpoonup I \leftharpoonup H \subseteq I, H \rightharpoonup J \leftharpoonup H \subseteq J$, 因此 I 和 J 都是 H- 双子模理想.

(ii) 若对任意 $h, g \in H, h \rightharpoonup 1_A \leftharpoonup g = \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_A, h \rightharpoonup 1_B \leftharpoonup g = \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_B$, 则对任意 $a \in I, b \in J$, 有

$$h \rightharpoonup a \leftharpoonup g \otimes 1_B = \Sigma h_1 \rightharpoonup a \leftharpoonup g_1 \otimes h_2 \rightharpoonup 1_B \leftharpoonup g_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \Sigma h \rightharpoonup (a \otimes 1_B) \leftharpoonup g \in T, \\
1_A \otimes h \rightharpoonup b \leftharpoonup g &= \Sigma h_1 \rightharpoonup 1_A \leftharpoonup g_1 \otimes h_2 \rightharpoonup b \leftharpoonup g_2 \\
&= \Sigma h \rightharpoonup (1_A \otimes b) \leftharpoonup g \in T.
\end{aligned}
$$

即, $H \rightharpoonup I \leftharpoonup H \subseteq I, H \rightharpoonup J \leftharpoonup H \subseteq J$, 因此 I 和 J 都是 H- 双子模理想.

容易看到 $I \otimes B + A \otimes J$ 是 $A \otimes B$ 的余有限维 H- 双子模理想，并且 $\langle \alpha, I \otimes B + A \otimes J\rangle \subseteq \langle \alpha, T\rangle = 0$, 所以由 (1) 知： $\alpha \in {}_HA_H{}^0 \otimes {}_HB_H{}^0$, 即， ${}_H(A \otimes B)_H{}^0 = {}_HA_H{}^0 \otimes {}_HB_H{}^0$.

在引理 3.3 中，如果 A 是 H- 双模代数，则有

推论 3.4 设 H 是双代数， A 是 H- 双模代数，则 ${}_H(A \otimes A)_H{}^0 = {}_HA_H{}^0 \otimes {}_HA_H{}^0$.

命题 3.5 设 H 是双代数， A 是一个代数，具有结构映射 $m_A : A \otimes A \to A$. 如果 A 是 H- 双模，则 $m_A^*({}_HA_H{}^0) \subseteq {}_HA_H{}^0 \otimes {}_HA_H{}^0$. 因此 ${}_HA_H{}^0$ 是一个余代数.

证明 读者直接证明.

命题 3.6 设 H 是双代数， A 是一个代数和一个 H- 双模，具有左、右 H- 模结构映射 $\varphi_- : H \otimes A \to A, \varphi_+ : A \otimes H \to A$, 则 $\varphi_-^*({}_HA_H{}^0) \subseteq H^0 \otimes {}_HA_H{}^0$. 因此 ${}_HA_H{}^0$ 是左 H^0- 余模，具有左 H^0- 余模结构映射 $\rho_- = \varphi_-^*|_{{}_HA_H{}^0} : {}_HA_H{}^0 \to H^0 \otimes {}_HA_H{}^0$. 同样地， ${}_HA_H{}^0$ 是右 H^0- 余模，具有右 H^0- 余模结构映射 $\rho_+ = \varphi_+^*|_{{}_HA_H{}^0} : {}_HA_H{}^0 \to {}_HA_H{}^0 \otimes H^0$. 故 ${}_HA_H{}^0$ 是 H^0- 双余模.

特别地，如果 A 是 H- 双模代数，则 ${}_HA_H{}^0$ 是 H^0- 双余模余代数.

证明 读者直接证明.

注 3.7 (1) 设 H 是双代数， A 和 B 均是代数和 H- 双模，则由引理 3.3(2) 知： ${}_HA_H{}^0 \otimes {}_HB_H{}^0 \subseteq {}_H(A \otimes B)_H{}^0$. 再由命题 3.5 和命题 3.6 知 ${}_HA_H{}^0 \otimes {}_HB_H{}^0$ 是 ${}_H(A \otimes B)_H{}^0$ 的子余代数和 H^0- 双子余模.

(2) 设 $f : A \to B$ 既是代数同态又是 H- 双模同态，则 $f^*({}_HB_H{}^0) \subseteq {}_HA_H{}^0$.

事实上，由命题 3.5 和命题 3.6 不难证明.

由命题 3.5, 3.6 和注 3.7 可以证明

命题 3.8 设 H 和 A 均是双代数. 如果 A 是 H- 双模余代数，则 ${}_HA_H{}^0$ 是双代数，且是 H^0- 双余模代数.

特别地，如果 A 是 H- 双模双代数 (即， A 既是 H- 双模代数又是 H- 双模余代数), 则 ${}_HA_H{}^0$ 是 H^0- 双余模双代数.

推论 3.9 设 H 是双代数， A 是 H- 双模余代数. 如果 A 是 Hopf 代数，则 ${}_HA_H{}^0$ 也是 Hopf 代数.

证明 由注 3.7 和命题 3.8 可以证明.

注 3.10 以上结论均推广了文献 [2] 中的相应结论.

设 A 是 H- 双模代数，则由命题 3.6 知： ${}_HA_H{}^0$ 是 H^0- 双余模余代数，从而构成文献 [3] 中的 L-R Smash 余积 ${}_HA_H{}^0 \natural H^0$. 以下，我们给出它的正合序列.

命题 3.11 设 H 是 Hopf 代数， A 是 H- 双模代数，则存在正合序列：

$$
0 \to {}_HA_H{}^0 \natural H^0 \overset{i}{\hookrightarrow} (A \natural H)_H{}^0.
$$

这里， H 的右 H- 模结构通过右伴随作用给出： $h \leftharpoonup x = \Sigma S(x_1) h x_2; A \natural H$ 的右 H- 模结构按通常方式定义： $(a \natural h) \leftharpoonup x = \Sigma a \leftharpoonup x_1 \natural h \leftharpoonup x_2$, 则由文献 [2] 中的引理 1.2 知 $(A \natural H)_H{}^0$ 是余代

数.

证明 L-R Smash 余积 ${}_HA_H{}^0\natural H^0$ 的余乘法和余单位定义如下：对任意 $\alpha\in {}_HA_H{}^0, f\in H^0$,

$$\Delta(\alpha\natural f)=\Sigma\alpha_{1(0)}\natural\alpha_{2(-1)}f_1\otimes\alpha_{2(0)}\natural f_2\alpha_{1(1)},$$
$$\varepsilon(\alpha\natural f)=\varepsilon(\alpha)\varepsilon(f).$$

这里， $\Delta(\alpha)=\Sigma\alpha_1\otimes\alpha_2, \Delta(f)=\Sigma f_1\otimes f_2, \rho_-(\alpha)=\Sigma\alpha_{(-1)}\otimes\alpha_{(0)}, \rho_+(\alpha)=\Sigma\alpha_{(0)}\otimes\alpha_{(1)}$.

下面，我们只要证明： (1) ${}_HA_H{}^0\natural H^0\subseteq (A\natural H)^0_H$; (2) 映射 $i: {}_HA_H{}^0\natural H^0\to (A\natural H)_H{}^0$ 是余代数映射.

它的证明是直接的，读者可以自己证明.

由命题 3.11 的证明，我们有

问题 3.12 设 H 是 Hopf 代数， A 是 H- 双模代数，则存在正合序列：

$$0\to {}_HA_H{}^0\natural H^0\to (A\natural H)_H{}^0\to 0.$$

致谢 本工作的部分是作者张良云访问阿根廷 Ciudad 大学期间完成的，得到 Nicolas Andruskiewitsch 教授的关心与帮助.

参考文献：

[1] MONTOGOMERY S. *Hopf Algebras and Their Actions on Rings* [M]. Cbms. Lect. Notes, 1993.
[2] 张良云，陈惠香. Smash 积代数和量子模范畴中的 Hopf 代数的新对偶 [J]. 数学年刊 (A 辑), 2003, **24**(4): 473–482.
ZHANG Liang-yun, CHEN Hui-xiang. *New dualities of smash product algebras and Hopf algebras in the category of Yetter-Drinfel'd modules* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 2003, **24**(4): 473–482. (in Chinese)
[3] PANAITE F, OYSTAEYEN F V. *L-R smash product for (quasi) Hopf algebras* [J]. J. Algebra, 2007, **309**: 168–191.
[4] CAENEPEEL S, OYSTAEYEN F V, ZHANG Y H. *Quantum Yang-Baxter module algebras* [J]. *K*-Theory, 1994, **8**(3): 231–255.
[5] ZHANG Liang-yun, TONG Wen-ting. *Quantum Yang-Baxter H-module algebras and their braided products* [J]. Comm. Algebra, 2003, **31**(5): 2471–2495.
[6] ZHANG Liang-yun. *Long bialgebras, dimodule algebras and quantum Yang-Baxter modules over Long bialgebras* [J]. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 2006, **22**(4): 1261–1270.

The New Dual of Smash Products, Braided Products and L-R Smash Products

ZHANG Liang-yun, LI Qiang
(College of Science, Nanjing Agricultural University, Jiangsu 210095, China)

Abstract: In this paper, we prove that the new dual ${}_H(A\#B)^0$ of the Smash product $A\#B$ introduced by dimodule algebras A and B is a Smash coproduct ${}_HA^0\times_H B^0$ introduced by dimodule coalgebras ${}_HA^0$ and ${}_HB^0$. If (H,σ) is a braided Hopf algebra, we show that ${}_HH^0$ is a right, left H^0-dimodule coalgebra, and then prove that the new dual ${}_H(A\propto B)^0$ of the braided product $A\propto B$ introduced by quantum Yang-Baxter module algebras A and B is a braided coproduct ${}_HA^0\times_H B^0$ introduced by quantum Yang-Baxter module coalgebras ${}_HA^0$ and ${}_HB^0$. An exact sequence of the new dual $(A\natural H)_H{}^0$ of the L-R Smash product $A\natural H$ is given.

Key words: dimodule algebra; quantum Yang-Baxter module algebra; Smash product; briaided product; L-R Smash product.