文章编号: 1000-341X(2007)03-0586-05 **文献标识码**: A

分次环的分次 Excellent 扩张

任艳丽, 王尧
(南京晓庄学院数学系, 江苏 南京 210017)
(E-mail: wangy@njxzc.edu.cn)

摘 要: 本文引进了分次环的分次 Excellent 扩张概念. 设 $S=\bigoplus_{g\in G}S_g$ 是 $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 的分次 Excellent 扩张, 证明了 S 是分次右 V- 环当且仅当 R 是分次右 V- 环, S 是分次 PS- 环当且仅当 R 是分次 PS- 环, S 是分次 Von Neumann 正则环当且仅当 R 是分次 Von Neumann 正则环.

关键词: 分次 Excellent 扩张; 分次右 V- 环; 分次 PS- 环; 分次 Von Neumann 正则环.
MSC(2000): 16W50
中图分类: O153.3

本文所讨论的分次环均假定有单位元, 分次模均为右酉模, G 是任意群. 当 $A=\bigoplus_{g\in G}A_g$ 是 G- 分次环, $M=\bigoplus_{g\in G}M_g$ 是 G- 分次 A- 模时, 以 $h(A)=\bigcup_{g\in G}A_g$ 和 $h(M)=\bigcup_{g\in G}M_g$ 分别表示 A 和 M 的齐次元素集, 以 $N\leq_{gr}M$ 表示 N 是 M 的分次子模, $N\mid_{gr}M$ 表示 N 是 M 的分次直和项, $\mathrm{Soc}_{gr}(M)$ 表示 M 的分次基座. 以 $J_G(A)$ 和 $r_G(A)$ 分别表示分次环 A 的分次 Jacobson 根和分次 Von Neumann 正则根. $A\cong_{gr}B$ 表示 A 与 B 是分次同构的. gr-A 表示分次右 A- 模范畴. 文中未交待的概念与其它符号, 其意义均同文献 [1].

定义 1 设 $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 是 $S=\bigoplus_{g\in G}S_g$ 的分次子环, R 与 S 有相同的单位元 1. 说 S 是 R 的分次 Excellent 扩张, 如果以下两条成立:

(1) S 是 R 的具有包含元素 1 的分次基的自由分次正规扩张: 即存在 $h(S)$ 的有限集合 $\{a_1,\ldots,a_n\}$, 使得 $a_1=1, S=a_1R+\cdots+a_nR, a_iR=Ra_i, i=1,\ldots,n$, 并且 S 是以 $a_1,\ldots,a_n$ 为齐次基的分次自由左和右 R- 模.

(2) S 是分次 R- 投射的: 即如果 $N_s\leq_{gr}M_s\in gr$-S, 则由 $N_R\mid_{gr}M_R$ 可推出 $N_S\mid_{gr}M_S$.

命题 2 设 $S=\bigoplus_{g\in G}S_g$ 是 $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 的分次 Excellent 扩张, $M\in gr$-S, 则 M_S 是分次 S- 内射的 $\Leftrightarrow$ M_R 是分次 R- 内射的.

证明 由于嵌入映射 $i:R\to S$ 是分次环单同态, S_R 是分次自由右 R- 模, 因而是分次平坦 R- 模, 所以当 M_R 是分次 S- 内射模时, M_R 必为分次内射 R- 模. 反之, 设 M_R 是分次内射 R- 模. 熟知, M_R 是分次内射模当且仅当 M_R 是 N_R 的分次子模时必有 $M_R\mid_{gr}N_R$. 设 N_S 是任意的分次右 S- 模且 $M_S\leq_{gr}N_S$, 则 $M_R\leq_{gr}N_R$. 所以 $M_R\mid_{gr}N_R$. 因为 S 是 R 的分次 Excellent 扩张, 故 $M_S\mid_{gr}N_S$. 这说明 M_S 是分次内射的右 S- 模.

命题 3 设 $S=\bigoplus_{g\in G}S_g$ 是 $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 的分次 Excellent 扩张, $N_S=\bigoplus_{g\in G}N_g$ 是 $M_S=\bigoplus_{g\in G}M_g$ 的分次子模, 则 N_R 是 M_R 的分次本质子模 $\Leftrightarrow$ N_S 是 M_S 的分次本质子模.

收稿日期: 2005-06-07; **接受日期**: 2006-07-02
基金项目: 国家自然科学基金 (10471055); 辽宁省教育厅科学研究基金 (05L014).

证明 “ $\Leftarrow$ ”. 显然.

“ $\Rightarrow$ ”. 设 N_S 是 M_S 的分次本质子模. 取 T_R 是 M_R 的一个满足 $T_R \cap N = 0$ 的极大分次子模. 对每一个 $i = 1, \ldots, n$, 令 $J(i) = \{m \in M : ma_i \in N_R \oplus T_R\}$. 我们下证 $J(i)_R$ 是 M_R 的分次本质子模. 如果 L_R 是 M_R 的一个分次子模且 $L_R a_i = 0$, 则 $L_R \subseteq J(i)$. 另一方面，如果 $L_R a_i \neq 0$, 则由 $N_R \oplus T_R$ 是 M_R 的分次本质子模知 $L_R a_i \cap (N_R \oplus T_R) \neq 0$, 故 $L_R \cap J(i) \neq 0$. 于是有 $J_R = \bigcap_{i=1}^n J(i)$ 是 M_R 的分次本质子模，而且对 $i = 1, \ldots, n, Ja_i \subseteq J(i)$, 所以 J 是 M 的一个分次 S- 子模. 因为 $N \subseteq J \subseteq N \oplus T, J = N \oplus (T \cap J), S$ 是分次 R- 投射的，故有 $N_S \mid_{gr} J_S$. 但 N_S 是 M_S 的分次本质子模，所以 $N = J$, 这证明了 N_R 是 M_R 的分次本质子模.

推论 4 设 $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ 是 $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ 的 Excellent 扩张， $M = \bigoplus_{g \in G} M_g \in gr\text{-}S$, 则 M_S 的分次 S- 内射包看成 R- 模时就是 M_R 的分次 R- 内射包.

证明 由于 $M_S(M_R)$ 是分次 S- 模 A_S(R- 模 A_R) 的分次 S- 内射包 (R- 内射包) 当且仅当 $M_S(M_R)$ 是分次 S- 模 A_S(R- 模 A_R) 的分次本质扩模和分次内射模，故由命题 2 和命题 3 即得结论.

定义 5 一个 G- 分次环 $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ 称为分次右 V- 环，如果对任何 $M \in gr\text{-}A$, M 的一切极大分次 A- 子模的交等于 0.

命题 6 设 $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ 是 $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ 的分次正规扩张环，即 R 是 S 的分次子环, R 与 S 具有同一单位元 1, 且存在齐次元 $a_1, \ldots, a_n \in h(S)$ 使得 $S = \sum_{i=1}^n Ra_i, a_i R = Ra_i, i = 1, \ldots, n$. 如果 $M = \bigoplus_{g \in G} M_g \in gr\text{-}S$ 是分次单模，则 $M \in gr\text{-}R$ 是分次半单模.

证明 设 $N \leq M$ 是 $M \in gr\text{-}R$ 的一个极大真分次子模. 对 $\forall i = 1, \ldots, n$, 令 $N_i = (N : a_i) = \{m \in M \mid ma_i \in N\}$. 由于 $a_i R = Ra_i$, 易见每个 N_i 都是 $M \in gr\text{-}R$ 的分次子模. 实际上，如果 $N_i \neq M$, 则 N_i 还是 $M \in gr\text{-}R$ 的极大分次子模. 这是因为，如果 $m \in M \backslash N_i$, 则 $ma_i \notin N$, 于是有 $M = N + ma_i R = N + mRa_i$. 任取 $m' \in M$, 则有 $m'a_i = v + ua_i$, 其中 $v \in N, u \in mR$, 故有 $(m' - u)a_i = v \in N$, 这说明 $m' - u \in N_i$, 因而 $m' \in N_i + mR$. 这就证明了 $M = N_i + mR, N_i$ 是 M_R 的极大分次子模. 再令 $L = \bigcap_{i=1}^n N_i$. 设 $m \in L, s = \sum_{i=1}^n a_i r_i \in S$, 其中 $r_i \in R, i = 1, \ldots, n$. 则有 $ms = \sum_{i=1}^n ma_i r_i \in N$. 这样我们知，如果 $L \neq 0$, 则 $0 \neq LS \subseteq N$, 因而 $LS \neq M$. 但 LS 是 $M \in gr\text{-}S$ 的分次子模，由 $M \in gr\text{-}S$ 是分次单模知又该有 $LS = M$, 从而有 $N = M$. 这与 N 是 M 的极大真分次子模矛盾. 故必 $L = 0$. 于是 $M \cong_{gr} M/0 \cong_{gr} \bigoplus_{j=1}^{n'} M/N_{ij}$, 其中 N_{ij} 是 $\{N_i\}$ 中不等于 M 者，因而 M/N_{ij} 是分次 R- 单模， $M \in gr\text{-}R$ 是分次半单 R- 模.

推论 7 设 $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ 是 $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ 的分次正规扩张， $I = \bigoplus_{g \in G} I_g$ 是 S 的一个分次本原理想，则有

(1) $I \cap R$ 是 R 的一些分次本原理想的交;

(2) $J_G(G) \subseteq J_G(S) \cap R$.

证明 (1) 由分次本原理想的定义及命题 6 立知.

(2) 据 [2] 之定理 3.8 知 $J_G(A)$ 是分次环 A 的一切分次本原理想之交，故由 (1) 即证结论.

命题 8 设 $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ 是 $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ 的分次 Excellent 扩张，$M = \bigoplus_{g \in G} M_g \in S\text{-}gr$, 则 $\mathrm{Soc}_{gr}(M_S) = \mathrm{Soc}_{gr}(M_R)$.

证明 由于一个分次模的分次基座等于该分次模的一切分次本质子模之交，故由命题 3 有 $\mathrm{Soc}_{gr}(M_R) \subseteq \mathrm{Soc}_{gr}(M_S)$. 另一方面，由于一个分次模的分次基座也等于该分次模的一切分次单子模之和，所以当 $T_S \in gr\text{-}S$ 是分次单模时，由命题 6 知 $T_R \in gr\text{-}R$ 是分次半单的，即 T_R 是分次单 R- 子模之直和，这样就有 $\mathrm{Soc}_{gr}(M_S) \subseteq \mathrm{Soc}_{gr}(M_R)$.

定理 9 设 $S=\bigoplus_{g\in G}S_g$ 是 $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 的分次 Excellent 扩张，则 S 是分次右 V- 环的充要条件是 R 是分次右 V- 环.

证明 假定 S 是分次右 $V-$ 环， $M_R\in gr-R$, 则分次张量积 $M\bigotimes_R S$ 是一个分次右 S-模，因而其一切极大分次 S- 子模的交等于 0. 对于 $M\bigotimes_R S$ 的任一极大分次子模 N_S, 下证 $N_S\cap(M\bigotimes_R 1)$ 是分次 R- 模 M_R 的一些极大分次子模的交. 由 $S=1R+a_2R+\ldots+a_nR$ 知 $(M/M\cap N)_R\cong_{gr}(M+N/N)_R$ 分次同构于 $(M\bigotimes_R S)/N$ 的一个分次 R- 模 $M\bigotimes_R 1/N$. 但 $M\bigotimes_R 1/N$ 作为右 S- 模是分次单的，依命题 6 知 $M\bigotimes_R 1/N$ 作为分次 R- 模是分次半单的，从而 $(M/M\cap N)_R$ 是分次半单 R- 模, 因而 $M\cap N$ 是 M_R 的一些极大分次子模的交，从而 M_R 的一切极大分次右 S- 子模之交也等于 0, 即 R 是分次右 V- 环.

反之，假定 R 是一个右 V- 环， $M_S\in gr\text{-}S$, 则作为分次 R- 模 M_R, M_R 的一切分次极大 R-子模之交等于 0. 现在设 T_R 是 M_R 的任一极大分次子模，令 $T(i)=\{m\in M\mid ma_i\in T\}, i=1,2,\ldots,n, T^*=\bigcap_{i=1}^n T(i)$. 下证 T^* 是 M_S 的一些极大分次子模的交. 由于每个 $M/T(i)$ 是分次单 R- 模，故 $M/T^*\cong_{gr}\bigoplus_{i=1}^n M/T(i)$ 是分次半单 R- 模. 但 T^* 是一个分次 S- 模， S 是分次 R- 投射的，所以 M/T^* 是一个分次半单 S- 模，因而 S 也是一个右 V- 环.

定义 10 设 $A=\bigoplus_{g\in G}A_g$ 是 G- 分次环， $M=\bigoplus_{g\in G}M_g$ 是一个 G- 分次右 A- 模. 称 M 为 (右) 分次 PS- 模，如果 $\mathrm{Soc}_{gr}(M_A)$ 是分次投射模. 称 A 为 (右) 分次 PS- 环，如果 A_A 是分次 PS- 模.

例 11 任何分次投射的半单模是分次 PS- 模.

例 12 每一个分次非奇异模是分次 PS- 模.

事实上, 设 $M=\bigoplus_{g\in G}M_g$ 是分次非奇异的分次单 A- 模, 则有 $Z_G(M_A)=\{m\in M\mid r_A(m)$ 是 A 的分次本质右理想 $\}=0$, 于是对任何 $0\neq m\in h(M), M=mA, r_A(m)$ 是 A 的分次极大右理想，但不是 A 的分次本质右理想，故有 A 的某个分次右理想 $I\neq 0$ 使得 $r_A(m)\cap I=0$, 从而 $A_A=r_A(m)\oplus I, M\cong_{gr} I$ 是分次投射右 A- 模.

例 13 一些分次 PS- 模的分次直和是分次 PS- 模. 分次 PS- 模的分次子模是分次 PS-模. 分次 PS- 模的分次本质扩张模是分次 PS- 模.

定理 14 设 $S=\bigoplus_{g\in G}S_g$ 是 $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 的分次 Excellent 扩张，则 S 是分次 PS- 环当且仅当 R 是分次 PS- 环.

证明 “$\Rightarrow$”. 设 $\mathrm{Soc}_{gr}(S_S)$ 是分次投射右 S- 模， I 是 R 的一个极小分次右理想，则有 $0\neq r\in h(I)$ 使得 $I=rR$. 对 $\forall i=1,\ldots,n, rRa_i$ 是 R 的分次单模，故 $rS=\bigoplus_{i=1}^n rRa_i$ 是分次半单 R- 模. 这样，由 S 是分次 R- 投射的知 rS 的任何分次 S- 子模是 S_S 的分次直和项，因而 rS 是一个分次半单 S- 模. 依据 [1], 由于 $\mathrm{Soc}_{gr}(S_S)$ 是分次投射模知， rS 是某个分次自由 S- 模 $F\in gr\text{-}S$ 的分次直和项. 设 F 的齐次基为 $\{f_i\mid i\in W\}\subseteq h(F)$, 则有 $F=\bigoplus_{i\in W}f_iS=\bigoplus_{i\in W}f_i(\bigoplus_{j=1}^n a_jR)=\bigoplus_{i\in W}\bigoplus_{j=1}^n(f_ia_j)R$, 故 F 也是一个分次自由 R- 模. 又由于 $a_1=1$, 所以 $rR=rRa_1$ 是分次 r- 模 rS 的分次直和项. 这证明了 rR 是一个分次自由模 F 的分次直和项，因而 rR 是分次投射 R- 模，所以 $\mathrm{Soc}_{gr}(R_R)$ 是分次投射 R- 模.

“$\Leftarrow$”. 设 $\mathrm{Soc}_{gr}(R_R)$ 是分次投射 R- 模，J 是 S 的一个分次极小右理想, 则有 $0\neq u\in h(J)$ 使得 $J=uS$. 据命题 6 知 uS 是分次半单 R- 模. 由于 $\mathrm{Soc}_{gr}(R_R)$ 是分次投射 R- 模，故存在分次自由 R- 模 F 和 F 的一个分次子模 M 使得 $F=uS\oplus M$. 这样就有分次模张量积 $F\bigotimes_R S=(uS\oplus M)\bigotimes_R S\cong_{gr}(uS\bigotimes_R S)\oplus(M\bigotimes_R S)$. 又设 $F\cong_{gr}\bigoplus_{\sigma\in W}R(\sigma)(W\subseteq G)$, 则有 $F\bigotimes_R S\cong_{gr}(\bigoplus_{\sigma\in W}R(\sigma))\bigotimes_R S\cong_{gr}\bigoplus_{\sigma\in W}(R(\sigma)\bigotimes_R S)\cong_{gr}\bigoplus_{\sigma\in W}S(\sigma)$, 故 $F\bigotimes_R S$ 是

一个分次自由 S- 模．又，当把 uS 作为分次右 R- 模时，我们有 $uS\bigotimes_R S=\bigoplus_{i=1}^n uS\bigotimes_R a_i$. 因为 $a_1=1$, 故 $uS\cong_{gr} uS\bigotimes_R 1$ 是分次 R- 模 $F\bigotimes_R S$ 的分次直和项．由于 S 是分次 R- 投射的，所以 uS 也是分次 S- 模 $F\bigotimes_R S$ 的分次直和项，因而 uS 是一个分次投射 S- 模．这样就得 $\mathrm{Soc}_{gr}(S_S)$ 是分次投射 S- 模.

定义 15 G- 分次环 $A=\bigoplus_{g\in G}A_g$ 中的齐次元 $x\in R_g\subseteq h(A)$ 称为 A 的 gr-(Von Neumann) 正则元，如果存在 $y\in R_{g^{-1}}\subseteq h(R)$ 使得 $x=xyx$. A 的一个 G- 分次理想 $I=\bigoplus_{g\in G}I_g$ 称为 gr- 正则理想，如果 $h(I)$ 中每个齐次元都是 I 的 gr- 正则元．每个 G- 分次环 A 都有唯一一个极大 gr- 正则理想 $r_G(A)$, 使得 $A/r_G(A)$ 不再含有非零 gr- 正则理想． $r_G(A)$ 称为 A 的 gr- 正则根 [3]. 如果 $A=r_G(A)$, 则称 A 为 gr- 正则环.

命题 16 设 $A=\bigoplus_{g\in G}A_g$ 是 G- 分次环， $M=\bigoplus_{i=1}^n m_iA$ 是一个有限齐次生成的自由分次 A- 模．如果 $I=\bigoplus_{g\in G}I_g$ 是 A 的一个分次正则理想， N 是 M 的有限齐次生成的分次 A-子模，且 $N\subseteq MI$, 则 $N\,|_{gr}\,M$.

证明 我们可以假定 N 有不多于 n 个的齐次生成元. 于是存在唯一一个 $f\in\mathrm{HOM}_A(M,MI)$[1] 使得 $f(M)=N$. 注意到 $MI=\bigoplus_{i=1}^n m_iAI\subseteq\bigoplus_{i=1}^n m_iI, f\in\mathrm{HOM}_A(M,MI)$ 由 $f(m_1),\dots,f(m_n)$ 所唯一确定．若令 $f(m_i)=\sum_{j=1}^n m_ja_{ij}$, 其中 $a_{ij}\in I, i,j=1,\dots,n$, 则有 [6]

$$f(m_1,\dots,m_n)=(m_1,\dots,m_n)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{n1}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{1n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\quad (a_{ij})_{n\times n}\in M_{n\times n}(I)_{gr}=\bigoplus_{g\in G}(I_g)_{n\times n}$$

由于 $I=\bigoplus_{g\in G}(I_g)$ 是分次正则环，故 G- 分次环 $M_{n\times n}(I)_{gr}=\bigoplus_{g\in G}(I_g)_{n\times n}$ 也是分次正则环 [4]. 这样就知存在 $g\in\mathrm{HOM}_A(M,MI)$ 使得 $fgf=f$. 于是有 $(fg)^2=fg$ 和 $fg(M)=f(M)=N$, 所以 $N\,|_{gr}\,M$.

命题 17 设 $S=\bigoplus_{g\in G}S_g$ 是 $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 的分次 Excellent 扩张，则有 $r_G(R)=R\cap r_G(S)$.

证明 由于 $S=a_1R+\cdots+a_nR$, 故知 $S.\ r_G(R)$ 是 S 的一个分次理想. 任取 $x\in h(S.r_G(R))$, 则 $x.S=xa_1R+\cdots+xa_nR$ 是一个有限齐次生成的分次 R- 模，且 $xS\subseteq S.r_G(R)$. 据命题 16 知，作为分次 R- 模有 $xS\,|_{gr}\,S$. 由于 S 是分次 R- 投射的，故作为分次 S- 模亦有 $(xS)_S\,|_{gr}\,S_S$. 这样就知 x 是齐次正则元， $S.r_G(R)$ 是 S 的 gr- 正则理想，故 $S.r_G(R)\subseteq r_G(S)$, 从而有 $r_G(R)\subseteq R\cap r_G(S)$. 另一方面，设 $y\in h(R\cap r_G(S))$, 则有某 $t\in h(S)$ 使得 $y=yty$. 由于 $t=a_1r_1+\cdots+a_nr_n=r_1+\cdots+a_nr_n$, 其中 $r_1,\dots,r_n\in h(R)$, 故有

$$y=y(r_1+\cdots+a_nr_n)y=y_1r_1y+\cdots+ya_nr_ny. \tag{1}$$

对于 $i\geq 2$, 由 $a_iR=Ra_i$ 知存在 $y_i\in h(R)$ 使得 $ya_i=a_iy_i$, 于是 (1) 式为

$$1\cdot(y-y_1r_1y)+\cdots+a_n(y_nr_ny)=0.$$

对于 $i\geq 2, y_ir_iy\in h(R)$. 这样由 $S=\sum_{i=1}^n a_iR$ 是以 $a_1=1,\dots,a_n$ 为齐次基的分次自由模可得 $y=yr_1y$. 这证明了 y 是 R 的齐次正则元，所以 $R\cap r_G(S)$ 是 R 的分次正则理想，故有 $R\cap r_G(S)\subseteq r_G(R)$.

定理 18 设 $S=\bigoplus_{g\in G}S_g$ 是 $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 的分次 Excellent 扩张，则 S 是分次正则环当且仅当 R 是分次正则环.

证明 如果 $r_G(S)=S$, 则由命题 17 知 $r_G(R)=R\cap S=R$. 反之，如果 $r_G(R)=R$, 则由命题 17 知 $R=R\cap r_G(S)$, 故 $R\subseteq r_G(S)$, 于是 $S=\sum_{i=1}^n a_iR\subseteq\sum_{i=1}^n a_ir_G(S)\subseteq r_G(S)\subseteq S$, 即有 $S=r_G(S)$.

参考文献:

[1] NASTASESCU C, VAN OYSTAEYEN F, *Graded Ring Theory* [M]. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982.

[2] 王尧. 分次环的分次 Jacobson 根 [J]. 数学学报, 1998, **41**(2): 347–354.
WANG Yao. *The graded Jacobson radical of a graded ring* [J]. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 1998, **41**(2): 347–354. (in Chinese)

[3] 王尧, 任艳丽. 分次根、弱分次根与自反根 [J]. 数学学报, 1999, **42**(1): 71–76.
WANG Yao, REN Yan-li. *Graded radicals, weakly graded radicals and reflected radicals* [J]. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 1999, **42**(1): 71–76.

[4] GOODEARL K R. *Von Neumann Regular Rings* [M]. Pitman, Boston, Mass.-London, 1979.

[5] NASTASESCU C, VAN OYSTAEYEN F, *Jacobson radicals and maximal ideals of normalizing extensions applied to Z-graded rings* [J]. Comm. Algebra, 1982, **10**(17): 1839–1847.

[6] PARMENTER M M, STEWART P N. *Excellent extensions* [J]. Comm. Algebra, 1988, **16**(4): 703–713.

Graded Excellent Extensions of Graded Rings

REN Yan-li, WANG Yao
(Department of Mathematics, Nanjing Xiaozhuang University, Jiangsu 210071, China)

Abstract: The concept of graded excellent extension of graded rings is introduced. Let $S=\bigoplus_{g\in G}S_g$ be a graded excellent extension of $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$. We prove that S is a graded right V-ring if and only if R is a graded right V-ring, S is graded PS-ring if and only if R is a graded PS-ring, and S is a Von Neumann regular ring if and only if R is a graded Von Neumann regular ring.

Key words: graded excellent extension; graded right V-ring; graded PS-ring; graded Von Neumann regular ring.