第27卷第3期 数学研究与评论 Vol.27, No.3
2007年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)03-0605-08 **文献标识码**: **A**

H 型群上 p- 次 Laplace 算子的 Hopf 型引理和强极大值原理

原子霞， 钮鹏程
(西北工业大学应用数学系，陕西 西安 710072)
(E-mail: yzx8047@yahoo.com.cn)

摘 要: 本文首先推广了 Capogna, Danielli 和 Garofalo 关于 p- 次 Laplace 算子的径向解的一个重要公式，然后通过改进欧氏空间中证明 Laplace 算子的 Hopf 引理的方法，证明了 H 型群上 p- 次 Laplace 算子的 Hopf 型引理，进而证明了一个强极大值原理.

关键词: H 型群； p- 次 Laplace 算子； Hopf 型引理；强极大值原理.
MSC(2000): 35J60
中图分类: O175.2

1 引言

考虑下述 p- 次 Laplace 不等方程

$$L_p u - \beta(u) \geq 0, \quad \xi \in \Omega, \tag{1}$$

其中 Ω 是 H 型群 G 中的一个区域， L_p 是 G 上的 p- 次 Laplace 算子， $p > 1$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续非递减函数，且满足 $\beta(0) = 0$.

欧氏空间上关于 p-Laplace 方程的 Hopf 引理和强极大值原理已经有了一些令人满意的结果. Vazquez[1] 建立了欧氏空间上 Laplace 方程及 p-Laplace 方程的 Hopf 引理和强极大值原理. Pucci 等人在文献 [2] 中把 Vazquez 的结论推广到了更一般的方程. 但 Heisenberg 群及 H 型群上 p- 次 Laplace 方程的 Hopf 型引理和强极大值原理至今尚未见到. 本文首先把 Capogna 等人在文献 [3] 中关于 p- 次 Laplace 算子的径向解的结果加以推广，即将那里的结果推广到中心不在群单位元处的情形，然后根据文献 [2] 中的方法证明了一个比较原理，最后通过改进文献 [4] 中证明欧氏空间上 Laplace 方程的 Hopf 引理的方法证明了 H 型群上 p- 次 Laplace 方程的 Hopf 型引理，并进而证明了强极大值原理. 值得注意的是，本文与文献 [1,2] 中方法的不同之处在于无需借助由常微分方程得到的辅助函数.

本文的主要结果是:

定理 1 (Hopf 型引理) 假设在 Ω 内 $L_p u \geq 0$, $p > 1$. 设点 $\xi_0 \in \partial\Omega$ 满足

(i). $u \in C^1(\Omega)$ 且在 ξ_0 点连续;

(ii). $u(\xi_0) > u(\xi)$, $\xi \in \Omega$;

(iii). Ω 在 ξ_0 点满足广义内球条件，即存在球 $B = B_G(\eta, R) \subset \Omega$, 使得 $\xi_0 \in \partial B$.

设 $\vec{n}$ 为 ∂B 在点 ξ_0 处的单位外法向量. 则

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{u(\xi_0) - u(\xi_0 - h\vec{n})}{h} > 0,$$

收稿日期: 2005-01-21; **接受日期**: 2006-07-03
基金项目: 国家自然科学基金 (10371099).

且当上述极限存在时，有 $\frac{\partial u}{\partial n}(\xi_0) > 0$.

定理 2 (强极大值原理) 若 $u \in C^1(\Omega)$ 满足不等方程 (1), 则当 u 不是常数函数时， u 在 Ω 内不能取到一个正的极大值.

本文第 2 节介绍关于 H 型群的一些基本概念和符号，第 3 节证明一些预备引理，包括对文献 [3] 中结果的推广和一个比较原理，定理的证明放在第 4 节.

2 基本知识

设 G 是一个 2 步 Carnot 群，具有 Lie 代数 $g = V_1 \oplus V_2$. 按如下方式定义映射 $J: V_2 \to \mathrm{End}(V_1)$($V_1$ 上的自同态半群):

$$\langle J(\xi_2)\xi_1', \xi_1''\rangle = \langle \xi_2, [\xi_1', \xi_1'']\rangle,\ \xi_1', \xi_1'' \in V_1,\ \xi_2 \in V_2. \tag{2}$$

如果对任意的 $\xi_2 \in V_2$, $|\xi_2| = 1$, 映射 $J(\xi_2): V_1 \to V_1$ 是正交的，则称 G 是一个 Heisenberg 型群，简称 H 型群 [5]. (2) 式隐含了

$$\langle J(\xi_2)\xi_1, \xi_1\rangle = 0, \xi_1 \in V_1, \xi_2 \in V_2, \tag{3}$$

和

$$\langle J(\xi_2')\xi_1, J(\xi_2'')\xi_1\rangle = \langle \xi_2', \xi_2''\rangle |\xi_1|^2, \xi_1 \in V_1, \xi_2', \xi_2'' \in V_2. \tag{4}$$

对 $\xi \in G$, 记 $\xi = (x(\xi), y(\xi))$, 其中

$$x(\xi) = (x_1(\xi), \ldots, x_m(\xi)), \quad y(\xi) = (y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi))$$

分别表示 V_1, V_2 上的射影坐标:

$$x_i(\xi) = \langle \xi_1(\xi), X_i\rangle, i = 1, \ldots m, \quad y_j(\xi) = \langle \xi_2(\xi), Y_j\rangle, j = 1, \ldots n.$$

这里， $\{X_1, \ldots, X_m\}$ 和 $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ 分别表示 V_1 和 V_2 的正交基，即对 $\xi \in V_1 \oplus V_2$, 有 $\xi = \sum_{i=1}^m x_i X_i + \sum_{j=1}^n y_j Y_j$. 特殊地，根据文献 [6], 设 V_1 的一组标准正交基是

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \Big(\sum_{k=1}^m b_{ki}^j x_k\Big)\frac{\partial}{\partial y_j}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

其中 b_{ki}^j 是由方程

$$[X_k, X_i] = \sum_{j=1}^n b_{ki}^j Y_j \tag{6}$$

确定的结构常数.

G 的非迷向伸缩定义为

$$\delta_\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda^2 y), \quad \lambda > 0, (x, y) \in G.$$

G 的拓扑维数是 $N = m + n$, 而关于伸缩 $\{\delta_\lambda\}_{\lambda > 0}$ 的齐次维数是 $Q = m + 2n$. 用 $\mathrm{d}G$ 表示 G 上的一个固定的 Haar 测度.

用 $Xu = (X_1u, \dots, X_mu)$ 表示 H 型群上函数 u 的广义剃度. G 上相应于向量组 $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ 的次 Laplace 算子和 p- 次 Laplace 算子可分别表示为

$$Lu = \sum_{i=1}^{m} X_i^2 u$$

和

$$L_p u = \sum_{i=1}^{m} X_i(|Xu|^{p-2} X_i u),$$

其中 u 是 G 上的可微函数.

设 $\xi = (x, y), \tilde{\xi} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in G$, 在 H 型群 G 上赋予群运算法则:

$$\xi \cdot \tilde{\xi} = (x_1 + \tilde{x}_1, \dots, x_m + \tilde{x}_m, y_1 + \tilde{y}_1 + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m} b_{kl}^1 x_k \tilde{x}_l, \dots, y_n + \tilde{y}_n + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m} b_{kl}^n x_k \tilde{x}_l). \tag{7}$$

记 ξ^{-1} 为 ξ 的逆，则由上述运算法则有 $\xi^{-1} = -\xi$. 定义 G 上一个度量函数 $\rho(\xi, \tilde{\xi}) = \rho(\tilde{\xi}^{-1} \cdot \xi)$, 特别地,

$$\rho(\xi) = (|x(\xi)|^4 + 16|y(\xi)|^2)^{\frac{1}{4}}. \tag{8}$$

$B_G(\xi, R)$ 表示以 ξ 为中心， $R > 0$ 为半径的开球.

记 $W^{1,p}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u, |Xu| \in L^p(\Omega)\}$.

3 一些引理

引理 1 设 $\xi = \xi_1 + \xi_2 = \sum_{i=1}^m x_i X_i + \sum_{j=1}^n y_j Y_j, \eta = \xi_1^0 + \xi_2^0 = \sum_{i=1}^m x_i^0 X_i + \sum_{j=1}^n y_j^0 Y_j$, 其中 $\xi_1, \xi_1^0 \in V_1, \xi_2, \xi_2^0 \in V_2, x = (x_1, \dots, x_m), x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$. 若 η 为 G 中一固定点，则

$$|X\rho(\xi, \eta)|^2 = \frac{|x - x^0|^2}{\rho^2(\xi, \eta)}, \tag{9}$$

$$L\rho(\xi, \eta) = \frac{Q - 1}{\rho(\xi, \eta)} |X\rho(\xi, \eta)|^2. \tag{10}$$

证明 由 (7) 式和 (8) 式得到

$$\rho(\xi, \eta) = [|x - x^0|^4 + 16\sum_{j=1}^{n}(y_j - y_j^0 - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m} b_{kl}^j x_k^0 x_l)^2]^{\frac{1}{4}}.$$

从而由 (5) 式，对 $i = 1, \dots, m$ 有

$$\begin{aligned} X_i\rho(\xi, \eta) =& \frac{1}{4}\rho^{-3}(\xi, \eta) X_i[|x - x^0|^4 + 16\sum_{j=1}^{n}(y_j - y_j^0 - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m} b_{kl}^j x_k^0 x_l)^2] \\ =& \frac{1}{4}\rho^{-3}(\xi, \eta)[4|x - x^0|^2(x_i - x_i^0) + \\ & 16\sum_{j=1}^{n}(y_j - y_j^0 - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m} b_{kl}^j x_k^0 x_l)(\sum_{k=1}^{m} b_{ki}^j (x_k - x_k^0))]. \end{aligned}$$

又因为

$$
\begin{aligned}
\langle[\xi_1-\xi_1^0,X_i],Y_j\rangle &= \langle[\sum_{k=1}^{m}(x_k-x_k^0)X_k,X_i],Y_j\rangle = \langle\sum_{k=1}^{m}(x_k-x_k^0)(\sum_{\delta=1}^{n}b_{ki}^{\delta}Y_\delta),Y_j\rangle\\
&= \sum_{k=1}^{m}b_{ki}^{j}(x_k-x_k^0),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
X_i\rho(\xi,\eta) =&\rho^{-3}(\xi,\eta)[|x-x^0|^2\langle\xi_1-\xi_1^0,X_i\rangle+\\
&4\sum_{j=1}^{n}\langle[\xi_1-\xi_1^0,X_i],Y_j\rangle(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)]\\
=&\rho^{-3}(\xi,\eta)\{|x-x^0|^2\langle\xi_1-\xi_1^0,X_i\rangle+\\
&4\langle J[\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)Y_j](\xi_1-\xi_1^0),X_i\rangle\},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

其中在上面最后一个等式中用到了 (2) 式. 因此有

$$
\begin{aligned}
|X\rho(\xi,\eta)|^2 =&\sum_{i=1}^{m}(X_i\rho(\xi,\eta))^2\\
=&\rho^{-6}(\xi,\eta)\sum_{i=1}^{m}\{|x-x^0|^4\langle\xi_1-\xi_1^0,X_i\rangle^2+\\
&16\langle J[\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)Y_j](\xi_1-\xi_1^0),X_i\rangle^2+\\
&8|x-x^0|^2\langle\xi_1-\xi_1^0,X_i\rangle\cdot\langle J[\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)Y_j](\xi_1-\xi_1^0),X_i\rangle\}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

因为 $\{X_i\}_{i=1,\dots,m}$ 是标准正交基, 所以由 (3) 式和 (4) 式得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\langle\xi_1-\xi_1^0,X_i\rangle\langle J[\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)Y_j](\xi_1-\xi_1^0),X_i\rangle\\
&= \langle J[\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)Y_j](\xi_1-\xi_1^0),\xi_1-\xi_1^0\rangle\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\langle J[\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)Y_j](\xi_1-\xi_1^0),X_i\rangle^2\\
&= |J[\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)Y_j](\xi_1-\xi_1^0)|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\langle J[\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)Y_j](\xi_1-\xi_1^0),J[\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)Y_j](\xi_1-\xi_1^0)\rangle\\
&=\langle\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)Y_j,\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)Y_j\rangle|\xi_1-\xi_1^0|^2\\
&=|x-x^0|^2\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)^2, \qquad (14)
\end{aligned}
$$

代入 (12) 式，即得等式 (9). 下面证明等式 (10).

$$
\begin{aligned}
X_i^2\rho^4(\xi,\eta)=&X_i[4|x-x^0|^2(x_i-x_i^0)+16\sum_{j=1}^{n}(y_j-y_j^0-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}b_{kl}^{j}x_k^0x_l)(\sum_{k=1}^{m}b_{ki}^{j}(x_k-x_k^0))]\\
=&4|x-x^0|^2+8(x_i-x_i^0)^2+8\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{m}b_{ki}^{j}(x_k-x_k^0))^2\\
=&4|x-x^0|^2+8\langle\xi_1-\xi_1^0,X_i\rangle^2+8\sum_{j=1}^{n}\langle[\xi_1-\xi_1^0,X_i],Y_j\rangle^2\\
=&4|x-x^0|^2+8\langle\xi_1-\xi_1^0,X_i\rangle^2+8\sum_{j=1}^{n}\langle J(Y_j)(\xi_1-\xi_1^0),X_i\rangle^2,
\end{aligned}
$$

其中在上面最后一个等式中用到了 (2) 式. 应用 (4) 式可知

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}X_i^2\rho^4(\xi,\eta)&=(4m+8)|x-x^0|^2+8\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\langle J(Y_j)(\xi_1-\xi_1^0),X_i\rangle^2\\
&=(4m+8)|x-x^0|^2+8\sum_{j=1}^{n}|J(Y_j)(\xi_1-\xi_1^0)|^2\\
&=(4m+8)|x-x^0|^2+8\sum_{j=1}^{n}\langle Y_j,Y_j\rangle|\xi_1-\xi_1^0|^2\\
&=(4Q+8)|x-x^0|^2, \qquad (15)
\end{aligned}
$$

再根据 (9) 式和 (15) 式计算得到

$$
\begin{aligned}
L\rho(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{m}X_i^2\rho(\xi,\eta)&=\frac{1}{4}\rho^{-3}(\xi,\eta)[\sum_{i=1}^{m}X_i^2\rho^4(\xi,\eta)-12\rho^2(\xi,\eta)|X\rho(\xi,\eta)|^2]\\
&=\frac{Q-1}{\rho(\xi,\eta)}|X\rho(\xi,\eta)|^2.
\end{aligned}
$$

有了引理 1 中的结果，我们立即可以得到下面的引理，它推广了文献 [3] 中的引理 2.1.

引理 2 设 $p>1$, $V\in C^2(\mathbb{R}^+)$, $v(\xi)=V(\rho(\xi,\eta))$, 则对任意的 $\xi,\eta\in G$, 当 $\xi\neq\eta$ 时有

$$
\begin{aligned}
L_pv(\xi)&=L_pV(\rho(\xi,\eta))\\
&=(p-1)|X\rho(\xi,\eta)|^p|V'(\rho(\xi,\eta))|^{p-2}[V''(\rho(\xi,\eta))+\frac{Q-1}{p-1}\frac{V'(\rho(\xi,\eta))}{\rho(\xi,\eta)}],
\end{aligned}
$$

这里 $V'(\rho(\xi,\eta)) \neq 0$.

证明 为了使讨论比较严密，用

$$\rho_\varepsilon(\xi,\eta) = [(|x-x^0|^2+\varepsilon^2)^2 + 16\sum_{j=1}^{n}(y_j - y_j^0 - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m} b_{kl}^j x_k^0 x_l)^2]^{\frac{1}{4}}$$

代替 $\rho(\xi,\eta)$, 最后令 $\varepsilon \to 0$. 计算得到

$$\begin{aligned} L_p v(\xi) =& V'(\rho(\xi,\eta))|V'(\rho(\xi,\eta))|^{p-2}|X\rho(\xi,\eta)|^{p-2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2\rho(\xi,\eta) + \\ & |X\rho(\xi,\eta)|^{p-2}\sum_{i=1}^{m} X_i[|V'(\rho(\xi,\eta))|^{p-2}V'(\rho(\xi,\eta))]X_i\rho(\xi,\eta) + \\ & V'(\rho(\xi,\eta))|V'(\rho(\xi,\eta))|^{p-2}\sum_{i=1}^{m} X_i\rho(\xi,\eta)X_i(|X\rho(\xi,\eta)|^{p-2}) \\ =& (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}). \end{aligned} \tag{16}$$

根据引理 1, 得到

$$(\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) = (p-1)|V'|^{p-2}|X\rho(\xi,\eta)|^p[V'' + \frac{Q-1}{p-1}\frac{V'}{\rho(\xi,\eta)}].$$

又由 (11) 式和 (13) 式，有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m} X_i\rho(\xi,\eta)X_i(|X\rho(\xi,\eta)|^{p-2}) \\ & = \frac{p-2}{2}|X\rho(\xi,\eta)|^{p-4}[-2\rho^{-3}(\xi,\eta)|x-x^0|^2|X\rho(\xi,\eta)|^2 + \\ & \quad \rho^{-2}(\xi,\eta)\sum_{i=1}^{m} X_i\rho(\xi,\eta)X_i(|x-x^0|^2)] \\ & = \frac{p-2}{2}|X\rho(\xi,\eta)|^{p-4}\{-2\rho^{-5}(\xi,\eta)|x-x^0|^4 + 2\rho^{-5}(\xi,\eta)[|x-x^0|^4 + \\ & \quad 4\sum_{i=1}^{m}\langle J[\sum_{j=1}^{n}(y_j - y_j^0 - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m} b_{kl}^j x_k^0 x_l)Y_j](\xi_1 - \xi_1^0), X_i\rangle(x_i - x_i^0)]\} \\ & = 0, \end{aligned}$$

所以 $(\mathrm{III}) = 0$.

将上面两个式子代入 (16) 即得引理结论. □

引理 3 (比较原理) 设 Ω 是 G 中一有界区域，函数 $u, v \in W^{1,p}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ 满足

$$L_p u - \beta(u) \leq L_p v - \beta(v), \quad \xi \in \Omega,$$

其中函数 β 如方程 (1) 中所述. 如果在 $\partial\Omega$ 上 $u(\xi) \geq v(\xi)$, 则在 Ω 内仍有 $u(\xi) \geq v(\xi)$.

证明 反证法. 假设存在 $\xi_0 \in \Omega$, 使得 $u(\xi_0) < v(\xi_0)$. 对 $\xi \in \bar{\Omega}$, 令 $w(\xi) = u(\xi) - v(\xi)$, 则 $w(\xi_0) < 0$. 取足够小的 $\varepsilon > 0$, 使得 $w(\xi_0) + \varepsilon < 0$. 因为在 $\partial\Omega$ 上 $w(\xi) \geq 0$, 从而函数

$w_\varepsilon := \min\{w+\varepsilon, 0\}$ 是非正的且在 Ω 内具有紧支集．取 w_ε 作为检验函数，有

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|Xu|^{p-2}Xu-|Xv|^{p-2}Xv)\cdot Xw_\varepsilon \mathrm{d}G &= \int_\Omega [X(|Xv|^{p-2}Xv)-X(|Xu|^{p-2}Xu)]w_\varepsilon \mathrm{d}G\\ &= \int_\Omega (L_pv-L_pu)w_\varepsilon \mathrm{d}G.\end{aligned}$$

由 w_ε 非正和 $L_pv-L_pu\geq \beta(v)-\beta(u)$ 得到

$$\int_\Omega (L_pv-L_pu)w_\varepsilon \mathrm{d}G \leq \int_\Omega [\beta(v)-\beta(u)]w_\varepsilon \mathrm{d}G,$$

于是,

$$\int_\Omega (|Xu|^{p-2}Xu-|Xv|^{p-2}Xv)\cdot Xw_\varepsilon \mathrm{d}G \leq \int_\Omega [\beta(v)-\beta(u)]w_\varepsilon \mathrm{d}G. \tag{17}$$

当 $w+\varepsilon<0$ 时，必有 $Xw_\varepsilon = Xw \not\equiv 0$. 否则，若 $Xw\equiv 0$, 则存在常数 $C<0$, 使得 $u=v+C$, 这与在 $\partial\Omega$ 上 $u\geq v$ 矛盾．因此上面的积分不等式左边为正.

另一方面，当 $w+\varepsilon<0$ 时， $u<v-\varepsilon<v$, 所以 $\beta(u)\leq\beta(v)$, 从而 (17) 式右边非正．矛盾．引理得证.

4 定理的证明

定理 1 的证明 对 $0<r<R$, 定义辅助函数

$$v(\xi)=V(\rho(\xi,\eta))=e^{-\alpha\rho^2(\xi,\eta)}-e^{-\alpha R^2},\quad 0<\rho(\xi,\eta)\leq R,$$

其中 α 是待定正常数．根据引理 2 可以计算

$$\begin{aligned}L_pv(\xi) =&L_pe^{-\alpha\rho^2(\xi,\eta)}\\ =&2\alpha(p-1)(2\alpha\rho(\xi,\eta))^{p-2}|X\rho(\xi,\eta)|^pe^{-\alpha\rho^2(\xi,\eta)(p-1)}[2\alpha\rho^2(\xi,\eta)-\frac{Q+p-2}{p-1}].\end{aligned}$$

取 $\alpha=\frac{Q+p-2}{2r^2(p-1)}$, 则 $L_pv(\xi)\geq 0$ 于环 $B_G(\eta,R)\backslash B_G(\eta,r)$.

因为在 $\partial B_G(\eta,r)$ 上 $u(\xi)-u(\xi_0)<0$, 从而存在 $\varepsilon>0$, 使得在 $\partial B_G(\eta,r)$ 上 $u(\xi)-u(\xi_0)+\varepsilon v(\xi)\leq 0$. 上式在 $\partial B_G(\eta,R)$ 上也成立，此时 $v(\xi)=0$. 因此有

$$L_p(u-u(\xi_0))=L_pu\geq 0,\quad \xi\in B_G(\eta,R)\backslash B_G(\eta,r),$$

$$L_p(-\varepsilon v(\xi))=-\varepsilon^{p-1}L_pv\leq 0,\quad \xi\in B_G(\eta,R)\backslash B_G(\eta,r),$$

$$u-u(\xi_0)\leq -\varepsilon v(\xi),\quad \xi\in\partial(B_G(\eta,R)\backslash B_G(\eta,r)).$$

从而，应用引理 3 得到

$$u-u(\xi_0)\leq -\varepsilon v(\xi),\quad \xi\in B_G(\eta,R)\backslash B_G(\eta,r).$$

于是,

$$\liminf_{h\to 0+}\frac{u(\xi_0)-u(\xi_0-h\vec{n})}{h}\geq \liminf_{h\to 0+}\frac{\varepsilon v(\xi_0-h\vec{n})}{h}$$

$$= \liminf_{h\to 0+} \frac{V(R-\tau h)-V(R)}{h}\varepsilon = -\varepsilon\tau V'(R) > 0,$$

其中 $\tau = \cos(\vec{n}, \overrightarrow{\eta\xi_0}) > 0$. 显然，当极限存在时，$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\xi_0) > 0$.

定理 2 的证明 反证法. 假设 u 不是常数函数，且在 Ω 内取到正的极大值 $M > 0$. 因为 $u \in C^1(\Omega)$, 从而存在 $\xi_0 \in \Omega$ 满足 $u(\xi_0) = M$, 且存在球 $B_G(\eta, r_1) \subset \Omega$, 使得 $\xi_0 \in \partial B_G(\eta, r_1)$, 并且有

$$u(\xi_0) > u(\xi) > 0, \quad \xi \in B_G(\eta, r_1).$$

于是，对 $\xi \in B_G(\eta, r_1)$ 有

$$L_p u \geq \beta(u) \geq 0.$$

根据定理 1, $\mathrm{grad}u(\xi_0) \neq 0$.

另一方面，ξ_0 是 u 在 Ω 内的极大值点，所以 $\mathrm{grad}u(\xi_0) = 0$, 矛盾.

参考文献:

[1] VÁZQUEZ J L. *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations* [J]. Appl. Math. Optim., 1984, **12**(3): 191–202.

[2] PUCCI P, SERRIN J, ZOU Heng-hui. *A strong maximum principle and a compact support principle for singular elliptic inequalities* [J]. J. Math. Pures Appl., 1999, **78**(8): 769–789.

[3] CAPOGNA L, DANIELLI D, GAROFALO N. *Capacitary estimates and the local behavior of solutions of nonlinear subelliptic equations* [J]. Amer. J. Math., 1996, **118**(6): 1153–1196.

[4] GILBARG D, TRUDINGER N S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* [M]. Second ed., Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[5] GAROFALO N, VASSILEV D. *Regularity near the characteristic set in the non-linear Dirichlet problem and conformal geometry of sub-Laplacians on Carnot groups* [J]. Math. Ann., 2000, **318**(3): 453–516.

[6] DANIELLI D, GAROFALO N, PETROSYAN A. *The sub-elliptic obstacle problem: $C^{1,\alpha}$ regularity of the free boundary in Carnot groups of step two* [J]. Adv. Math., 2007, **211**(2): 485–516.

A Hopf Type Principle and a Strong Maximum Principle for the p-Sub-Laplacian on the Group of Heisenberg Type

YUAN Zi-xia, NIU Peng-cheng

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Shaanxi 710072, China)

Abstract: In this paper we extend Capogna, Danielli and Garofalo's result about radial solution of p-sub-Laplacian. Then by improving the method for Hopf principle concerning Laplacian on the Euclidean space, we set up a Hopf type principle for the p-sub-Laplacian, and prove a strong maximum principle.

Key words: Heisenberg type group; p-sub-Laplacian; Hopf type principle; strong maximum principle.