文章编号: 1000-341X(2007)03-0613-04 **文献标识码**: **A**

关于保持距离映射的 Aleksandrov 问题

任 卫 云
(天津大学理学院，天津 300072)
(E-mail: rwyun@163.com)

摘　要: 设 E,F 为实 Hilbert 空间，$f:E\to F$ 为一映射. 本文证明了在一定条件下，若 f 保距离 a 和 b (其中，a,b 为两个正实数), 则 f 为一个仿射等距. 从而部分地解决了 Aleksandrov 在 1970 年提出的 Aleksandrov 问题.

关键词: 保 ρ 映射；强保 ρ 映射；等距映射； Aleksandrov 问题.
MSC(2000): 46B04; 46C05
中图分类: O177.2

1 引言及预备知识

定义 1 设 E,F 为距离空间，$f:E\to F$ 为一映射，$\rho>0$. 若对任意 $x,y\in E$，当 $d_E(x,y)=\rho$ 时有 $d_F(f(x),f(y))=\rho$, 则称 f 为保距离 ρ 的，简称为保 ρ 的；若对任意 $x,y\in E$, $d_E(x,y)=\rho\Longleftrightarrow d_F(f(x),f(y))=\rho$, 则称 f 为强保距离 ρ 的，简称为强保 ρ 的；若对任意 $x,y\in E$, $d_F(f(x),f(y))=d_E(x,y)$, 则称 f 为等距的.

定义 2[5] 设 E 为线性空间，E 中的点 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 称为 n- 共线的，如果对每一 i, $\{x_j-x_i|0\le j\ne i\le n\}$ 是线性相关的.

在本文中, 称线性空间中的元共线, 是指它们位于空间的同一直线上；称线性空间中的元共面，是指它们位于空间的同一平面上. 显然，在定义 2 中，若 $n=2$, 则 x_0,x_1,x_2 为共线的；若 $n=3$, 则 x_0,x_1,x_2,x_3, 为共面的.

定义 3 设 E,F 为线性空间，$f:E\to F$ 为一映射，若 f 将 E 中同一直线上的元映到 F 中的同一直线上，则称 f 为保共线的；若 f 将 E 中同一平面上的元映到 F 中的同一平面上，则称 f 为保共面的.

定义 4 设 E 为线性空间，A,B,C,D 为 E 中同一平面上的元，称线段 AB 与线段 CD 相交，是指：存在 $Q\in E$ 使得 $Q=\alpha A+(1-\alpha)B=\beta C+(1-\beta)D$, 其中 $\alpha,\beta\in[0,1]$. 称元 A,B 在直线 CD 的同侧，是指：在线段 AB 与直线 CD 不重合的前提下，若线段 AB 与直线 CD 相交，则交点必为 A 或 B.

1970 年，A.D. Aleksandrov 在文献 [1] 中提出：如映射有保 1 性质, 是否必为等距的？ F.S. Beckman 和 D.A. Quarles 在文献 [2] 中证明了若 $f:R^n\to R^n(2\le n<\infty)$ 保距离 1, 则 f 为一个等距 (其中 R^n 表示 n 维实欧几里德空间). Rassias 和 Šemrl 在文献 [3] 中证明了当 E,F 为赋范线性空间，$\max(\dim E,\dim F)>1$, $f:E\to F$ 为非扩张的，到上的强保 1 映射时，f 是等距的. 马玉梅在文献 [4] 中得出：当 F 为严格凸赋范线性空间时，所有的非扩张的保 1 映射

收稿日期: 2005-03-25; **接受日期**: 2006-07-05
基金项目: 国家自然科学基金 (10571090).

$f: E \to F$ 均是等距的. Hahng-Yon Chu, Keonhee Lee 和 Chun-Gil Park 在文献 [5] 中给出了 n- 共线的概念，并得出了如下结论：当 E, F 为 n- 赋范线性空间， $f: E \to F$ 为 n-Lipschitz 映射 (其中 Lipschitz 常数 $k \leq 1$), 若由 $x_0, x_1, \ldots, x_m$ m- 共线可以推出 $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_m)$ m- 共线， $m = 2, n$, 并且 f 满足 (nDOPP), 则 f 为一个 n- 等距.

由于圆满地解决 Aleksandrov 问题尚且具有一定的难度，一些数学工作者开始考虑另外一个问题：如赋范空间中的映射保两个距离，是否必为等距的？针对这一问题， W.Benz 在文献 [6] 中证明了：对赋范线性空间 E, F, 如 $\dim E \geq 2$ 且 F 为严格凸的，当 $f: E \to F$ 保两个距离 ρ 和 $n_0\rho$($n_0 \geq 2$ 为某正整数) 时， f 为一个仿射等距. 一个自然的问题是：在文献 [6] 的空间的假设条件下，当 f 保两个不成整数比例的距离时，是否也能得出 f 是一个等距映射？在这一问题上，向淑晃在 Hilbert 空间做了许多工作，其中，他在文献 [7] 中得到：当 E, F 均为 Hilbert 空间时，如 $\dim E \geq 2$, $f: E \to F$ 保距离 1 和 $\sqrt{3}$, 则 f 为一个仿射等距算子. 类似方法得到：此时，如 f 保距离 1 和 $n_0\sqrt{3}$(n_0 为某正整数), 则结论亦真. 更一般地，当 f 保距离 ρ_1, ρ_2 和 $\sqrt{2\rho_1^2 + \rho_2^2}$($\rho_1, \rho_2$ 为某两不同的正数). 则结论亦真. 当 $\dim E \geq 3$ 时， $f: E \to F$ 保距离 1 和 $\sqrt{2}$, 或者当 $\dim E \geq 2$ 时， $f: E \to F$ 保距离 1, ρ 和 $n_0\sqrt{4 - \rho^2}$, 则结论亦真. 本文在前人的基础上，应用文献 [5] 中保共面的思想得出：在一定条件下，当 $f: E \to F$ 保任意两个距离 a 和 b (a, b 为两个不同的正实数) 时， f 为一个仿射等距.

下面的引理在本文中起了重要的作用：

引理 1[8] 若 F 为严格凸的实赋范线性空间， a, b 为 F 中的任意两个元，则 $\frac{1}{2}(a+b)$ 是到 a 和 b 的距离均为 $\frac{1}{2}\|a-b\|$ 的唯一的元.

引理 2[7, 定理 2.8] 设 E, F 为实 Hilbert 空间且 $\dim E \geq 3$, 若 $f: E \to F$ 保距离 ρ 和 $\sqrt{2}\rho$, 则 f 为一个仿射等距 (ρ 为某一正实数).

2 主要结果

定理 1 设 E, F 为实 Hilbert 空间且 $\dim E \geq 3$, $f: E \to F$ 保距离 a 和 b, 若 f 映 E 中任一矩形 ABCD 的顶点到 F 中的同一平面上且 $f(B)$ 和 $f(C)$ 位于直线 $f(A)f(D)$ 的同侧 (其中 $\|f(A) - f(D)\| > \|f(A) - f(B)\|$), 则 f 为一个仿射等距 (其中 a, b 为两个不同的正实数).

证明 不妨设 $a < b$. 由于 $\dim E \geq 3$, 故可在 E 中作一个以长为 b, 宽为 a 的矩形 $ABCD$ 为底边且棱长为 b 的五面体 $ABCDP$, 其中 $\|A - B\| = \|C - D\| = a$, $\|A - D\| = \|B - C\| = b$, $\|B - D\| = \|A - C\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. 由假设知 $f(A), f(B), f(C), f(D)$ 在 F 中的同一平面上，下面讨论这四个元的排列情况：

首先说明 $f(A), f(B), f(D)$ 必不共线. 反之，若这三个元共线，由 $\|f(A) - f(B)\| = a \neq 0$, 知，存在不为零的实数 t, 使得

$$f(A) - f(B) = t(f(D) - f(B))$$

从而

$$\begin{aligned} b &= \|f(A) - f(D)\| = \|f(A) - f(B) + f(B) - f(D)\| \\ &= \|f(A) - f(B) - \frac{1}{t}(f(A) - f(B))\| \\ &= |1 - \frac{1}{t}|\|f(A) - f(B)\| = |1 - \frac{1}{t}| \cdot a \end{aligned}$$

故 $t = \dfrac{a}{b-a}$ 或 $t = \dfrac{a}{b+a}$. 从而 $\|f(D) - f(B)\| = b - a$ 或 $\|f(D) - f(B)\| = b + a$.

若 $\|f(D) - f(B)\| = b - a$, 则

$$\|f(B) - f(C)\| = b = (b - a) + a = \|f(B) - f(D)\| + \|f(D) - f(C)\|.$$

因为 F 是严格凸的，故存在正实数 α, 使得 $f(B) - f(D) = \alpha(f(D) - f(C))$, 故 $f(B), f(C)$ 和 $f(D)$ 共线，从而 $f(A), f(B), f(C)$ 和 $f(D)$ 共线．注意到

$$\|f(P) - f(A)\| = \|f(P) - f(B)\| = \|f(P) - f(C)\| = \|f(P) - f(D)\|, \tag{*}$$

可知 $f(P)$ 显然不在直线 $f(A)f(B)$ 上．设 α 为由向量 $\overrightarrow{f(A)f(P)}$ 和 $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ 所成的夹角，由于三角形 $f(P)f(A)f(D)$ 为等边三角形，故 $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. 在三角形 $f(P)f(A)f(B)$ 中，由余弦定理可得 $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + a^2 - b^2}{2ab}$. 由此可推得 $a = b$, 与前面 “$a < b$” 的假设矛盾.

若 $\|f(D) - f(B)\| = b + a$, 则同理亦可得矛盾．故 $f(A), f(B), f(D)$ 必不共线.

类似上面的讨论可知 $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ 中任意三元均不共线．再由 $f(B)$ 和 $f(C)$ 位于直线 $f(A)f(D)$ 的同侧以及

$$\|f(A) - f(B)\| = \|f(C) - f(D)\|, \|f(A) - f(D)\| = \|f(B) - f(C)\|$$

可知 $f(A)f(B)f(C)f(D)$ 构成了一个平行四边形. 注意到 (*), 可知 $f(P)$ 必不在由 $f(A)f(B)f(C)$ $f(D)$ 确定的平面上. 连接 $f(P)f(A), f(P)f(B), f(P)f(C), f(P)f(D)$, 则 $f(A)f(B)f(C)f(D)f(P)$ 构成了一个以平行四边形 $f(A)f(B)f(C)f(D)$ 为底边的五面体.

设 $f(B) - f(A) = x$, $f(D) - f(A) = y$, $f(P) - f(A) = z$, 则 $\|x\| = a$, $\|y\| = \|z\| = b$. 由 $\|x - z\| = b$ 可得 $2(x, z) = a^2$, 由 $\|y - z\| = b$ 可得 $2(y, z) = b^2$．再由 $\|x + y - z\| = b$ 可得 $(x, y) = 0$. 故有 $\|f(B) - f(D)\| = \|f(A) - f(C)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. 从而可知 f 是保距离 $\sqrt{a^2 + b^2}$.

重复上面的步骤，由 f 保距离 a 和 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 可得 f 保距离 $\sqrt{2a^2 + b^2}$, 再由 f 保距离 b 和 $\sqrt{2a^2 + b^2}$ 可得 f 保距离 $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$, 最后由引理 2 可知 f 为一个仿射等距.

定理 2 设 E, F 为实 Hilbert 空间且 $\dim E \geq 3$, $f : E \to F$ 保距离 a 且映 E 中任一正方形 $ABCD$ 的顶点到 F 中的同一平面上，若线段 $f(A)f(C)$ 与线段 $f(B)f(D)$ 相交，则 f 为一个仿射等距 (其中 a 为正实数).

证明 不妨设 $a = 1$. 由于 $\dim E \geq 3$, 故可在 E 中作一个以边长为 1 的正方形 $ABCD$ 为底边且棱长为 1 的五面体 $ABCDP$, 其中 $\|B - D\| = \|A - C\| = \sqrt{2}$, AC 与 BD 相交于 O. 下面讨论 $f(A), f(B), f(C), f(D)$ 所成图形的情况.

首先说明 $f(A)$ 与 $f(C)$ 必不重合．否则，由线段 $f(A)f(C)$ 与线段 $f(B)f(D)$ 相交知，存在 $\omega \in F$ 使得

$$\omega = \alpha f(A) + (1 - \alpha)f(C) = \beta f(B) + (1 - \beta)f(D),$$

其中 $\alpha, \beta \in [0, 1]$. 从而

$$\omega = f(A) = f(C) = \beta f(B) + (1 - \beta)f(D),$$

故 $\beta(f(A) - f(B)) = (1 - \beta)(f(D) - f(A))$, 注意到 $\|f(A) - f(B)\| = \|f(D) - f(A)\|$ 可得 $\beta = \dfrac{1}{2}$, 即 $f(A) = \dfrac{f(B) + f(D)}{2}$. 故 $f(A)$ 为线段 $f(B)f(D)$ 的中点且 $f(A), f(B), f(D)$ 共线.

注意到定理 1 中的 (*) 知, $f(P)$ 不在直线 $f(A)f(B)$ 上. 否则, 由 $\|f(P)-f(B)\| = \|f(D)-f(P)\|$ 知, $f(P)$ 为线段 $f(B)f(D)$ 的中点, 注意到 F 是严格凸的, 由引理 1 知 $f(P)$ 与 $f(A)$ 重合, 与 "$\|f(P)-f(A)\|=1$" 矛盾.

再由

$$\|f(B)-f(D)\| = 2 = \|f(B)-f(P)\| + \|f(P)-f(D)\|$$

及 F 是严格凸的, 可知存在正实数 γ, 使得 $f(B)-f(P)=\gamma(f(P)-f(D))$, 从而 $f(B), f(D), f(P)$ 共线, 矛盾. 故 $f(A)$ 与 $f(C)$ 不重合.

类似讨论知 $f(B)$ 与 $f(D)$ 不重合. 从而 $f(A), f(B), f(C), f(D)$ 中任意三元均不共线. 再由

$$\|f(A)-f(B)\| = \|f(B)-f(C)\| = \|f(C)-f(D)\| = \|f(D)-f(A)\|$$

知 $f(A)f(B)f(C)f(D)$ 构成一个菱形. 由定理 1 中的 (*), 知 $f(P)$ 必不在由 $f(A)f(B)f(C)f(D)$ 所确定的平面上. 连接 $f(P)f(A), f(P)f(B), f(P)f(C), f(P)f(D)$, 则 $f(A)f(B)f(C)f(D)f(P)$ 构成了一个以菱形 $f(A)f(B)f(C)f(D)$ 为底边的五面体.

设 $f(B)-f(A)=x, f(D)-f(A)=y, f(P)-f(A)=z$, 类似于定理 1 可得 $(x,y)=0$, 故有 $\|f(B)-f(D)\| = \|f(A)-f(C)\| = \sqrt{2}$. 最后由引理 2 可知 f 为一个仿射等距.

注 在定理 2 中, 若将 "线段 $f(A)f(C)$ 与线段 $f(B)f(D)$ 相交" 这一条件换为 "f 为单射", 则类似定理 2 的证明亦可得结论.

致谢 作者感谢导师定光桂教授的精心指导和帮助.

参考文献:

[1] ALEKSANDROV A D. *Mapping of families of sets* [J]. Soviet Math. Dokl., 1970, **11**: 116–120.
[2] RASSIAS T M, ŠEMRL P. *On the Mazur-Ulam theorem and the Aleksandrov problem for unit distance preserving mappings* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1993, **118**(3): 919–925.
[3] MA Yu-mei. *The Aleksandrov problem for unit distance preserving mapping* [J]. Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., 2000, **20**(3): 359–364.
[4] BECKMAN F S, QUARLES D A. *On isometries of Euclidean spaces* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**: 810–815.
[5] CHU H Y, LEE K, PARK C. *On the Aleksandrov problem in linear n-normed spaces* [J]. Nonlinear Anal., 2004, **59**(7): 1001–1011.
[6] BENZ W. *Isometrian in normierten Raumen* [J]. Aequationes Math., 1985, **29**(2-3): 204–209.
[7] XIANG Shu-huang. *Mapping of conservative distance and the Mazur-Ulam theorem* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2001, **254**(1): 262–274.
[8] BAKER J A. *Isometries in normed spaces* [J]. Amer. Math. Monthly, 1971, **78**: 655–658.
[9] RASSIAS T M. *Mapping that preserving unit distance* [J]. Indian J. Math., 1990, **32**: 275–278.

On Conservative Mapping of Aleksandrov Problem

REN Wei-yun
(School of Science, Tianjin University, Tianjian 300072, China)

Abstract: Let E and F be real Hilbert spaces, and $f: E \to F$ be a mapping. This paper shows that f is an affine isometry if f preserves distance a and b (where a, b are two positive real numbers) and satisfies some additional conditions, and hence partly answers the Aleksandrov problem.

Key words: distance-ρ preserving mapping; strongly distance-ρ preserving mapping; isometry mapping; Aleksandrov problem.