**文章编号**: 1000-341X(2007)03-0625-06 **文献标识码**: **A**

# 有常秩的投射模

王 芳 贵
(四川师范大学数学系, 四川 成都 610066)
(E-mail: wangfg2004@163.com)

**摘 要**: 本文定义更具一般性的模 (未必是有限生成投射模) 的常秩的概念, 并证明了如果 $M$ 有常秩 $n$, $\bigwedge^n M$ 是有限生成的, 则 $M$ 是有限生成的. 还证明了若 $M$ 是有常秩 $n$ 的投射模, 则 $M$ 一定是有限生成的.

**关键词**: 常秩; 投射模; 有限生成.
**MSC(2000)**: 13C14; 13G05
**中图分类**: O154

本文恒设 $R$ 是交换环, $\bigwedge_R^n M$ 表示 $R$- 模 $M$ 的第 $n$ 次外幂.

先来回顾一些所需要的概念和结论. 设 $R$ 是任何交换环. 若 $M \cong R^n$ 是有限生成自由模, 则 $n$ 称为自由模 $M$ 的秩, 记 $n = \mathrm{rank}(M)$. 若 $M$ 是有限生成投射 $R$- 模, 则由 Kaplansky 定理 [5,Theorem2], 对 $R$ 的任何素理想 $P$, $M_P$ 是有限生成自由 $R_P$- 模, 存在自然数 $n_P$, 使得 $M_P \cong R_P^{n_P}$. 若对一切素理想 $P$, $n = n_P$ 是一个与 $P$ 无关的常自然数, 则称 $M$ 是有常秩为 $n$ 的投射模. 一个重要的结果是: 每个有限生成投射 $R$- 模有常秩当且仅当 $R$ 是连通环, 即 $R$ 的素谱空间 $\mathrm{Spec}(R)$ 是连通的拓朴空间 [2]. 值得注意的是到目前为止, 对常秩的认识及其与投射模的联系局限于有限生成上. 注意到整环自然是连通环, 且每一模 $M$ 都有秩为 $\mathrm{rank}(M) = \dim_K(K \bigotimes_R M)$, 其中 $K$ 表示整环 $R$ 的商域. 当 $M$ 是投射模, 且 $\mathrm{rank}(M) < \infty$ 时, 若 $M$ 是有限生成的, 则 $\mathrm{rank}(M)$ 与前面的常秩说法是一致的. 但由于整环上的非零投射理想一定是可逆理想, 故由 Vasconscelos 定理 [9], 此时的 $M$ 一定是有限生成的. 也就是说, 常秩概念可能在某种情况下, 不需要首先假定是有限生成的. 在文献 [3], [6] 与 [7] 中, Flanders 等人也讨论了任何 $R$- 模 $M$ 是否为有限生成或 $M$ 是否为投射模的条件. Flanders 证明了若存在 $n$, 使得 $\bigwedge^n M$ 是秩为 1 的有限生成自由模, 则 $M$ 是有限生成的 [3,Theorem3]. Ramras 推广并加强了 Flanders 的结论, 证明了若存在 $n$, 使得 $\bigwedge^n M$ 是有限生成投射模且在 $R$ 的任何素理想的局部化之下皆非零, 则 $M$ 是有常秩的有限生成投射模 [7,Corollary2.5]. 本文指出, 常秩的定义不需要假定 $M$ 是投射模与 $M$ 是有限生成的. 即在本文中定义了更具有一般性的常秩的概念, 证明在这种常秩意义之下, 任何有常秩的投射模一定是有限生成的.

**定义 1** 设 $M$ 是 $R$- 模, $P$ 是 $R$ 的素理想. 若 $M_P$ 是有限生成自由模 (例如, 当 $M$ 是有限生成平坦模时), 则称自由 $R_P$- 模 $M_P$ 的秩 $\mathrm{rank}(M_P)$ 为 $M$ 在素理想 $P$ 处的局部秩.

**定义 2** 设 $M$ 是 $R$- 模. 如果对 $R$ 的任何素理想 $P$, $M_P$ 是自由模, 且其局部秩 $\mathrm{rank}(M_P)$ 为一固定的非负整数 $m$, 则称 $M$ 是有常秩为 $m$, 记为 $\mathrm{rank}(M) = m$.

**收稿日期**: 2005-11-23; **接受日期**: 2006-07-06
**基金项目**: 国家自然科学基金 (10671137); 教育部博士点专项科研基金 (20060636001).

定义中既没有假定 $M$ 是有限生成的，也没有假定 $M$ 是投射模. 显然， $M$ 有常秩为 0 当且仅当 $M=0$. 注意，若 $M$ 有常秩，则 $M$ 一定是平坦模 [1]. 在文献 [4] 中， Glaz 与 Vasconcelos 证明了对整环 $R$, $M$ 忠实平坦理想当且仅当 $M$ 是局部主理想. 因此，忠实平坦理想的常秩为 1. 但忠实平坦理想未必是有限生成的投射模.

容易看到，若 $M,N$ 是分别有常秩为 $m,n$, 则 $M\bigotimes_R N$ 有常秩为 $mn$.

**引理 1**[7,Proposition22] 设 $S$ 是环 $R$ 的乘法集， $M$ 是 $R$- 模. 则

$$(\bigwedge_R^n M)_S=\bigwedge_{R_S}^n M_S.$$

**引理 2**[7,Proposition23] 设 $M,N$ 是 $R$- 模，则

$$\bigwedge^n(M\oplus N)\cong\bigoplus_{i=0}^n\{(\bigwedge^i M)\bigotimes_R(\bigwedge^{n-i} N)\}.$$

**推论 1** 设 $F$ 是秩为 $m$ 的自由模，则 $\bigwedge^n F$ 是秩为 $C_m^n$ 的自由模. 于是当 $n>m$ 时，$\bigwedge^n F=0$.

**引理 3** 设 $M$ 是 $R$- 模，且对 $R$ 的任何素理想 $P$, $M_P$ 是局部秩有限的自由模. 则 $M$ 有常秩为正整数 $n$ 当且仅当对任何素理想 $P$, $\bigwedge^n M_P\neq 0$, 但 $\bigwedge^{n+1} M_P=0$.

**证明** 若 $M$ 有常秩为 $n$, 则对 $R$ 的任何素理想 $P$, $M_P\cong R_P^n$, 因此有

$$\bigwedge^n M_P\cong R_P\neq 0,\quad \bigwedge^{n+1} M_P=0.$$

反之，若 $\mathrm{rank}(M_P)>n$, 则有 $\bigwedge^{n+1} M_P\neq 0$, 矛盾. 故 $\mathrm{rank}(M_P)\le n$. 同样，若 $\mathrm{rank}(M_P)<n$, 则有 $\bigwedge^n M_P=0$, 矛盾. 故 $\mathrm{rank}(M_P)=n$. 因此， $M$ 有常秩 $n$. □

**命题 1** 设 $M$ 是 $R$- 模 (未必是投射模), $n$ 是正整数. 则

(1) 若 $M$ 是局部有限生成自由模，则 $\bigwedge^n M$ 也是局部有限生成自由模.

(2) 若 $M$ 有常秩为 $m$, 则 $\bigwedge^n M$ 是有常秩为 $C_m^n$. 于是当 $n>m$ 时，有 $\bigwedge^n M=0$.

**证明** (1) 由引理 1; (2) 由引理 1, (1) 与推论 1 即知. □

设 $M$ 是 $R$- 模，定义 $\tau_M: M\bigotimes_R M^*\to R$, 使对 $x\in M$, $f\in M^*$,

$$\tau_M(x\otimes f)=f(x).$$

则 $\mathrm{Im}(\tau_M)=\tau_M(M\bigotimes_R M^*)$ 是 $R$ 的由所有 $f(x)\,(x\in M,\ f\in M^*)$ 生成的理想，称之模 $M$ 的迹理想，并简记为 $\tau(M)$.

注意若设 $M$ 是非零的自由模，则 $\tau(M)=R$.

**定理 1** 设 $M$ 是投射模， $\{\,e_i,f_i\,|\,i\in\Gamma\,\}$ 是 $M$ 的投射基. 对 $\Gamma$ 的任何 $n$ 个元素的子集

$$\sigma_n=\{s_1,\ldots,s_n\}\in\Gamma,$$

令

$$g_{\sigma_n}(x_1\wedge\cdots\wedge x_n)=\det(f_{s_i}(x_j)),\quad x_1,\ldots,x_n\in M,$$

则

$$\{\,e_{s_1}\wedge\cdots\wedge e_{s_n},g_{\sigma_n}\,\},$$

是 $\bigwedge^n M$ 的投射基，即 $\bigwedge^n M$ 也是投射模，其中 $\sigma_n$ 取遍 $\Gamma$ 的任何 $n$ 个元素的子集.

**证明** 对任何 $x_1,\ldots,x_n\in M$, 由于 $\{e_i,f_i|i\in\Gamma\}$ 是 $M$ 的投射基，则有

$$x_k=\sum_i f_i(x_k)e_i,\quad \text{只有有限个 } f_i(x_k) \text{ 不为零}.$$

故 $A=(f_i(x_k))$ 是每行只有有限个非零元素的 $n\times|\Gamma|$ 矩阵，从而只有有限个 $g_{\sigma_n}(x_1\wedge\cdots\wedge x_n)$ 不为零. 由行列式的性质有

$$x_1\wedge\cdots\wedge x_n=\sum_{\sigma_n}\det(f_{s_i}(x_j))e_{s_1}\wedge\cdots\wedge e_{s_n}=\sum_{\sigma_n}g_{\sigma_n}(x_1\wedge\cdots\wedge x_n)e_{s_1}\wedge\cdots\wedge e_{s_n}.$$

故 $\{e_{s_1}\wedge\cdots\wedge e_{s_n},g_{\sigma_n}\}$ 是 $\bigwedge^n M$ 的投射基. □

**定理 2** 设 $M$ 是非零的投射模，$\{e_i,f_i|i\in\Gamma\}$ 是 $M$ 的投射基. 则

(1) $\tau(M)$ 是由所有的 $f_i(e_k)$, $i,k\in\Gamma$, 生成的理想. 故若 $M$ 是有限生成投射模，则 $\tau(M)$ 也是有限生成的.

(2) $\tau(\bigwedge^n M)$ 是由诸 $\det(f_{s_i}(e_{s_j}))$ 生成的理想，其中 $\{s_1,\ldots,s_n\}$ 是 $\Gamma$ 的任何一个 $n$ 个元素的子集.

(3) 对任何 $n\geq 1$, $\tau(\bigwedge^{n+1}M)\subseteq\tau(\bigwedge^n M)$.

**证明** (1) 对任何 $x\in M$, 由于 $\{e_i,f_i|i\in\Gamma\}$ 是 $M$ 的投射基，于是可设 $x=\sum\limits_i f_i(x)e_i$, 因此，对任何 $g\in M^*$, 有

$$g(x)=\sum_i g(e_i)f_i(x).$$

又对每个 $i\in\Gamma$, 有

$$f_i(x)=\sum_k f_k(x)f_i(e_k),$$

因此 $\tau(M)$ 是由所有的 $f_i(e_k)$, $i,k\in\Gamma$, 生成的理想.

(2) 由定理 1 与 (1) 即知.

(3) 对任何 $s_1,\ldots,s_n,s_{n+1}\in\Gamma$, 按 $n+1$ 阶行列式 $\det(f_{s_i}(e_{s_j}))$ 的最后一行展开即得. □

**引理 4**[9] 设 $M$ 是投射 $R$- 模，$S$ 是 $R$ 的乘法集，则

(1) $\tau(M)M=M$;

(2) $\tau(M_S)=\tau(M)_S$.

**引理 5** 设 $R$ 是局部环，$M$ 是非零自由模，则 $JM\neq M$.

**证明** 由于 $M$ 是非零自由模，则 $M$ 同构于若干 $R$ 的直和. 不妨设 $M=\bigoplus_i R_i$, 其中 $R_i=R$. 令 $J_i=J$. 于是有 $JM=\bigoplus_i J_i\neq\bigoplus_i R_i=M$. □

**定理 3** 设 $M$ 是投射模.

(1) 若 $M$ 有常秩为 $n\neq 0$, 则 $\tau(M)=R$.

(2) 若 $M$ 是有限生成忠实模 (即由 $rM=0$, $r\in R$, 能推出 $r=0$), 则亦有 $\tau(M)=R$.

**证明** (1) 若 $\tau(M)\neq R$, 则存在 $R$ 的极大理想 $P$, 使得 $\tau(M)\subseteq P$. 由引理 4, 有 $\tau(M)M=M$, 故 $PM=M$, 从而有 $PM_P=M_P$. 由于 $M_P$ 是自由模，由此得到 $M_P=0$. 但 $M$ 的常秩为 $n\neq 0$, 故有 $M_P\neq 0$, 矛盾，从而有 $\tau(M)=R$.

(2) 由 $\tau(M)M = M$ 及 $M$ 是有限生成的，故存在 $a \in \tau(M)$, 使得 $(1-a)M = 0$. 由于 $M$ 是忠实的，故有 $a = 1$, 于是有 $\tau(M) = R$. □

**引理 6** 设 $R$ 是局部环， $F$ 是自由模. 则

(1) 若 $\mathrm{rank}(F) = 1$, 且 $u_1, \ldots, u_s$ 是 $F$ 的生成系，则存在 $k$, $1 \le k \le s$, 使得 $u_k$ 是 $F$ 的基底.

(2) 若 $\mathrm{rank}(F) = n$, 且

$$\alpha = (x_{11} \wedge \cdots \wedge x_{1n}) + \cdots + (x_{s1} \wedge \cdots \wedge x_{sn})$$

是 $\bigwedge^n F$ 的基底，则对某个 $k$, $1 \le k \le s$, $x_{k1} \wedge \cdots \wedge x_{kn}$ 已经是 $\bigwedge^n F$ 的基底.

(3) 若 $\mathrm{rank}(F) = n$, 且 $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ 是 $\bigwedge^n F$ 的基底，则 $x_1, \ldots, x_n$ 是 $F$ 的基底.

**证明** (1) 设 $\mathrm{rank}(F) = 1$, $\alpha$ 是 $F$ 的基底，则有 $b_i \in R$, 使得 $u_i = b_i\alpha$, 以及

$$\alpha = r_1u_1 + \cdots + r_su_s, \quad r_i \in R.$$

于是有 $r_1b_1 + \cdots + r_sb_s = 1$. 由于 $R$ 是局部环，故存在 $k$, 使得 $b_k$ 是单位. 因此， $u_k$ 是 $F$ 的基底.

(2) 由于 $\mathrm{rank}(F) = n$, 故有 $\mathrm{rank}(\bigwedge^n F) = 1$. 设

$$\alpha = (x_{11} \wedge \cdots \wedge x_{1n}) + \cdots + (x_{s1} \wedge \cdots \wedge x_{sn})$$

是 $\bigwedge^n F$ 的基底, 则 $x_{i1} \wedge \cdots \wedge x_{in}$, $i = 1, \ldots, s$ 是 $\bigwedge^n F$ 的生成系, 因此存在 $k$, 使得 $x_{k1} \wedge \cdots \wedge x_{kn}$ 是 $\bigwedge^n F$ 的基底.

(3) 设 $y_1, \ldots, y_n$ 是 $F$ 的基底， $\alpha = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$. 则

$$y_1 \wedge \cdots \wedge y_n = r\alpha.$$

又若记

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

其中 $A$ 是 $R$ 上的 $n \times n$ 矩阵，则

$$\alpha = by_1 \wedge \cdots \wedge y_n,$$

其中 $b = \det(A)$. 因此 $rb = 1$. 故 $b$ 是单位，从而 $A$ 是可逆矩阵. 于是有 $x_1, \ldots, x_n$ 是 $F$ 的基底. □

**定理 4** 设 $M$ 是 $R$- 模，且有常秩 1. 若 $\tau(M) = R$, 则 $M$ 是有限生成的.

**证明** 由 $\tau(M) = R$, 故存在 $x_i \in M$, $f_i \in M^*$, 使得

$$\tau(\sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) = 1,$$

于是，对任何素理想 $P$, 在环 $R_P$ 中有

$$\sum_{i=1}^n g_i(\frac{x_i}{1}) = 1.$$

其中

$$g_i(\frac{x}{s}) = \frac{f_i(x)}{s}, \quad x \in M,\ s \in R - P.$$

因此, 存在一个 $i$, 使得 $g_i(\frac{x_i}{1})$ 是 $R_P$ 中的单位. 于是 $g_i : M_P \to R_P$ 是满同态. 由于 $\mathrm{rank}(M_P) = \mathrm{rank}(R_P) = 1$, 即 $\ker(g_i)$ 是秩为零的自由 $R_P$- 模, 故 $\ker(g_i) = 0$, 即 $g_i$ 是同构. 于是 $\frac{x_i}{1}$ 是 $M_P$ 的生成元. 令 $N$ 是 $M$ 的由 $x_1, \ldots, x_n$ 生成的子模, 则对 $R$ 的任何素理想 $P$, $M_P = N_P$, 即 $M = N$ 是有限生成的. □

**定理 5** 设 $M$ 是 $R$- 模, 则以下各条等价:

(1) $\tau : M \bigotimes_R M^* \to R$ 是同构;

(2) $M$ 是有限生成的投射模, 且有常秩 1;

(3) $M$ 是有常秩为 1 的投射模.

**证明** (1)⇒(2). 设 $g : R \to M \bigotimes_R M^*$ 是 $\tau$ 的逆. 记 $g(1) = \sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i$, 其中 $x_i \in M$, $f_i \in M^*$, 则

$$\tau(\sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i) = 1.$$

于是有

$$M \cong R \bigotimes_R M \cong M \bigotimes_R M^* \bigotimes_R M \cong M \bigotimes_R R \cong M,$$

其中

$$x \to 1 \otimes x \to \sum_{i=1}^n (x_i \otimes f_i) \otimes x \to \sum_{i=1}^n x_i \otimes f_i(x) \to \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i,$$

即 $\alpha : M \to M$, $\alpha(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i$, 是同构. 设 $z_i = \alpha^{-1}(x_i)$. 于是对任何 $x \in M$, 有

$$x = \sum_{i=1}^n f_i(x) z_i.$$

故 $\{ z_1, \ldots, z_n; f_1, \ldots, f_n \}$ 是 $M$ 的投射基, 因此有 $M$ 是有限生成投射模.

对任何素理想 $P$, 设 $\mathrm{rank}(M_P) = s$, 则有 $\mathrm{rank}(M_P^*) = s$. 由于

$$(M \bigotimes_R M^*)_P \cong M_P \bigotimes_{R_P} (M_P)^* \cong R_P,$$

则有 $s^2 = 1$, 从而 $s = 1$. 故 $M$ 有常秩 1.

(2)⇒(1). 设 $M$ 是有常秩为 1 的投射模, 由定理 3, $\tau(M) = R$, 因此 $\tau$ 是满同态. 设 $K = \ker(\tau)$, 则 $0 \to K \to M \bigotimes_R M^* \to R \to 0$ 是正合列. 由于 $M$ 是有常秩 1 的有限生成投射模, 故 $M^*$ 也是有常秩为 1 的有限生成投射模. 因此 $K$ 有常秩 0, 从而有 $K = 0$. 于是有 $\tau$ 是同构.

(2)⇒(3). 显然.

(3)⇒(2). 由定理 3, $\tau(M) = R$. 由定理 4, $M$ 是有限生成的. □

**定理 6** 设 $M$ 是 $R$- 模, 且有常秩 $n$. 若 $\bigwedge^n M$ 是有限生成的, 则 $M$ 是有限生成的.

**证明** 不妨设 $\{x_{i1}\wedge\cdots\wedge x_{in}\,|\,i=1,\ldots,s\}$ 是 $\bigwedge^n M$ 的生成系，其中 $x_{ij}\in M$. 对任何素理想 $P$, 由于 $\bigwedge^n M_P$ 是秩为 1 的自由 $R_P$- 模，从引理 6 知存在 $k$, 使得

$$\frac{x_{k1}\wedge\cdots\wedge x_{kn}}{1}=\frac{x_{k1}}{1}\wedge\cdots\wedge\frac{x_{kn}}{1}$$

是 $(\bigwedge^n M)_P=\bigwedge^n M_P$ 的基底．因此，仍由引理 6, $\{\frac{x_{k1}}{1},\ldots,\frac{x_{kn}}{1}\}$ 是 $M_P$ 的基底，从而也是 $M_P$ 的生成系．于是能够看到 $\{x_{i1},\ldots,x_{in}\,|\,i=1,\ldots,s\}$ 是 $M$ 的生成系. □

**定理 7** 设 $M$ 是有常秩为 $n$ 的投射模，则 $M$ 是有限生成的.

**证明** 由命题 1, $\bigwedge^n M$ 是常秩为 1 的投射模．由定理 5, $\bigwedge^n M$ 是有限生成的．由定理 6, $M$ 是有限生成的. □

## 参考文献:


[1] 冯克勤．交换代数基础 [M]. 北京：高等教育出版社， 1985.
FENG Ke-qin. *Communicative Algebra* [M]. Beijing: Chinese High Education Press, 1985. (in Chinese)
[2] 佟文廷．代数 $K$- 理论 [M]. 南京：南京大学出版社， 2005.
Tong Wen-ting. *Algebraic K-Theory* [M]. Nanjing: Nanjing University Press, 2005. (in Chinese)
[3] FLANDERS H. *On free exterior powers* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, **145**: 357–367.
[4] GLAZ S, VASCONCELOS W V. *Flat ideals II* [J]. Manuscripta Math., 1977, **22**(4): 325–341.
[5] KAPLANSKY I. *Projective modules* [J]. Ann. of Math (2), 1958, **68**: 372–377.
[6] MICALI A. *Sur les algébres universelles d'un module projectif* [C]. Seminaire Dubreil-Piost (Algèbre et Thèorie des Nombres) 16e année, 1962–1963.
[7] RAMRAS M. *Free exterior powers* [J]. J. Algebra, 1971, **19**: 110–115.
[8] SILVESTER J R. *Introduction to Algebraic K-Theory* [M]. Chapman & Hall, London-New York, 1981.
[9] VASCONCELOS W V. *On projective modules of finite rank*[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, **22**: 430–433.


# Projective Modules of Constant Rank

*WANG Fang-gui*
(Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Sichuan 610066, China )

**Abstract**: In this note we define the notion of the constant rank of modules (not necessarily finitely generated projective modules) and prove that if $M$ is of constant rank $n$ and $\bigwedge^n M$ is finitely generated, then $M$ is finitely generated, and that if $M$ is a projective module of constant rank $n$, then $M$ is finitely generated.

**Key words**: constant rank; projective module; finitely generated.