第27卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.3
2007年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2007

**文章编号**: 1000-341X(2007)03-0631-08 **文献标识码**: A

# 非自伴 Dirac 算子的迹公式

胡 晓 燕
(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)
(E-mail: hu_xiaoyan@iapcm.ac.cn)

**摘 要**: 本文研究了非自伴 Dirac 算子的一般两点边值问题的渐近迹. 首先运用平移算子得到了其 Cauchy 问题解的渐近式, 并由此及边界条件, 构造了整函数 $\omega(\lambda)$, 利用它将边界条件分为八种基本类型, 最后采用留数的方法, 得到了四种主要类型的特征值的渐近迹公式.

**关键词**: Dirac 算子; 整函数; 留数方法; 迹公式.
**MSC(2000)**: 45C05
**中图分类**: O175.9

## 1 引 言

本文将研究下面的非自伴 Dirac 算子的两点边界条件下的渐近迹:

$$B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=\lambda y, \tag{1}$$

$$M_1(y)=a_1y_2(\pi)+a_2y_1(\pi)+a_3y_2(0)+a_4y_1(0)=0, \tag{2}$$

$$M_2(y)=b_1y_2(\pi)+b_2y_1(\pi)+b_3y_2(0)+b_4y_1(0)=0, \tag{3}$$

这里

$$y=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}},B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},P(x)=\begin{pmatrix}-p(x)&0\\0&-r(x)\end{pmatrix}.$$

其中 $r(x),p(x)$ 是 $[0,\pi]$ 上的实函数, $a_i,b_i$ 为常数.

微分算子迹在微分算子的谱理论以及孤立子与可积系统理论 [1−3] 研究中有很重要的作用. 在多数情况下, 微分算子的单个特征值的计算比较困难, 而整个信息比较容易获得, 例如, 在矩阵理论中, 我们知道, 所有特征值之和等于对角线元素之和, 即矩阵的迹, 特征值的二次基本对称函数等于矩阵的所有二阶主子式之和, 特征值的三次基本对称函数等于矩阵的所有三阶主子式之和. 事实上, 我们有时并不需要知道单个的特征值或点谱, 而只关心微分算子谱的分布及整体行为, 特别是其渐近性态.

L.M. Gelfand 和 B.M. Levitan 在 1953 年获得了以下 Sturm-liouvill 问题 [4] 的迹公式:

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\quad y(0)=y(\pi)=0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n-n^2-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}q(x)\mathrm{d}x)=\frac{q(0)+q(\pi)}{4}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q(x)\mathrm{d}x.$$

**收稿日期**: 2005-07-01; **接受日期**: 2006-07-02
**基金项目**: 国家 973 项目 (2005CB321700).

随后, 关于迹公式的研究出现了一系列的论文[4,5], 但是, 这些方法不能用于非自伴的情形. 1981 年曹策问对非自伴的 Sturm-Liouville 算子的渐近迹得到了很好的结果[6], 并提出了留数的方法. 他主要利用平移算子和一个积分恒等式, 将微分算子迹的计算转化为某些亚纯函数在回路族上的计算.

本文我们将利用平移算子及留数方法得到上述非自伴 Dirac 算子的渐近迹.

## 2 Cauchy 问题解的渐近式

令 $A_1=B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+P(x)$, 则问题

$$A_1y=\lambda y,\quad y_1(0)=\cos\beta,\quad y_2(0)=-\sin\beta$$

的解 $\varphi(x)$ 可表示为

$$\varphi(x)=R(x)f(x)+\int_0^x K(x,s)f(s)\mathrm{d}s,\tag{4}$$

其中 $f(x)$ 是 $(B_1y=\lambda y, y_1(0)=\cos\alpha, y_2(0)=-\sin\alpha)$ 的解, 这里 $B_1=B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$,

$$R(x)=\begin{pmatrix}\cos(\frac12\int_0^x[q(\xi)+r(\xi)]\mathrm{d}\xi+\alpha-\beta) & -\sin(\frac12\int_0^x[q(\xi)+r(\xi)]\mathrm{d}\xi+\alpha-\beta)\\ -\sin(\frac12\int_0^x[q(\xi)+r(\xi)]\mathrm{d}\xi+\alpha-\beta) & \cos(\frac12\int_0^x[q(\xi)+r(\xi)]\mathrm{d}\xi+\alpha-\beta)\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}K(x,s)=&\frac12[H(x+s)+BH(x+s)B]+\frac12[H(x-s)-BH(x-s)B]+\frac12\int_x^{x+s}(-BG(t,\\&x+s-t)+G(t,x+s-t)B)\mathrm{d}t+\frac12\int_{x-s}^x(G(t,t-x+s)B-BG(t,t-x+s))\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$H(x)=K(x,0),\quad G(x,t)=-P(x)K(x,t)$$

令 $\beta=0$, 将 (4) 分部积分, 得到满足初值条件 $(\varphi_1(0)=1,\varphi_2(0)=0)$ 的解 $\varphi(x)$ 对 $\lambda$ 的渐近式

$$\varphi_1(x)=\cos(\eta(x))+\frac1\lambda K_1(x,\lambda)+\frac1{\lambda^2}K_2(x,\lambda)+O(\frac{e^{|\tau|x}}{\lambda^3}),\tag{5}$$

$$\varphi_2(x)=\sin(\eta(x))+\frac1\lambda T_1(x,\lambda)+\frac1{\lambda^2}T_2(x,\lambda)+O(\frac{e^{|\tau|x}}{\lambda^3}),\tag{6}$$

其中 $\eta(x)=\frac12\int_0^x A(s)\mathrm{d}s+\lambda x-\alpha$, $\sigma(x)=\frac12\int_0^x A(s)\mathrm{d}s+\lambda x+\alpha$,

$$\begin{aligned}K_1(x,\lambda)=&\frac14\cos(\sigma(x))B(0)-\frac14\cos(\eta(x))B(x)+\frac18\sin(\eta(x))\int_0^x B^2(s)\mathrm{d}s,\\K_2(x,\lambda)=&\frac18\sin(\eta(x))B'(x)+\frac18\sin(\sigma(x))B'(0)+\frac18\cos(\eta(x))A(x)B(x)-\frac18\cos(\sigma(x))A(0)B(0)+\\&\frac1{16}\cos(\eta(x))B^2(0)-\frac1{16}\cos(\sigma(x))B(0)B(x)+\frac1{16}\cos(\eta(x))\int_0^x B'(s)B(s)\mathrm{d}s-\\&\frac1{16}\int_0^x A(s)B^2(s)\mathrm{d}s\sin(\eta(x))+\frac1{32}\sin(\sigma(x))\int_0^x B^2(s)\mathrm{d}sB(0)-\frac1{32}\sin(\sigma(x))B(x)-\\&\frac1{128}\cos(\eta(x))(\int_0^x B^2(s)\mathrm{d}s)^2,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_1(x,\lambda)=&\frac{1}{4}\sin(\eta(x))B(0)+\frac{1}{4}\sin(\sigma(x))B(x)-\frac{1}{8}\cos(\eta(x))\int_0^x B^2(s)\mathrm{d}s,\\
T_2(x,\lambda)=&\frac{1}{8}\cos(\eta(x))B'(x)-\frac{1}{8}\cos(\sigma(x))B'(0)-\frac{1}{8}\sin(\eta(x))A(x)B(x)-\frac{1}{8}\sin(\sigma(x))A(0)B(0)+\\
&\frac{1}{16}\sin(\eta(x))B^2(0)+\frac{1}{16}\sin(\eta(x))B(0)B(x)+\frac{1}{16}\sin(\eta(x))\int_0^x B'(s)B(s)\mathrm{d}s+\\
&\frac{1}{16}\int_0^x A(s)B^2(s)\mathrm{d}s\cos(\eta(x))-\frac{1}{32}\cos(\eta(x))\int_0^x B^2(s)\mathrm{d}sB(0)-\frac{1}{32}\cos(\sigma(x))B(x)-\\
&\frac{1}{128}\sin(\eta(x))(\int_0^x B^2(s)\mathrm{d}s)^2.
\end{aligned}
$$

令 $\beta=-\frac{\pi}{2}$, 将 (4) 式分部积分，得到满足初值条件 $(\psi_1(0)=1,\psi_2(0)=0)$ 的解 $\psi(x)$ 对 $\lambda$ 的渐近式

$$
\psi_1(x)=-\sin(\eta(x))+\frac{1}{\lambda}M_1(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda^2}M_2(x,\lambda)+O(\frac{e^{|\tau|x}}{\lambda^3}), \tag{7}
$$

$$
\psi_2(x)=\cos(\eta(x))+\frac{1}{\lambda}N_1(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda^2}N_2(x,\lambda)+O(\frac{e^{|\tau|x}}{\lambda^3}), \tag{8}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
M_1(x,\lambda)=&-\frac{1}{4}\sin(\sigma(x))B(0)+\frac{1}{4}\sin(\eta(x))B(x)+\frac{1}{8}\cos(\eta(x))\int_0^x B^2(s)\mathrm{d}s,\\
M_2(x,\lambda)=&\frac{1}{8}\cos(\eta(x))B'(x)+\frac{1}{8}\cos(\sigma(x))B'(0)-\frac{1}{8}\sin(\eta(x))A(x)B(x)+\\
&\frac{1}{8}\sin(\sigma(x))A(0)B(0)-\frac{1}{16}\sin(\eta(x))B^2(0)+\frac{1}{16}\sin(\sigma(x))B(0)B(x)-\\
&\frac{1}{16}\sin(\eta(x))\int_0^x B'(s)B(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{16}\int_0^x A(s)B^2(s)\mathrm{d}s\cos(\eta(x))+\\
&\frac{1}{32}\cos(\sigma(x))\int_0^x B^2(s)\mathrm{d}sB(0)-\frac{1}{32}\cos(\sigma(x))B(x)+\frac{1}{128}\sin(\eta(x))(\int_0^x B^2(s)\mathrm{d}s)^2,\\
N_1(x,\lambda)=&\frac{1}{4}\cos(\eta(x))B(0)+\frac{1}{4}\cos(\sigma(x))B(x)+\frac{1}{8}\sin(\eta(x))\int_0^x B^2(s)\mathrm{d}s,\\
N_2(x,\lambda)=&-\frac{1}{8}\sin(\eta(x))B'(x)+\frac{1}{8}\sin(\sigma(x))B'(0)-\frac{1}{8}\cos(\eta(x))A(x)B(x)-\\
&\frac{1}{8}\cos(\sigma(x))A(0)B(0)+\frac{1}{16}\cos(\eta(x))B^2(0)+\frac{1}{16}\cos(\eta(x))B(0)B(x)+\\
&\frac{1}{16}\cos(\eta(x))\int_0^x B'(s)B(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{16}\int_0^x A(s)B^2(s)\mathrm{d}s\sin(\eta(x))+\\
&\frac{1}{32}\sin(\eta(x))\int_0^x B^2(s)\mathrm{d}sB(0)+\frac{1}{32}\sin(\sigma(x))B(x)-\frac{1}{128}\cos(\eta(x))(\int_0^x B^2(s)\mathrm{d}s)^2.
\end{aligned}
$$

也可利用迭代的方法，求出 $\varphi(x),\psi(x)$ 的渐近式.

为简化计算，本文假定 $\int_0^{\pi}(q(\xi)+r(\xi))d\xi+\beta-\alpha=0$.

## 3 边值问题的分类

我们首先对非自伴 Dirac 算子的两点边值问题 (1)–(3) 按边界条件进行分类.

设 (1) 的通解为 $y=c_1\varphi+c_2\psi$, 其中 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)^{\mathrm{T}}$, $\psi=(\psi_1,\psi_2)^{\mathrm{T}}$ 是 Cauchy 问题的两个线性无关的解，代入 (2)(3), 可知 (1)–(3) 的特征值由下面整函数的零点决定：

$$\omega(\lambda)=\begin{vmatrix} M_1(\varphi) & M_1(\psi) \\ M_2(\varphi) & M_2(\psi) \end{vmatrix}=D_{13}\varphi_2(\pi)+D_{23}\varphi_1(\pi)+D_{41}\psi_2(\pi)+D_{42}\varphi_1(\pi)+D_{21}+D_{43}, \quad (9)$$

其中 $D_{ik}=\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix}$, 将 $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2$ 的表达式 (5)–(8) 代入得

$$\begin{aligned}\omega(\lambda)=&(D_{13}-D_{42})\sin\lambda\pi+(D_{23}+D_{41})\cos\lambda\pi+D_{21}+D_{43}+\\
&\frac{1}{4\lambda}\sin\lambda\pi(B(\pi)+B(0))(D_{13}+D_{42})+\frac{1}{4\lambda}\cos\lambda\pi(B(0)-B(\pi))(D_{23}-D_{41})+\\
&\frac{1}{8\lambda}\sin\lambda\pi\int_0^\pi B^2(s)\mathrm{d}s(D_{23}+D_{41})+\frac{1}{8\lambda}\cos\lambda\pi\int_0^\pi B^2(s)\mathrm{d}s(D_{42}-D_{13})+\\
&\frac{1}{\lambda^2}[\frac{1}{8}\cos\lambda\pi(B'(\pi)-B'(0))-\frac{1}{8}\sin\lambda\pi(A(\pi)B(\pi)+A(0)B(0))-\\
&\frac{1}{32}\cos\lambda\pi\int_0^\pi B^2(s)\mathrm{d}s(B(\pi)+B(0))(D_{13}+D_{42})+\\
&\frac{1}{\lambda^2}[\frac{1}{8}\sin\lambda\pi(B'(\pi)+B'(0))+\frac{1}{8}\cos\lambda\pi(A(\pi)B(\pi)-A(0)B(0))+\\
&\frac{1}{32}\sin\lambda\pi\int_0^\pi B^2(s)\mathrm{d}s(B(0)-B(\pi))(D_{23}-D_{41})+\\
&\frac{1}{\lambda^2}[\frac{1}{16}\cos\lambda\pi(B^2(0)-B(0)B(\pi))+\frac{1}{16}\cos\lambda\pi\int_0^\pi B'(s)B(s)\mathrm{d}s-\\
&\frac{1}{16}\sin\lambda\pi\int_0^\pi B^2(s)A(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{128}\cos\lambda\pi(\int_0^\pi B^2(s)\mathrm{d}s)^2](D_{23}+D_{41})+\\
&\frac{1}{\lambda^2}[\frac{1}{16}\sin\lambda\pi(B^2(0)+B(0)B(\pi))+\frac{1}{16}\sin\lambda\pi\int_0^\pi B'(s)B(s)\mathrm{d}s+\\
&\frac{1}{16}\cos\lambda\pi\int_0^\pi B^2(s)A(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{128}\sin\lambda\pi(\int_0^\pi B^2(s)\mathrm{d}s)^2](D_{13}-D_{42})+O(\frac{e^{|\tau|x}}{\lambda^3}).\end{aligned}$$

由于各项的系数 $D_{ij}$ 决定 $\omega(\lambda)$ 中 $\lambda$ 的阶数，据此我们做如下分类：

**表一 整函数的分类**

| | $D_{13}-D_{42}$ | $D_{23}+D_{41}$ | $D_{13}$ | $D_{42}$ | $D_{23}$ | $D_{41}$ | $D_{13}+D_{42}$ | $D_{23}-D_{41}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | $*$ | $*$ | | | $*$ | | | |
| II | $*$ | $*$ | | | | $*$ | | |
| III | $*$ | 0 | | | $*$ | $*$ | | |
| IV | $*$ | 0 | | | 0 | 0 | | |
| V | 0 | $*$ | | | $*$ | | | |
| VI | 0 | $*$ | | | | $*$ | | |
| VII | 0 | 0 | | | $*$ | $*$ | | |
| VIII | 0 | 0 | $*$ | $*$ | 0 | 0 | | |
| IX | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

其中 $*$ 表示所示的量不为零， 0 表示为零，空白的表格表示可以为零，也可以不为零，按上表中的分类，其中第 (IX) 类 $\omega(\lambda)$ 为常数，成为平凡情形．其余八类分别为：

I. $\alpha y_2(\pi)+y_1(\pi)+\gamma y_1(0)=0, \beta y_2(\pi)+y_2(0)+\delta y_1(0)=0, \alpha+\delta\neq 0, 1+\beta\gamma-\delta\alpha\neq 0;$

II. $\alpha y_1(\pi)+\gamma y_2(0)+y_1(0)=0, y_2(\pi)+\beta y_1(\pi)+\delta y_2(0)=0, \gamma+\beta\neq 0, 1+\alpha\delta-\delta\gamma\neq 0;$

III. $\beta y_1(\pi)+\alpha y_2(0)-y_1(0)=0, \beta y_2(\pi)+y_2(0)+\gamma y_1(0)=0, (\gamma-\alpha)\beta\neq 0;$

IV. $y_2(\pi)+\beta y_1(0)=0, y_1(\pi)+\alpha y_2(0)=0, \alpha\neq\beta;$

V. $\alpha y_2(\pi)+y_1(\pi)-\beta y_1(0)=0, \gamma y_2(\pi)-\alpha y_1(0)+y_2(0)=0, 1+\alpha^2+\beta\gamma\neq 0;$

VI. $-\alpha y_2(0)+y_1(0)+\beta y_1(\pi)=0, y_2(\pi)+\alpha y_1(\pi)+\gamma y_2(0)=0, 1+\alpha^2+\beta\gamma\neq 0;$

VII. $\beta y_1(\pi)-\alpha y_2(0)-y_1(0)=0, \beta y_2(\pi)+y_2(0)-\alpha y_1(0)=0, \beta\neq 0;$

VIII. $y_2(\pi)+\alpha y_1(0)=0, y_1(\pi)+\alpha y_2(0)=0, \alpha)\neq 0,$

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是复常数，周期边界条件就是 (V) 或 (VI) 中 $\alpha=0,\beta=-1,\gamma=-1$ 时的情形.

## 4 迹公式

我们先对类型 (I) 做详细的研究.

对类型 (I), 将边界条件代入 $\omega(\lambda)$, 得到

$$\begin{aligned}\omega(\lambda)=&(\alpha+\delta)\sin\lambda\pi+(1+\beta\gamma-\delta\alpha)\cos\lambda\pi+\beta+\gamma+\\ &\frac{1}{4\lambda}\cos\lambda\pi(B(0)-B(\pi))(1-\gamma\beta+\delta\alpha)-\frac{1}{8\lambda}(\alpha+\delta)\int_0^\pi B^2(s)ds\cos\lambda\pi+\\ &\frac{1}{8\lambda}\sin\lambda\pi(1+\beta\gamma-\delta\alpha)\int_0^\pi B^2(s)ds+O(\frac{e^{|\tau|x}}{\lambda^2}).\end{aligned}$$

则 $\omega(\lambda)$ 的主部为

$$\omega_0(\lambda)=(\alpha+\delta)\sin\lambda\pi+(1+\beta\gamma-\delta\alpha)\cos\lambda\pi+\beta+\gamma=A[\sin\pi(\lambda+\theta_1)-\sin\theta_2\pi],$$

其中 $A=\sqrt{(\alpha+\delta)^2+(1+\beta\gamma-\delta\alpha)^2}$, $\cos\theta_1\pi=\frac{\alpha+\delta}{A}$, $\sin\theta_2\pi=-\frac{\beta+\gamma}{A}$, $\theta_1$, $\theta_2$ 为复数，且 $-1\leq\mathrm{Re}\theta_1<1$, $0\leq\mathrm{Re}\theta_2\leq\frac{1}{2}$ 或 $-1\leq\mathrm{Re}\theta_2\leq-\frac{1}{2}$.

$\omega_0(\lambda)$ 的零点为： $\lambda_1=\theta_2-\theta_1+2n$, $\lambda_2=1-\theta_2-\theta_1+2n$ $(n=0,\pm1,\ldots)$, 在平行于实轴的两条直线上交叉分布.

令 $M_1^{(1)}=(B(\pi)+B(0))(\alpha-\delta)$, $M_2^{(1)}=(B(0)-B(\pi))(1-\gamma\beta+\alpha\delta)$, $M_3^{(1)}=(\alpha+\delta)\int_0^\pi B^2(s)\mathrm{d}s$, $M_4^{(1)}=(1+\beta\gamma-\delta\alpha)\int_0^\pi B^2(s)\mathrm{d}s$, 则

$$\frac{\omega(\lambda)}{\omega_0(\lambda)}=1+\frac{1}{4\lambda}[\frac{M_1^{(1)}\sin\lambda\pi}{\omega_0(\lambda)}+\frac{M_2^{(1)}\cos\lambda\pi}{\omega_0(\lambda)}-\frac{M_3^{(1)}\cos\lambda\pi}{2\omega_0(\lambda)}+\frac{M_4^{(1)}\sin\lambda\pi}{2\omega_0(\lambda)}]+O(\frac{e^{|\tau|\pi}}{\lambda^2\omega_0(\lambda)}) \quad (10)$$

容易证明.

**引理 1** 记 $\lambda=\sigma+i\tau$. 当 $0\leq\mathrm{Re}\theta_2\leq\frac{1}{2}$ 时，取回路 $C_N:\sigma_1=-\mathrm{Re}\theta_1+1+2N$, $\sigma_2=-\mathrm{Re}\theta_1-1-2N$, $\tau_1=N$, $\tau_2=-N$ $(N=0,1,2,\ldots)$; 当 $-1\leq\mathrm{Re}\theta_2\leq-\frac{1}{2}$ 时，取回路 $C_N:\sigma_1=-\mathrm{Re}\theta_1+2N$, $\sigma_2=-\mathrm{Re}\theta_1-2-2N$, $\tau_1=N$, $\tau_2=-N$ $(N=0,1,2,\ldots)$, 在 $C_N$ 上, $\frac{\sin\lambda\pi}{\omega_0(\lambda)}$, $\frac{\cos\lambda\pi}{\omega_0(\lambda)}$, $\frac{e^{|\tau|\pi}}{\lambda^2\omega_0(\lambda)}$ 有界.

**命题 1** 当 $N$ 充分大时， $\omega(\lambda)$ 与 $\omega_0(\lambda)$ 在 $C_N$ 内有相同个数的零点.

**证明** 由 (10) 式及引理 1 知：

$$\frac{\omega(\lambda)}{\omega_0(\lambda)}=1+\frac{1}{4\lambda}[\frac{M_1^{(1)}\sin\lambda\pi}{\omega_0(\lambda)}+\frac{M_2^{(1)}\cos\lambda\pi}{\omega_0(\lambda)}-\frac{M_3^{(1)}\cos\lambda\pi}{2\omega_0(\lambda)}+\frac{M_4^{(1)}\sin\lambda\pi}{2\omega_0(\lambda)}]+O(\frac{1}{N^2})$$

当 $N$ 充分大时，在 $C_N$ 上有 $|\frac{\omega(\lambda)}{\omega_0(\lambda)}-1|<1$. 有 Rouché 定理得证.

**定理 1** 对问题 (I):

1). 当 $\sin\theta_1\pi\neq\sin\theta_2\pi$, $|\mathrm{Re}\theta_2|\neq\frac{1}{2}$ 时，有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[\lambda_n+2\theta_1-1-(\frac{M_4^{(1)}}{8A}+\frac{M_1^{(1)}}{4A})(\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)\pi}{\pi(1-\theta_1-\theta_2+2n)\cos\theta_2\pi}-\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)\pi}{\pi(\theta_2-\theta_1+2n)\cos\theta_2\pi})-$$
$$(\frac{M_2^{(1)}}{4A}-\frac{M_3^{(1)}}{8A})](\frac{\cos(\theta_2-\theta_1)\pi}{\pi(\theta_2-\theta_1+2n)\cos\theta_2\pi}+\frac{\cos(\theta_2+\theta_1)\pi}{\pi(1-\theta_2-\theta_1+2n)\cos\theta_2\pi})]$$
$$=-(-\frac{M_3^{(1)}}{8A}+\frac{M_2^{(1)}}{4A})\frac{1}{\sin\theta_1\pi-\sin\theta_2\pi};$$

2). 当 $\sin\theta_1\pi=\sin\theta_2\pi$, $|\mathrm{Re}\theta_2|\neq\frac{1}{2}$ 时，有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[\lambda_n+2\theta_1-1-(\frac{M_4^{(1)}}{8A}+\frac{M_1^{(1)}}{4A})(\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)\pi}{\pi(1-\theta_1-\theta_2+2n)\cos\theta_2\pi}-\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)\pi}{\pi(\theta_2-\theta_1+2n)\cos\theta_2\pi})+$$
$$(\frac{M_2^{(1)}}{4A}-\frac{M_3^{(1)}}{8A})](\frac{\cos(\theta_2-\theta_1)\pi}{\pi(\theta_2-\theta_1+2n)\cos\theta_2\pi}+\frac{\cos(\theta_2+\theta_1)\pi}{\pi(1-\theta_2-\theta_1+2n)\cos\theta_2\pi})]=0;$$

3). 当 $\sin\theta_1\pi\neq\sin\theta_2\pi$, $|\mathrm{Re}\theta_2|=\frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}\theta_2=0$ 时，有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[2\lambda_n+2\theta_1-2\theta_2-(\frac{M_4^{(1)}}{8A}+\frac{M_1^{(1)}}{4A})(\frac{2\sin\theta_1\pi}{\pi(2n-\theta_1+\theta_2)}-\frac{2\sin(\theta_2-\theta_1)\pi}{\pi^2(\theta_2-\theta_1+2n)^2\sin\theta_2\pi})-$$
$$(\frac{M_2^{(1)}}{4A}-\frac{M_3^{(1)}}{8A})](\frac{2\sin(\theta_2-\theta_1)\pi}{\pi(\theta_2-\theta_1+2n)\sin\theta_2\pi}+\frac{2\sin\theta_1\pi}{\pi^2(\theta_2-\theta_1+2n)^2})]$$
$$=(-\frac{M_3^{(1)}}{8A}+\frac{M_2^{(1)}}{4A})\frac{1}{\sin\theta_1\pi-\sin\theta_2\pi};$$

4). 当 $\sin\theta_1\pi=\sin\theta_2\pi$, $|\mathrm{Re}\theta_2|=\frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}\theta_2=0$ 时，有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[2\lambda_n-(\frac{M_4^{(1)}}{8A}+\frac{M_1^{(1)}}{4A})\frac{\sin\theta_1\pi}{\pi n}+\frac{\sin\theta_1\pi}{2\pi^2n^2}(\frac{M_2^{(1)}}{4A}-\frac{M_3^{(1)}}{8A})]=\pm2(-\frac{M_3^{(1)}}{8A}+\frac{M_2^{(1)}}{4A}).$$

**证明** 由命题 1, 当 $N$ 充分大时，对下面的恒等式沿 $C_N$ 作回路积分：

$$\lambda[\frac{\omega'(\lambda)}{\omega(\lambda)}-\frac{\omega_0'(\lambda)}{\omega_0(\lambda)}]=-\ln\frac{\omega(\lambda)}{\omega_0(\lambda)}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[\lambda\ln\frac{\omega(\lambda)}{\omega_0(\lambda)}],$$

$\ln\frac{\omega(\lambda)}{\omega_0(\lambda)}$ 沿 $C_N$ 为单值解析函数，故右边的第二项的积分为零，

$$\ln\frac{\omega(\lambda)}{\omega_0(\lambda)}=\frac{1}{4\lambda}[\frac{M_1^{(1)}\sin\lambda\pi}{\omega_0(\lambda)}+\frac{M_2^{(1)}\cos\lambda\pi}{\omega_0(\lambda)}-\frac{M_3^{(1)}\cos\lambda\pi}{2\omega_0(\lambda)}+\frac{M_4^{(1)}\sin\lambda\pi}{2\omega_0(\lambda)}]+O(\frac{1}{N^2})$$

利用留数定理，即得证.

用类似的方法得到其它几种类型的迹公式, 这里我们只列出类型 (II), (III), (IV) 的迹公式.

**定理 2** 对问题 (II)

1). 当 $\sin\theta_1\pi\neq\sin\theta_2\pi$, $|\mathrm{Re}\theta_2|\neq\frac{1}{2}$ 时，有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[\lambda_n+2\theta_1-1-(\frac{M_4^{(2)}}{8A}+\frac{M_1^{(2)}}{4A})(\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)\pi}{\pi(1-\theta_1-\theta_2+2n)\cos\theta_2\pi}-\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)\pi}{\pi(\theta_2-\theta_1+2n)\cos\theta_2\pi})-(\frac{M_2^{(2)}}{4A}+\frac{M_3^{(2)}}{8A})](\frac{\cos(\theta_2-\theta_1)\pi}{\pi(\theta_2-\theta_1+2n)\cos\theta_2\pi}+\frac{\cos(\theta_2+\theta_1)\pi}{\pi(1-\theta_2-\theta_1+2n)\cos\theta_2\pi})]$$
$$=-(\frac{M_3^{(2)}}{8A}+\frac{M_2^{(2)}}{4A})\frac{1}{\sin\theta_1\pi-\sin\theta_2\pi};$$

2). 当 $\sin\theta_1\pi=\sin\theta_2\pi$, $|\mathrm{Re}\theta_2|\neq\frac{1}{2}$ 时，有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[\lambda_n+2\theta_1-1-(\frac{M_4^{(2)}}{8A}+\frac{M_1^{(2)}}{4A})(\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)\pi}{\pi(1-\theta_1-\theta_2+2n)\cos\theta_2\pi}-\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)\pi}{\pi(\theta_2-\theta_1+2n)\cos\theta_2\pi})+(\frac{M_2^{(2)}}{4A}+\frac{M_3^{(2)}}{8A})](\frac{\cos(\theta_2-\theta_1)\pi}{\pi(\theta_2-\theta_1+2n)\cos\theta_2\pi}+\frac{\cos(\theta_2+\theta_1)\pi}{\pi(1-\theta_2-\theta_1+2n)\cos\theta_2\pi})]=0;$$

3). 当 $\sin\theta_1\pi\neq\sin\theta_2\pi$, $|\mathrm{Re}\theta_2|=\frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}\theta_2=0$ 时，有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[2\lambda_n-2\theta_1-2\theta_2-(\frac{M_4^{(2)}}{8A}+\frac{M_1^{(2)}}{4A})(\frac{2\sin\theta_1\pi}{\pi(2n-\theta_1+\theta_2)}-\frac{2\sin(\theta_2-\theta_1)\pi}{\pi^2(\theta_2-\theta_1+2n)^2\sin\theta_2\pi})-(\frac{M_2^{(2)}}{4A}+\frac{M_3^{(2)}}{8A})](\frac{2\sin(\theta_2-\theta_1)\pi}{\pi(\theta_2-\theta_1+2n)\sin\theta_2\pi}+\frac{2\sin\theta_1\pi}{\pi^2(\theta_2-\theta_1+2n)^2})]$$
$$=(\frac{M_3^{(2)}}{8A}+\frac{M_2^{(2)}}{4A})\frac{1}{\sin\theta_1\pi-\sin\theta_2\pi};$$

4). 当 $\sin\theta_1\pi=\sin\theta_2\pi$, $|\mathrm{Re}\theta_2|=\frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}\theta_2=0$ 时，有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[2\lambda_n-(\frac{M_4^{(2)}}{8A}+\frac{M_1^{(2)}}{4A})\frac{\sin\theta_1\pi}{\pi n}+\frac{\sin\theta_1\pi}{2\pi^2n^2}(\frac{M_2^{(2)}}{4A}+\frac{M_3^{(2)}}{8A})]=\pm2(\frac{M_3^{(2)}}{8A}+\frac{M_2^{(2)}}{4A}),$$

其中 $A=\sqrt{(\beta+\gamma)^2+(1-\beta\gamma+\delta\alpha)^2}$, $\cos\theta_1\pi=-\frac{\alpha+\delta}{A}$, $\sin\theta_2\pi=-\frac{\alpha+\delta}{A}$, $\theta_1,\theta_2$ 为复数，且 $-1\leq\mathrm{Re}\theta_1<1, 0\leq\mathrm{Re}\theta_2\leq1$ 或 $-1\leq\mathrm{Re}\theta_2\leq-\frac{1}{2}$.

令 $M_1^{(2)}=(B(\pi)+B(0))(\beta-\gamma)$, $M_2^{(2)}=(B(0)-B(\pi))(-1-\gamma\beta+\alpha\delta)$, $M_3^{(2)}=(\beta+\gamma)\int_0^\pi B^2(s)\mathrm{d}s$, $M_4^{(2)}=(1-\beta\gamma+\delta\alpha)\int_0^\pi B^2(s)\mathrm{d}s$.

**定理 3** 对问题 (III)

1). 当 $0\leq\mathrm{Re}\theta\leq\frac{1}{2}$ 或 $-1\leq Re\theta\leq-\frac{1}{2}$ 时，有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[\lambda_n-1+\frac{M_1^{(3)}\sin\theta\pi}{4A\pi\cos\theta\pi}\frac{1+2\theta}{(2n-\theta)(2n+1+\theta)}+\frac{2M_2^{(3)}+M_3^{(3)}}{8A\pi}\frac{1+4n}{(2n-\theta)(2n+1+\theta)}]=-\frac{2M_2^{(3)}+M_3^{(3)}}{8A\sin\theta\pi};$$

2). 当 $|Re\theta|=\frac{1}{2}$ 时，有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[2\lambda_n+2\theta-\frac{M_1^{(3)}}{2A\pi^2}\frac{1}{(2n-\theta)^2}+\frac{2M_2^{(3)}+M_3^{(3)}}{2A\pi(2n-\theta)}]=-\frac{2M_2^{(3)}+M_3^{(3)}}{8A\sin\theta\pi},$$

其中 $A=(\gamma-\alpha)\beta, \sin\theta\pi=\frac{\beta^2-1-\alpha\gamma}{(\gamma-\alpha)\beta}, \theta$ 为复数，且 $0\le Re\theta\le\frac{1}{2}$ 或 $-1\le \mathrm{Re}\theta\le-\frac{1}{2}$. 令 $M_1^{(3)}=(B(\pi)+B(0))(\alpha+\gamma)\beta$, $M_2^{(3)}=(B(0)-B(\pi))2\beta$, $M_3^{(3)}=(\alpha-\gamma)\beta\int_0^\pi B^2(s)\mathrm{d}s$.

**定理 4** 对问题 (IV)

1). 当 $0\le \mathrm{Re}\theta\le\frac{1}{2}$ 或 $-1\le Re\theta\le-\frac{1}{2}$ 时，有

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[\lambda_n-1+\frac{M_1^{(4)}\sin\theta\pi}{4A\pi\cos\theta\pi}\frac{1+2\theta}{(2n-\theta)(2n+1+\theta)}+\frac{M_2^{(4)}}{8A\pi}\frac{1+4n}{(2n-\theta)(2n+1+\theta)}]=-\frac{M_2^{(4)}}{8A\sin\theta\pi};$$

2). 当 $|\mathrm{Re}\theta|=\frac{1}{2}$ 时,

$$\sum_{-\infty}^{\infty}[2\lambda_n+2\theta+\frac{M_1^{(4)}}{2A\pi^2}\frac{1}{(2n-\theta)^2}+\frac{M_2^{(4)}}{2A\pi(2n-\theta)}]=-\frac{M_2^{(4)}}{8A\sin\theta\pi},$$

其中 $A=\alpha-\beta$, $\sin\theta\pi=\frac{\alpha\beta-1}{A}$. 令 $M_1^{(4)}=(B(\pi)+B(0))(\alpha+\beta)$, $M_2^{(4)}=(\beta-\alpha)\int_0^\pi B^2(s)\mathrm{d}s$.

## 参考文献:


[1] 曹策问. 微分算子的迹 [J]. 数学进展, 1989, **18**(2): 170–178.
CAO Ce-wen. *Traces of differential operators* [J]. Adv. in Math. (Beijing), 1989, **18**(2): 170–178. (in Chinese)

[2] CAO Ce-wen. *Nonlinearization of the lax system for AKNS hierarchy* [J]. Sci. China Ser. A, 1989, **27**(7): 701–707.

[3] 李梦如. 离散 Sturm-Liouvill 特征值问题的迹公式 [J]. 数学物理学报, 1992, **12**(3): 303–307.
LI Meng-ru. *Trace identities for eigenvalues of the discrete Sturm-Liouville problem* [J]. Acta Math. Sci., 1992, **12**(3): 303–307. (in Chinese)

[4] LEVITAN B M, SARGSJAN I S. *Sturm-Liouville and Dirac Operators* [M]. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[5] ZAKHAROV V E, FADDEEV L D. *The half-power trace formulas of S-L problem* [J]. Funct. Anal. Appl., 1971, **5**: 280–289.

[6] 曹策问. 非自伴 Sturm-Liouvill 算子的渐近迹 [J]. 数学学报, 1981, **24**(1): 84–94.
CAO Ce-wen. *Asymptotic trace of the non-self-adjoint Sturm-Liouvill operator* [J]. Acta Math. Sinica, 1981, **24**(1): 84–94. (in Chinese)


# Trace Identities of Non-Self-Adjoint Dirac Operators


*HU Xiao-yan*

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China )



**Abstract**: This paper deals with asymptotic trace of non-self-adjoint Dirac operator eigenvalue problem with two points linear boundary condition. The asymptotic eatimations of solution of Cauchy problem are obtained for Dirac equation by use of the transformation matrix operator. By constructing an entire function $\omega(\lambda)$, and discussing every term's coefficient of $\omega(\lambda)$, boundary conditions are turned into eight element types. By resorting the residue method, four types eigenvalue's trace identities are obtained.



**Key words**: Dirac operator; eigenvalue; residue method; trace identity.