第27卷第3期 数学研究与评论 Vol.27, No.3
2007年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)03-0659-05 **文献标识码**: A

拟共形映射和弱 Cigar 域

褚玉明[1], 黄曼子[2]

(1. 湖南城市学院数学系, 湖南 益阳 413000; 2. 湖南师范大学数学与计算机科学学院, 湖南 长沙 410081)
(E-mail: chuyuming@hutc.zj.cn)

摘 要: 设 f 是 R^n 到 R^n 上的同胚, 本文证明了 f 是拟共形映射的充要条件是 f 将 R^n 中的任一弱 Cigar 域映成 R^n 中的弱 Cigar 域.

关键词: 拟共形映射; 弱 Cigar 域; 弱拟凸域.
MSC(2000): 30C65
中图分类: O174.55

1 引 言

自二十世纪五十年代由 L.V. Ahlfors[1], M.A. Lavrentieff[2] 等人创立和研究拟共形映射以来, 它一直是复分析中一个最活跃的研究分支之一, 由于 Ahlfors 在这一研究领域中的杰出贡献, 1981 年荣获 Wolf 数学奖. 拟共形映射理论经过了五十多年的发展, 现已不仅渗透到拓扑学 [3] 、Teichmüller 空间 [4] 、复动力系统 [5] 和 Riemann 曲面 [6] 等分析、几何和代数的众多分支中, 并且还在位势理论 [7] 和流体力学 [8] 等学科中找到了应用. 特别是 1985 年, D.P. Sullivan[9] 利用拟共形映射作为主要工具成功解决了复动力系统中著名的 "游荡域上的 Fatou-Julia 问题" 后, 使得近二十年来对拟共形映射理论与应用的研究掀起了一个新的高潮, 并由此产生了许多交叉学科. 令人鼓舞的是, 无论在拟共形映射理论发展的初期, 还是在该理论发展取得累累硕果的现在, 一大批中国数学工作者在该领域的研究中始终处于世界先进水平, 如夏道行 [10] 给出的参数表示, 王传芳 [11] 得到的精确化的 Mori 定理等. 这些结果不仅对现在而且对未来拟共形映射理论的研究、发展、完善和应用都将产生积极的影响.

拟共形映射是共形映射的自然发展和提升, 寻找拟共形映射的不变性区域和刻画一个同胚为拟共形映射的条件一直是研究拟共形映射的主要内容之一. 本文的目的是拓广 Cigar 域的概念, 定义弱 Cigar 域, 并证明 R^n 到 R^n 上的同胚是拟共形映射的充要条件是它保持弱 Cigar 域不变.

定义 1.1 设 $D\subset R^n$ 是一真子域, 若存在常数 $a\geq 1$, 对任意 $x_1,x_2\epsilon D$, 存在 D 中连结 x_1 与 x_2 两点的可求长曲线 γ, 对任意 $x\in\gamma$ 满足

$$\begin{cases} l(\gamma)\leq a|x_1-x_2|, & (1.1)\\ \min\limits_{j=1,2} l(\gamma_j(x_j,x))\leq ad(x,\partial D), & (1.2)\end{cases}$$

收稿日期: 2005-11-21; **接受日期**: 2006-08-26
基金项目: 国家重点基础研究发展计划 (973 计划) 基金 (2006CB708304).

则称 D 是一致域. 其中 $l(\gamma)$ 表示曲线 γ 的欧几里德长度, $d(x,\partial D)$ 表示点 x 到 D 的边界 ∂D 的欧几里德距离, $\gamma_j(x_j,x)$ 表示曲线 γ 夹在 x_j 与 x 之间的子曲线. 在定义 1.1 中, 若 D 满足不等式 (1.1), 则称 D 是拟凸域; 若 D 满足不等式 (1.2), 则称 D 是 Cigar 域.

一致域是由 O. Martio 和 J. Sarvas[12] 在研究函数的内射性质时首先引入的, 其后 F.W. Gehring 和 B.G. Osgood[13] 证明了 R^n 中的拟共形映射保持 R^n 中的一致域不变. 1992 年, 何兴纲 [14] 证明了: 若 R^n 中的同胚保持 R^n 中的一致域不变, 则其必为拟共形映射.

由于拟共形映射并不保持曲线的可求长性, 在本文中我们将拓广 Cigar 域的概念, 定义如下弱 Cigar 域.

定义 1.2 设 $D\subset R^n$ 是一真子域, 若存在常数 $a>0$, 对任意 $x_1,x_2\in D$, 存在 D 中连结 x_1 与 x_2 两点的曲线 γ, 对任意 $x\in\gamma$ 满足

$$\min_{j=1,2}\operatorname{dia}(\gamma_j(x_j,x))\le ad(x,\partial D), \tag{1.3}$$

则称 D 是弱 Cigar 域, 或特别地称作 a- 弱 Cigar 域. 本文主要证明如下两个结果:

定理 1 设 f 是 R^n 到 R^n 的 K- 拟共形映射, $D\subset R^n$ 是一真子域, $D'=f(D)$, 若存在常数 $a>0$, D 是 a- 弱 Cigar 域, 则 D' 是 a'- 弱 Cigar 域. 其中 $a'=a'(a,n,K)$ 是只与 a,n,K 有关的常数.

定理 2 设 f 是 R^n 到 R^n 上的同胚, 若对任意常数 $a>0$, 存在 $a'=a'(n,a)>0$, f 将 R^n 中的任意 a- 弱 Cigar 域 D 映成 a'- 弱 Cigar 域 $D'=f(D)$, 则 f 是拟共形映射.

为了下一节叙述和证明的需要, 在本文中我们将采用文献 [15] 中的标准记号和术语. 对 $x\in R^n$, $0<r<\infty$, 记 $B^n(x,r)=\{z\in R^n:|z-x|<r\}$, $S^{n-1}=\partial B^n(x,r)$, $B^n(r)=B^n(0,r)$, $B^n=B^n(1)$, Ω_n 表示 R^n 中的单位球 B^n 的 n 维 Lebesgue 测度. 设 f 是 R^n 到 R^n 上的同胚, 记

$$L(x,f,r)=\max_{|y-x|=r}|f(y)-f(x)|,$$

$$l(x,f,r)=\min_{|y-x|=r}|f(y)-f(x)|,$$

$$H(x,f)=\lim_{r\to 0}\operatorname{Sup}\frac{L(x,f,r)}{l(x,f,r)}.$$

2 定理证明

为了定理证明的需要, 我们首先需要引入和建立几则引理.

引理 1 设 f 是 R^n 到 R^n 上的 K- 拟共形映射, $c\ge 1$ 是常数, 对任意 $x\in R^n$ 和 $r>0$, 有

$$L(x,f,cL(x',f^{-1},r))/r\le a, \tag{2.1}$$

其中 $x'=f(x)$, f^{-1} 表示 f 的逆映射, $a=a(n,K,c)$ 是只与 n,K,c 有关的常数.

证明 设 Γ 是 $B^n(x,cL(x',f^{-1},r))\backslash\overline{f^{-1}(B^n(x',r))}$ 中连结 $S^{n-1}(x,cL(x',f^{-1},r))$ 和 $\partial(f^{-1}(B^n(x',r)))$ 的曲线族, $M(\Gamma)$ 表示曲线族 Γ 的模, 则由模的比较原理及文献 [15, 定理 7.5] 可得

$$M(\Gamma)\ge\omega_{n-1}\Big(\log\frac{cL(x',f^{-1},r)}{l(x',f^{-1},r)}\Big)^{1-n}, \tag{2.2}$$

其中 ω_{n-1} 表示 S^{n-1} 的 $n-1$ 维 Lebesgue 测度. 设 $\Gamma'=f(\Gamma)$, 则同样有

$$M(\Gamma')\leq \omega_{n-1}\Big(\log\frac{l(x,f,cL(x',f^{-1},r))}{r}\Big)^{1-n}. \tag{2.3}$$

由拟共形映射模的拟不变性得

$$KM(\Gamma')\geq M(\Gamma)\geq M(\Gamma')/K, \tag{2.4}$$

利用文献 [15, P79] 中的不等式有

$$\frac{L(x',f^{-1},r)}{l(x',f^{-1},r)}\leq c'=c'(n,K), \tag{2.5}$$

其中 $c'(n,K)$ 是只与 n,K 有关的常数.

结合不等式 (2.2),(2.3),(2.4) 和 (2.5) 可得

$$\frac{l(x,f,cL(x',f^{-1},r))}{r}\leq (cc')^{K^{\frac{1}{n-1}}}. \tag{2.6}$$

同样利用文献 [15, P79] 中的不等式得

$$\frac{L(x,f,cL(x',f^{-1},r))}{l(x,f,cL(x',f^{-1},r))}\leq c', \tag{2.7}$$

结合 (2.6) 和 (2.7) 两式有

$$\frac{L(x,f,cL(x',f^{-1},r))}{r}\leq c'(cc')^{K^{\frac{1}{n-1}}}=a.$$

定理 1 的证明 对任意 $y_1,y_2\in D'$, 存在 $x_1=f^{-1}(y_1)$,$x_2=f^{-1}(y_2)\in D$. 由于 D 是 a- 弱 Cigar 域, 存在 D 中连结 x_1 与 x_2 两点的曲线 γ, 且对任意 $x\in\gamma$ 满足

$$\min_{j=1,2}\mathrm{dia}(\gamma_j(x_j,x))\leq ad(x,\partial D).$$

$\gamma'=f(\gamma)\subset D'$ 是 D' 中连结 y_1 与 y_2 两点的曲线, 对任意 $y\in\gamma'=f(\gamma)$, 有 $x=f^{-1}(y)\in\gamma$ 且

$$\min_{j=1,2}\mathrm{dia}(\gamma_j(x_j,x))\leq ad(x,\partial D).$$

不妨设 $\mathrm{dia}(\gamma_1(x_1,x))\leq ad(x,\partial D)$, 则 $\gamma_1\subseteq\overline{B}^n(x,ad(x,\partial D))$, 从而

$$\gamma_1'=f(\gamma_1)=\gamma_1'(y_1,y)\subseteq\overline{B}^n(y,L(x,f,ad(x,\partial D))).$$

而 $L(x,f,ad(x,\partial D))\leq L(x,f,aL(y,f^{-1},d(y,\partial D')))$, 结合引理 1 可得

$$L(x,f,ad(x,\partial D))\leq\frac{a'}{2}d(y,\partial D')\ (a'=a'(n,K,a)\text{是只与}n,K,a\text{有关的常数}).$$

由此可得

$$\gamma_1'=f(\gamma_1)\subseteq\overline{B}^n(y,\frac{a'}{2}d(y,\partial D')),$$

进而有 $\mathrm{dia}(\gamma_1') \le a'd(y,\partial D)$, 从而

$$\min_{j=1,2} \mathrm{dia}(\gamma_j(y_j,y)) \le a'd(y,\partial D),$$

D' 是 a'- 弱 Cigar 域.

引理 2[14] 设 $D, D' \subset R^n$ 是 R^n 中的两个真子域, f 是 D 到 D' 上的同胚, 若存在常数 $c>1$, 对任意 $x \in D$, 存在 $0<r_0<d(x,\partial D)$, 对任意 $r \in (0,r_0]$ 有

$$[\mathrm{dia}(f(B^n(x,r)))]^n \le cm[f(B^n(x,r))], \tag{2.8}$$

则 f 是 K- 拟共形映射, 其中 $K=K(n,c)$ 是只与 n,c 有关的常数, $m[f(B^n(x,r))]$ 表示 $f(B^n(x,r))$ 的 n 维 Lebesgue 测度.

引理 3 设 D, D' 是 R^n 中的两个真子域, f 是 D 到 D' 上的同胚, 若对任意 $a>0$, 存在 $a'=a'(n,a)>0$, f 将 D 中的任一 a- 弱 Cigar 域映射成 D' 中的 a'- 弱 Cigar 域, 则 f 必是 D 到 D' 上的 K- 拟共形映射. 其中 $K=K(n,a')$ 是只与 n,a' 有关的常数.

证明 对任意 $x \in D$, 任选 $0<r_0<d(x,\partial D)$, 对任意 $r \in (0,r_0]$, 选取 $y \in B^n(x,r)$ 使得

$$\mathrm{dia}[f(B^n(x,r))] \le 3|f(y)-f(x)|.$$

易知存在常数 $a>1$, $B^n(x,r)$ 是 a- 弱 Cigar 域, 由引理 3 的条件知, 存在常数 $a'=a'(n,a)>0$ 使 $f(B^n(x,r))$ 是 a'- 弱 Cigar 域, 从而存在 $f(B^n(x,r))$ 中的曲线 γ 连结 $f(x)$ 与 $f(y)$ 且对任意 $z \in \gamma$ 成立

$$\min\{\mathrm{dia}(\gamma(f(x),z)), \mathrm{dia}(\gamma(f(y),z))\} \le a'd(z,\partial f(B^n(x,r))),$$

若选取 $z_0 \in \gamma$ 使 $\mathrm{dia}(\gamma(f(x),z_0)) = \mathrm{dia}(\gamma(f(y),z_0))$, 则

$$\begin{aligned} d(z_0,\partial f(B^n(x,r))) &\ge \frac{1}{a'}\mathrm{dia}(\gamma(f(x),z_0)) \ge \frac{1}{2a'}\mathrm{dia}(\gamma(f(x),f(y))) \\ &\ge \frac{1}{2a'}|f(x)-f(y)| \ge \frac{1}{6a'}\mathrm{dia}[f(B^n(x,r))]. \end{aligned}$$

由此可得

$$B^n(z_0, \frac{1}{6a'}\mathrm{dia}[f(B^n(x,r))]) \subseteq f(B^n(x,r)),$$

从而有

$$\Omega_n(\frac{\mathrm{dia}[f(B^n(x,r))]}{6a'})^n \le m[f(B^n(x,r))],$$

和

$$[\mathrm{dia}(f(B^n(x,r)))]^n \le \frac{(6a')^n}{\Omega_n} m[f(B^n(x,r))].$$

由引理 2 可得 f 是 D 到 D' 上的 K- 拟共形映射, $K=K(n,a')$.

定理 2 的证明 对任意 $x \in R^n$, 任取 $D \subset R^n$ 使 $x \in D$, 若记 $D'=f(D)$, 则 f 是 D 到 D' 上的同胚, 且 f 将 D 中的任意 a- 弱 Cigar 域映成 D' 中的 a'- 弱 Cigar 域, 由引理 3 知 f 是 D 到 D' 上的 K- 拟共形映射, $K=K(n,a')$. 由文献 [15, 定理 34.1] 知 $H(x,f) \le H$, 其中

$H = H(K, n)$. 由 $x \in R^n$ 的任意性可知 $H(x, f)$ 在 R^n 上一致有界，再由文献 [15, 定理 34.1] 得，f 是 R^n 上的 K- 拟共形映射.

参考文献：

[1] AHLFORS L V. *On quasiconformal mappings* [J]. J. Analyse Math., 1954, **3**: 1–58.
[2] LAVRENTIEFF M A. *A fundamental theorem of the theory of quasiconformal mapping of plane regions* [J]. Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., 1948, **12**: 513–554.
[3] BERS L. *An Application of Quasiconformal Mapings to Topology* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
[4] 李忠. 拟共形映射和 Teichmüller 理论的极值问题 [J]. 数学进展, 1985, **14**(1): 23–38.
LI Zhong. *Extremal problems of quasiconformal mappings and Teichmüller theory* [J]. Adv. in Math. (Beijing), 1985, **14**(1): 23–38. (in Chinese)
[5] YIN Yong-cheng. *The topology of Julia sets for polynomials* [J]. Sci. China Ser. A, 2002, **45**(8): 1020–1024.
[6] ANDREIAN C C, STANCIU V. *Quasiconformal Homeomorphisms Between Riemann Surfaces* [M]. Warsaw: Banach Center Press, 1995.
[7] MARTIO O. *Potential Theory and Quasiconformal Mappings* [M]. Belin: de Gruyter, 1992.
[8] MARTIO O, OKSENDAL B. *Fluid flow in a medium distorted by a quasiconformal map can produce fractal boundaries* [J]. European J. Appl. Math., 1996, **7**(1): 1–10.
[9] SULLIVAN D P. *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains* [J]. Ann. of Math. (2), 1985, **122**(3): 401–418.
[10] XIA Dao-xing. *Parametric representation of quasiconformal mappings* [J]. Sci. Record (N.S.), 1959, **3**: 400–407. (in Russian)
[11] WANG Chuan-fang. *On the precision of Mori's theorem in Q-mapping* [J]. Sci. Record (N.S.), 1960, **4**: 329–333.
[12] MARTIO O, SARVAS J. *Injectivity theorems in plane and space* [J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 1979, **4**(2): 383–401.
[13] GEHRING F W, OSGOOD B G. *Uniform domains and the quasihyperbolic metric* [J]. J. Analyse Math., 1979, **36**: 50–74
[14] 何兴纲. 一致域与拟共形映照 [J]. 数学年刊 A 辑, 1992, **13** (suppl.): 66–69.
HE Xing-gang. *Uniform domains and quasiconformal mappings* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 1992, **13**(suppl.), 66–69. (in Chinese)
[15] VÄISÄLÄ J. *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings* [M]. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

Quasiconformal Mappings and Weakly Cigar Domains

CHU Yu-ming[1], *HUANG Man-zi*[2]

(1. Department of Mathematics, Hunan City University, Hunan 413000, China;
2. College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Hunan 410081, China)

Abstract: Let f: $R^n \to R^n$ be a homeomorphism. We prove that f is a quasiconformal mapping if and only if the weakly Cigar domains in R^n are invariant under f.

Key words: quasiconformal mapping; weakly Cigar domain; weakly quasiconvex domain.