第27卷第3期 数学研究与评论 Vol.27, No.3
2007年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)03-0664-03 **文献标识码**: **A**

关于指数 Diophantine 方程 $x^3-1=2py^2$

黄寿生
(茂名学院数学系，广东 茂名 525000)
(E-mail: huangss321@126.com)

摘 要: 设 p 是奇素数. 本文证明了：当 $p=48t^2+1$, 其中 t 是正整数时，方程 $x^3-1=2py^2$ 无正整数解 (x,y).

关键词: 三次 Diophantine 方程；正整数解；奇素数.
MSC(2000): 11A25
中图分类: O156.1

1 引 言

设 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ 分别是全体正整数和有理数的集合，设 D 是无平方因子正整数，方程

$$x^3-1=Dy^2,\quad x,y\in\mathbf{N} \tag{1}$$

是一类基本而又重要的指数 Diophantine 方程. 1981 年，柯召和孙琦 [1,2] 证明了：当 $D>2$ 时，如果 D 没有 $6k+1$ 之形的素因数，则方程 (1) 无解 (x,y). 目前人们对该方程的研究集中在 D 有 $6k+1$ 之形素因数的情况. 这是一个迄今未解决的问题.

本文将讨论 $D=2p$, 其中 p 是适合 $p\equiv 1\ (\mathrm{mod} 6)$ 的奇素数时的情况. 此时方程 (1) 可写成

$$x^3-1=2py^2,\quad x,y\in\mathbf{N}. \tag{2}$$

对于方程 (2), 现已有下面结果：1). 由于方程 (2) 的解 (x,y) 中的 x 必为奇数, 所以根据 Nagell[3] 关于高次 Diophantine 方程的结果可以直接推知：当虚二次或 $Q(\sqrt{-2p})$ 的类数不是 3 的倍数时，方程 (2) 无解 (x,y). 因此，当 $p<50$ 时，除了 $p=13$ 和 19 以外，方程 (2) 均无解 (x,y); 2). 杨丽芬和郝立柱 [4] 证明了：当 p=13 时，方程 (2) 无解 (x,y); 3). 段辉明 [5] 证明了：当 $p=19$ 时，方程 (2) 无解 (x,y).

由此可知当 $p<50$ 时，方程 (2) 的求解问题已经解决. 本文对一般的奇素数 p 证明以下结果：

定理 当 $p=48t^2+1$, 其中 t 是正整数时，方程 (2) 无解 (x,y).

根据上述定理直接可以得以下推论：

收稿日期: 2005-08-25; **接受日期**: 2007-05-23
基金项目: 国家自然科学基金 (10271104); 广东省自然科学基金 (011781); 茂名学院科研基金 (203214).

推论 当 $p=193,\ 433,\ 769,\ 1201,\ 3889,\ 4801$ 时，方程 (2) 无解 (x,y).

2 若干引理

引理 1 当 $D>2$ 且 D 无平方因子时，方程组

$$\begin{cases} x-1=Da^2 \\ x^2+x+1=b^2 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x-1=3Da^2 \\ x^2+x+1=3b^2 \end{cases}$$

均无解 (x,a,b), 其中 $a,b,x\in\mathbf{N}$.

证明 参见文献 [1] 和 [2].

引理 2 设 D_1 和 D_2 是大于 1 的正整数．如果方程

$$D_1X^2-D_2Y^2=1,\quad X,Y\in\mathbf{N} \tag{3}$$

有解 (X,Y), 则该方程存在唯一的解 $(X_1,\ Y_1)$ 适合 $X_1\sqrt{D_1}+Y_1\sqrt{D_2}\le X\sqrt{D_1}+Y\sqrt{D_2}$, 这里的 $(X,\ Y)$ 是方程 (3) 的所有解，并且任何一组解 $(X,\ Y)$ 都可表成 $X\sqrt{D_1}+Y\sqrt{D_2}=(X_1\sqrt{D_1}+Y_1\sqrt{D_2})^n$, 其中 n 是奇数.

证明 参见文献 [6].

3 定理的证明

设 $(x,\ y)$ 是方程 (2) 的一组解．当 $x\equiv 1\ (\mathrm{mod}3)$ 时，由于 $\gcd(x-1,\ x^2+x+1)=1$, 且 x^2+x+1 是奇数，故从 (2) 式可得

$$x-1=2pa^2,\quad x^2+x+1=b^2, \tag{4}$$

或者

$$x-1=2a^2,\quad x^2+x+1=pb^2, \tag{5}$$

其中 a 和 b 是适合 $y=ab$ 的正整数．根据引理 1 可知 (4) 式不可能成立．当 (5) 式成立时，因为

$$x\equiv 2a^2+1\equiv\begin{cases} 1\ (\mathrm{mod}8), & 当\ a\ 是偶数时; \\ 3\ (\mathrm{mod}8), & 当\ a\ 是奇数时, \end{cases} \tag{6}$$

所以

$$x\equiv pb^2=x^2+x+1\equiv\begin{cases} 3\ (\mathrm{mod}8), & 当\ a\ 是偶数时; \\ 5\ (\mathrm{mod}8), & 当\ a\ 是奇数时. \end{cases} \tag{7}$$

然而，由于当 $p=48t^2+1$ 时， $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}8)$, 与 (7) 式矛盾，故不可能.

当 $x\equiv 1\ (\mathrm{mod}3)$ 时，因为 $\gcd(x-1,\ x^2+x+1)=3$ 且 x^2+x+1 是奇数，故从 (2) 式可得

$$x-1=6pa^2,\quad x^2+x+1=3b^2, \tag{8}$$

或者

$$x-1=6a^2,\quad x^2+x+1=3pb^2, \tag{9}$$

其中 a 和 b 是适合 $y=3ab$ 的正整数. 根据引理 1 可知 (8) 式不成立. 当 (9) 式成立时，可得

$$p(2b)^2-3(4a^2+1)^2=1. \tag{10}$$

从 (10) 式可知

$$pX^2-3Y^2=1,\quad X,\ Y\in\mathbf{N} \tag{11}$$

有解

$$(X,\ Y)=(2b,\ 4a^2+1). \tag{12}$$

同时，因为已知 $p=48t^2+1$, 所以方程 (11) 式有解 $(X,\ Y)=(1,\ 4t)$ 适合 $\sqrt{p}+4t\sqrt{3}\le X\sqrt{p}+Y\sqrt{3}$, 这里的 $(X,\ Y)$ 是方程 (11) 的所有解. 因此，根据引理 2, 从 (12) 式可得

$$2b\sqrt{p}+(4a^2+1)\sqrt{3}=(\sqrt{p}+4t\sqrt{3})^n, \tag{13}$$

其中 n 是适当的奇数. 从 (13) 式可得 $4a^2+1\equiv 0\ (\bmod 4t)$ 这一矛盾. 综上所述可知: 当 $p=48t^2+1$ 时，方程 (2) 无解 (x,y). $\square$

参考文献:

[1] 柯召，孙琦. 关于丢番图方程 $x^3\pm1=Dy^2$ [J]. 中国科学， 1981, **24**(12): 1453–1457.
KE Chao, SUN Chi. *On the Diophantine equation* $x^3\pm1=Dy^2$ [J]. Sci. China, 1981, **24**(12): 1453–1457. (in Chinese)

[2] 柯召，孙琦. 关于丢番图方程 $x^3\pm8=Dy^2$ 和 $x^3\pm8=3Dy^2$ [J]. 四川大学学报 (自然科学版), 1981, **4**: 1–5.
KO Chao, SUN Chi. *On the Diophantine equations* $x^3\pm8=Dy^2$ *and* $x^3\pm8=3Dy^2$ [J]. Sichuan Daxue Xuebao, 1981, **4**: 1–5. (in Chinese)

[3] NAGELL T. *Sur l'impossibilité de quelques équation á deux indéterminées* [J]. Norsk Mat Forenings Skrifter Ser 1, 1921, **13**: 65–82.

[4] 杨丽芬, 郝立柱. 关于丢番图方程 $X^3+1=DY^2$ [J]. 哈尔滨师范大学学报 (自然科学版), 1995, **11**(4): 32–36.
YANG Li-fen, HAO Li-zhu. *The Diophantine equation* $X^3+1=DY^2$ [J]. Natur. Sci. J. Harbin Normal Univ., 1995, **11**(4): 32–36. (in Chinese)

[5] 段辉明. 关于不定方程 $x^3-1=Dy^2$ [J]. 贵州师范大学学报 (自然科学版), 2005, **23**(3): 67–68.
DUAN Hui-ming. *On the Diophantine equation* $x^3-1=Dy^2$ [J]. Natur. Sci. J. Guizhou Normal Univ., 2005, **23**(3): 67–68. (in Chinese)

[6] WALKER D T. *On the diophantine equation* $mX^2-nY^2=\pm1$ [J]. Amer. Math. Monthly, 1967, **74**: 504–513.

On the Diophantine Equation $x^3-1=2py^2$

HUANG Shou-sheng
(Department of Mathematics, Maoming College, Guangdong 525000, China)

Abstract: Let p be an odd prime. This paper proves that if $p=48t^2+1$, where t is a positive integer, then the equation $x^3-1=2py^2$ has no positive integer solution (x,y).

Key words: cubic Diophantine equation; positive integer solution; odd prime.