文章编号: 1000-341X(2007)04-0697-07 **文献标识码**: **A**

矩阵几何在保持问题中的几个应用

曹重光 [1], 唐孝敏 [1], 黄礼平 [2]
(1. 黑龙江大学数学系, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 长沙理工大学数学与计算科学学院, 湖南 长沙 410076)
(E-mail: x.m.tang@163.com)

摘 要: 借助矩阵几何基本定理, 关于矩阵空间的某些半线性保持算子和加法保持算子被刻画. 例如, 秩可加性保持, 全矩阵环的弱半自同构, 幂等性保持, 平方保持, 以及交错阵的粘切性保持.

关键词: 矩阵几何; 线性保持问题; 半线性算子; 交错矩阵.
MSC(2000): 15A04; 51D20
中图分类: O151.2

1 引 言

矩阵几何是华罗庚在上个世纪四十年代开创的一个研究领域, 它在代数、几何、图论等许多方面都有重要应用 [1,2]. 然而将矩阵几何用于 "线性保持问题" 的研究则刚刚被关注 [3]. 线性保持问题是矩阵论研究中一个十分活跃的领域. 它已有百年的研究历史, 主要是刻画矩阵空间的保不变量 (函数、子集、关系等) 的线性算子 [4]. 近十年, 人们开始以较弱的加法算子代替线性算子, 研究 "加法保持问题" [5]. 本文应用矩阵几何基本定理解决了几个半线性和加法保持问题.

本文组织如下: 首先介绍矩阵几何基本定理; 然后给出长方阵几何基本定理的几个应用, 包括对除环上保持矩阵秩可加的加法算子, 弱半自同构以及域上保幂等, 保平方的半线性算子的刻画; 最后, 我们应用交错矩阵几何基本定理刻画了域上交错阵上保粘切的半线性算子.

设 $\mathbf{D}$ 是一个除环, $\mathbf{F}$ 是一个域, $\mathbf{D}^*$ 及 $\mathbf{F}^*$ 分别记 $\mathbf{D}$ 及 $\mathbf{F}$ 的非零元素集. 以 $M_{m\times n}(\mathbf{D})$ 记 $\mathbf{D}$ 上 $m\times n$ 矩阵集, 当 $m=n$ 又简记为 $M_m(\mathbf{D})$. 以 A^{T} 及 $\mathrm{rank}\,(A)$ 分别记矩阵 A 的转置及秩. 如果 $\mathbf{F}$ 上矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}=-A$ 且 A 的对角线上元素全为 0, 则称 A 为交错矩阵. 域 $\mathbf{F}$ 上 m 阶交错矩阵集合记为 $K_m(\mathbf{F})$. 本文中还以 $GL_n(\mathbf{D})$ 记 $\mathbf{D}$ 上的 n 阶一般线性群, 即所有的 n 阶可逆阵按通常的矩阵乘法构成的群. E_{ij} 定义第 i 行第 j 列元素是 1 其它元素是 0 的矩阵, 其阶数看上下文可知. 又以 I_n 记 n 阶单位阵. 当 $i<j$ 时以 D_{ij} 记矩阵 $E_{ij}-E_{ji}$.

如果 $A,B\in M_{m\times n}(\mathbf{D})$ 且 $\mathrm{rank}\,(A-B)=1$, 则称 A 与 B 粘切. 因为 $K_m(\mathbf{F})$ 中矩阵的秩为偶数, 所以若 $A,B\in K_m(\mathbf{F})$ 且 $\mathrm{rank}\,(A-B)=2$, 则称 A 与 B 在 $K_m(\mathbf{F})$ 中粘切. 设 φ 是从 $M_{m\times n}(\mathbf{D})$ (或 $K_m(\mathbf{F})$) 到自身的映射, 如果由 A 与 B 粘切可推出 $\varphi(A)$ 与 $\varphi(B)$ 粘切, 则称 φ 保粘切. 如下的定理 1.1 及定理 1.2 分别为由华罗庚、万哲先等 [2,6] 证明的长方矩阵几何基本定理, 以及由刘木兰 [7] 证明的交错矩阵几何基本定理.

定理 1.1[2,6] 设 m,n 为大于 1 的整数, φ 是从 $M_{m\times n}(\mathbf{D})$ 到自身的双射. 如果 φ 与 φ^{-1} 都保粘切, 则当 $m\neq n$ 时, φ 必为如下形状

$$\varphi([a_{ij}])=P[f(a_{ij})]Q+R,\ \ \forall\ [a_{ij}]\in M_{m\times n}(\mathbf{D}),$$

收稿日期: 2005-12-05; **接受日期**: 2006-08-26
基金项目: 国家自然科学基金 (10671026); 黑龙江省教育厅科技项目 (11521217).

其中 $P \in GL_m(\mathbf{D}), Q \in GL_n(\mathbf{D})$, $R \in M_{m\times n}(\mathbf{D})$, f 为 $\mathbf{D}$ 的一个自同构. 当 $m=n$ 时，除了上面形状外，φ 还可能有以下形状

$$\varphi([a_{ij}]) = P[g(a_{ij})]^{\mathrm{T}}Q + R,\ \ \forall\ [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbf{D}),$$

其中 P, Q, R 的意义同上，g 为 $\mathbf{D}$ 的一个反自同构. 反之，如上形式的 φ 均是双射且 φ 及 φ^{-1} 均保粘切.

定理 1.2[7] 设 m 为大于 3 的整数，φ 是从 $K_m(\mathbf{F})$ 到自身的双射. 如果 φ 与 φ^{-1} 都保粘切，则当 $n>4$ 时，φ 必为以下形状的变换

$$\varphi([a_{ij}]) = \alpha P^{\mathrm{T}}[f(a_{ij})]P + R,\ \ \forall\ [a_{ij}] \in K_m(\mathbf{F}),$$

其中 $\alpha \in \mathbf{F}^*, P \in GL_m(\mathbf{F})$, $R \in K_m(\mathbf{F})$, f 是 $\mathbf{F}$ 的一个自同构. 当 $m=4$ 时，φ 必为以下形状

$$\varphi([a_{ij}]) = \alpha P^{\mathrm{T}} f([a_{ij}]^*)P + R,\ \ \forall\ [a_{ij}] \in K_m(\mathbf{F}),$$

其中其中 α, P, R, f 的意义同上，$[a_{ij}] \longmapsto [a_{ij}]^*$ 或为恒等映射或为以下映射

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{23} \\ -a_{12} & 0 & a_{14} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{14} & 0 & a_{34} \\ -a_{23} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

反之，如上形式的映射均是双射且 φ 及 φ^{-1} 均保粘切.

2 长方阵几何基本定理的几个应用

设 φ 是从 $M_{m\times n}(\mathbf{D})$ 到自身的映射，如果对所有的 $A, B \in M_{m\times n}(\mathbf{D})$ 都有 $\varphi(A+B) = \varphi(A)+\varphi(B)$, 则称 φ 为 $M_{m\times n}(\mathbf{D})$ 的加法算子. 又如果由 $\mathrm{rank}\,(A+B) = \mathrm{rank}\,(A) + \mathrm{rank}\,(B)$ 可推出 $\mathrm{rank}\,(\varphi(A)+\varphi(B)) = \mathrm{rank}\,(\varphi(A)) + \mathrm{rank}\,(\varphi(B))$, 则称 φ 为保秩可加的. 类似可定义保秩可减的算子.

定理 2.1 设 m, n 为大于 1 的整数，则 φ 为 $M_{m\times n}(\mathbf{D})$ 的保秩可加的可逆加法算子的充要条件是 φ 是从 $M_{m\times n}(\mathbf{D})$ 到自身的双射，$\varphi(0)=0$, 并且 φ 与 φ^{-1} 都保粘切. 因此，$M_{m\times n}(\mathbf{D})$ 的保秩可加的可逆加法算子必为定理 1.1 中的形式，但其中 $R=0$.

证明 由定理 1.1 充分性是显然的，下证必要性. 不妨假定 $m \le n$. 由 φ 是加法算子知 $\varphi(0)=0$. 为应用定理 1.1, 只需证 φ 及 φ^{-1} 均保粘切，即 φ 及 φ^{-1} 均保秩 1. 为此只需证 φ 保任意秩. 事实上，设 $M \in M_{m\times n}(\mathbf{D})$ 且 $\mathrm{rank}\,(M) = k \ne 0$, 则存在 $P \in GL_m(\mathbf{D})$ 及 $Q \in GL_n(\mathbf{D})$ 使 $M = P\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$. 令 $A_i = PE_{ii}Q \in M_{m\times n}(\mathbf{D})$, $i=1,\ldots,m$. 显然有 $\mathrm{rank}\,(\sum_{i=1}^m A_i) = \sum_{i=1}^m \mathrm{rank}\,(A_i)$. 由 φ 保秩可加性可得

$$m \ge \mathrm{rank}\,(\sum_{i=1}^m \varphi(A_i)) = \mathrm{rank}\,(\varphi(A_1)) + \cdots + \mathrm{rank}\,(\varphi(A_m)) \ge m.$$

其中上式右端不等式是由 φ 为单射从而 $\varphi(A_i) \ne 0$ 得到. 这推出 $\mathrm{rank}\,(\varphi(A_i)) = 1, i=1,\ldots,m$. 注意到 $\mathrm{rank}\,(M) = \mathrm{rank}\,(A_1) + \cdots + \mathrm{rank}\,(A_k)$ 及 φ 保秩可加性，有

$$\mathrm{rank}\,(\varphi(M)) = \sum_{i=1}^k \mathrm{rank}\,(\varphi(A_i)) = k.$$

注 1 文献 [8] 研究了域 $\mathbf{F}$ 上矩阵空间 $M_n(\mathbf{F})$ 上保秩可加的线性算子，在 $|F|>n$ 的条件下得到本文定理 2.1 的特例 ($m=n$ 且 f 是恒等自同构). 现在我们对不加任何限制的除环上的长方阵得到了相应结果，并且把线性算子减弱为加法算子，论证又相当简洁.

下面我们研究 $M_m(\mathbf{D})$ 的弱半自同构. 首先回忆半自同构 [2]. 如果 φ 为从 $M_m(\mathbf{D})$ 到自身的加法双射，且对任意的 $A,B\in M_m(\mathbf{D})$ 满足 $\varphi(ABA)=\varphi(A)\varphi(B)\varphi(A)$ 及 $\varphi(I_m)=I_m$, 则称 φ 为 $M_m(\mathbf{D})$ 的半自同构. 现在我们定义弱半自同构.

定义 1 设 φ 为从 $M_m(\mathbf{D})$ 到自身的加法双射, 若对任意的 $A\in M_m(\mathbf{D})$ 及满足 $XAX=X$ 的任意 X, 都有 $\varphi(AXA)=\varphi(A)\varphi(X)\varphi(A)$ 及 $\varphi(X)=\varphi(X)\varphi(A)\varphi(X)$, 则称 φ 为 $M_m(\mathbf{D})$ 的弱半自同构.

易见半自同构一定是弱半自同构. 为刻画 $M_m(\mathbf{D})$ 上弱半自同构的结构，我们需要如下的两个引理.

引理 2.2 设 $A,B\in M_m(\mathbf{D})$, 则 $\operatorname{rank}(A-B)=\operatorname{rank}(A)-\operatorname{rank}(B)$ 的充要条件是存在 $X\in M_m(\mathbf{D})$ 使 $XAX=X$ 且 $B=AXA$.

证明 *必要性*. 由 $\operatorname{rank}(A-B)=\operatorname{rank}(A)-\operatorname{rank}(B)$, 参照文献 [9] 的 117 页 27 题，我们知存在 $P,Q\in GL_m(\mathbf{D})$ 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & & \\ & I_s & \\ & & 0\end{pmatrix}Q,\quad B=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q.$$

令 $X=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}P^{-1}$, 不难验证 $XAX=X$ 及 $B=AXA$ 成立.

充分性. 设 $A=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$, $X=Q^{-1}\begin{pmatrix} X_0 & Y \\ Z & U\end{pmatrix}P^{-1}$, 其中 $X_0\in M_r(\mathbf{D})$. 由计算可得 $B=P\begin{pmatrix} X_0 & \\ & 0\end{pmatrix}Q$. 又由 $X=XAX$ 可推出 $X_0^2=X_0$, 从而 $\operatorname{rank}(X_0)+\operatorname{rank}(I_r-X_0)=r$. 于是有 $\operatorname{rank}(A-B)=\operatorname{rank}(I_r-X_0)=r-\operatorname{rank}(X_0)=\operatorname{rank}(A)-\operatorname{rank}(B)$. □

引理 2.3 设 φ 为 $M_{m\times n}(\mathbf{D})$ 的加法算子，则 φ 保秩可减当且仅当 φ 保秩可加.

证明 仅证必要性, 充分性是类似的. 任取 $A,B\in M_{m\times n}(\mathbf{D})$, 设 $\operatorname{rank}(A+B)=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$. 令 $C=A+B$, 得 $\operatorname{rank}(C-A)=\operatorname{rank}(C)-\operatorname{rank}(A)$. 由 φ 为保秩可减的加法算子知, $\operatorname{rank}(\varphi(C-A))=\operatorname{rank}(C)-\operatorname{rank}(A)$, 即 $\operatorname{rank}(\varphi(B))=\operatorname{rank}(\varphi(A+B))-\operatorname{rank}(\varphi(A))$, 即 φ 保秩可加. □

定理 2.4 φ 为 $M_m(\mathbf{D})$ 的弱半自同构当且仅当 φ 为下面的两种形式之一：

(i). $\varphi([a_{ij}])=\varepsilon Q^{-1}[f(a_{ij})]Q$, $\forall[a_{ij}]\in M_m(\mathbf{D})$;

(ii). $\varphi([a_{ij}])=\varepsilon Q^{-1}[g(a_{ij})]^{\mathrm{T}}Q$, $\forall\ [a_{ij}]\in M_m(\mathbf{D})$,

其中 $Q\in GL_m(\mathbf{D})$, $\varepsilon=\pm1$, (i) 中的 f 为 $\mathbf{D}$ 的一个自同构，(ii) 中的 g 为 $\mathbf{D}$ 的一个反自同构.

证明 充分性显然，下证必要性.

如果 $\operatorname{rank}(A-B)=\operatorname{rank}(A)-\operatorname{rank}(B)$, 由引理 2.2 知存在 X 使 $XAX=X$ 且 $B=AXA$. 因 φ 为弱半自同构，故有 $\varphi(X)\varphi(A)\varphi(X)=\varphi(X)$ 且 $\varphi(B)=\varphi(A)\varphi(X)\varphi(A)$. 再由引理 2.2 知 $\operatorname{rank}(\varphi(A)-\varphi(B))=\operatorname{rank}(\varphi(A))-\operatorname{rank}(\varphi(B))$. 因此 φ 为保秩可减的加法算子. 再由引理 2.3 易见 φ 为保秩可加的加法算子. 从而应用定理 2.1 可知 φ 有定理 2.1 的两种形式. 我们只说明第一形式可推出本定理之 (i)(由第二形式推得 (ii) 是类似的). 事实上，设 $\varphi([a_{ij}])=$

$P[f(a_{ij})]Q$, $\forall A=[a_{ij}]\in M_m(\mathbf{D})$, 如果取 $A=I_m$, 由 f 是 $\mathbf{D}$ 的一个自同构知 $\varphi(I_m)=PQ$. 同样有 $\varphi(E_{ii})=PE_{ii}Q$. 另一方面, 对 $A=I_m$, 取 $X=E_{ii}$, 则有 $\varphi(E_{ii})=\varphi(I_m)\varphi(E_{ii})\varphi(I_m)$, 从而有 $PE_{ii}Q=PQ\cdot PE_{ii}Q\cdot PQ$, 即

$$E_{ii}=QPE_{ii}QP,\ \ i=1,\ldots,m.$$

由上式可得 $QP=\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_m)$ 且 $a_i^2=1$, $i=1,\ldots,m$. 又对 $A=E_{ji}$, 取 $X=E_{ij}$, 则有 $E_{ij}E_{ji}E_{ij}=E_{ij}$, $\forall i\neq j$. 于是 $\varphi(E_{ij})\varphi(E_{ji})\varphi(E_{ij})=\varphi(E_{ij})$. 注意到 $\varphi(E_{ij})=PE_{ij}Q$ 及 $\varphi(E_{ji})=PE_{ji}Q$, 我们有 $a_ja_i=1$, $\forall i\neq j$. 这推得诸 a_i 同号, 进而有 (i) 成立. □

推论 2.5[2] 设 φ 为 $M_m(\mathbf{D})$ 的半自同构, 则 φ 为定理 2.4 中的两种形式, 并且其中 $\varepsilon=1$.

证明 由半自同构必为弱半自同构, 则 φ 有定理 2.4 之两种形式. 又由 $\varphi(I_m)=I_m$ 可推出 $\varepsilon=1$. □

注 2 推论 2.5 实际上给出了 $M_{m\times n}(\mathbf{D})$ 的半自同构的有别于文献 [2] 的新证法. 结合定理 2.4 及推论 2.5 可知: φ 为弱半自同构当且仅当 φ 或 $-\varphi$ 为半自同构.

下面我们研究域上矩阵幂等保持及平方保持的半线性算子. 设 $\mathbf{F}$ 为一个特征不为 2 的域, φ 为从 $M_m(\mathbf{F})$ 到自身的映射, 若 $A^2=A$ 当且仅当 $(\varphi(A))^2=\varphi(A)$, 则称 φ 为双向保幂等的; 如果 $\varphi(X^2)=(\varphi(X))^2$, $\forall X\in M_m(\mathbf{F})$, 则称 φ 为保平方的.

引理 2.6 设 $M\in M_m(\mathbf{F})$, 则 $\mathrm{rank}\,(M)=1$ 当且仅当 $M=\lambda E$, 其中 $\lambda\in\mathbf{F}^*$, E 为秩为 1 的幂等阵; 或者存在秩为 1 的幂等阵 E_1,E_2,E_3 使得 $M=E_1-E_2\neq 0$ 并且 $E_1+E_2=2E_3$.

证明 *必要性*. 由 $\mathrm{rank}\,(M)=1$ 可设

$$M=PE_{11}Q=P(\sum_{i=1}^{m}a_iE_{1i})P^{-1},\ a_i\in\mathbf{F}.$$

如果 $a_1\neq 0$, 则有 $M=a_1P(E_{11}+\sum_{i=2}^m b_iE_{1i})P^{-1}$, $a_i\in\mathbf{F}$. 这时令 $\lambda=a_1$, $E=P(E_{11}+\sum_{i=2}^m b_iE_{1i})P^{-1}$ 即得 $M=\lambda E$. 如果 $a_1=0$, 令 $E_1=P(E_{11}+\sum_{i=2}^m a_iE_{1i})P^{-1}$, $E_2=PE_{11}P^{-1}$, $E_3=P(E_{11}+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^m a_iE_{1i})P^{-1}$, 容易验证 $M=E_1-E_2\neq 0$ 且 $E_1+E_2=2E_3$.

充分性. 如果 $M=\lambda E$, 其中 $\lambda\in\mathbf{F}^*$, E 为秩为 1 的幂等阵时, 显然命题成立. 如果存在秩为 1 的幂等阵 E_1,E_2,E_3 使得 $M=E_1-E_2\neq 0$ 并且 $E_1+E_2=2E_3$. 不妨设 $E_1=E_{11}$, 由 $E_1+E_2=2E_3$ 为秩 1 矩阵可知 $E_2=\sum_{i=1}^m a_1b_iE_{1i}$ 或 $\sum_{i=1}^m a_ib_1E_{i1}$, 此时由 $M=E_1-E_2\neq 0$ 显然有 $\mathrm{rank}\,(M)=1$. □

定义 2 设 φ 为从 $M_m(\mathbf{F})$ 到自身的映射, 如果 φ 满足 $\varphi(\lambda A+\mu B)=\lambda^\sigma\varphi(A)+\mu^\sigma\varphi(B)$, $\forall A,B\in M_m(\mathbf{F})$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbf{F}$, 其中 σ 为 $\mathbf{F}$ 的一个自同构, 则称 φ 为 $M_m(\mathbf{F})$ 的一个半线性算子.

定理 2.7 设 $\mathbf{F}$ 是一个特征不为 2 的域, 则 φ 为 $M_m(\mathbf{F})$ 的双向保幂等的可逆的半线性算子当且仅当 φ 有定理 2.4 中的两种形式, 并且其中 $\varepsilon=1$.

证明 由 φ 为半线性算子且保幂等易见 $\varphi(0)=0$ 且保非零正交幂等. 事实上, 设 A,B 为非零正交幂等, 即 $A^2=A,B^2=B$ 且 $AB=BA=0$. 则易见 $(A+B)^2=A+B$. 由 φ 为保幂等的可逆的半线性算子知 $\varphi(A),\varphi(B)$ 及 $\varphi(A+B)=\varphi(A)+\varphi(B)$ 均非零幂等. 由于 $\mathbf{F}$ 的特征不等于 2, 我们有 $\varphi(A)\varphi(B)=\varphi(B)\varphi(A)=0$. 这意味着 φ 保非零正交幂等. 由文献 [2] 的 §3.5 知幂等阵是秩为 1 的当且仅当它是本原的, 即它不能写成两个正交幂等矩阵的和. 因此由 φ 双向保幂等可推出 φ 保秩 1 幂等. 由此我们又断定 φ 保秩 1. 事实上, 设 $\mathrm{rank}\,(M)=1$, 则由引理 2.6 知 $M=\lambda E$, E 为秩 1 幂等阵或存在秩 1 幂等阵 E_1,E_2,E_3 使 $M=E_1-E_2$ 及

$E_1+E_2=2E_3$. 从而 $\varphi(M)=\lambda^\sigma\varphi(E)$ 或 $\varphi(M)=\varphi(E_1)-\varphi(E_2)\neq 0$ 且 $\varphi(E_1)+\varphi(E_2)=2\varphi(E_3)$. 由 $\varphi(E),\varphi(E_1),\varphi(E_2),\varphi(E_3)$ 均秩 1 幂等阵与引理 2.6 可知 $\varphi(M)$ 秩为 1. 同理可证 φ^{-1} 保秩 1. 这就推出 φ 及 φ^{-1} 均保粘切. 然后应用定理 1.1 可得 φ 的两种形式，且 $R=0$. 取 $A=I_m$ 可推得 $P=Q^{-1}$. 于是结论得证. □

推论 2.8 设 $\mathbf{F}$ 是一个特征不为 2 的域，则 φ 为 $M_m(\mathbf{F})$ 的保平方的可逆的半线性算子当且仅当 φ 为定理 2.7 中的两种形式.

证明 由 φ 保平方显然从 $A^2=A$ 可推出 $(\varphi(A))^2=\varphi(A)$. 对于任意 $(\varphi(X))^2=\varphi(X)$, 由 φ 保平方知 $\varphi(X^2)=(\varphi(X))^2$, 从而有 $\varphi(X^2)=\varphi(X)$. 因 φ 为单射，故 $X^2=X$. 这证明了 φ 双向保幂等. 应用定理 2.7, 结论立即得证. □

由于线性算子一定是半线性算子, 因此由定理 2.7 及推论 2.8 我们不难得到如下两个推论.

推论 2.9 设 $\mathbf{F}$ 是一个特征不为 2 的域，则 φ 为 $M_m(\mathbf{F})$ 的双向保幂等的可逆的线性算子当且仅当 φ 有定理 2.7 中的两种形式，并且其中 f 是恒等映射.

推论 2.10 设 $\mathbf{F}$ 是一个特征不为 2 的域，则 φ 为 $M_m(\mathbf{F})$ 的保平方的可逆的线性算子当且仅当 φ 为推论 2.8 中的两种形式，并且其中 f 是恒等映射.

注 3 如上推论 2.9 及推论 2.10 分别是文献 [10] 及 [11] 相应结果的新的简单证明. 由此可见矩阵几何基本定理的意义和作用.

3 交错阵几何基本定理的一个应用

设

$$J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad J_k=\begin{pmatrix}0_{2k-2}&&\\&J&\\&&0_{m-2k}\end{pmatrix}\in K_m(\mathbf{F}),\quad 1\leq k\leq[\frac{m}{2}].$$

熟知，若 $A\in K_m(\mathbf{F})$ 且 $\operatorname{rank}(A)=2r(r\geq 1)$, 则 A 合同于 $J_1+\cdots+J_r$.

引理 3.1 设 $2\leq r<m$, $A,D\in K_r(\mathbf{F})$, $D\neq 0$, $X=\begin{pmatrix}A&B\\-B^{\mathrm{T}}&C\end{pmatrix}\in K_m(\mathbf{F})$. 若 $\operatorname{rank}X=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A+D&B\\-B^{\mathrm{T}}&C\end{pmatrix}=2$, 则 $X=\begin{pmatrix}A&B\\-B^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}$.

证明 假定 $C\neq 0$, 则 $\operatorname{rank}(C)=2$, 故 C 合同于 $\operatorname{diag}(J,0)$. 由 $\operatorname{rank}(X)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A+D&B\\-B^{\mathrm{T}}&C\end{pmatrix}=2$ 可知 X 合同于 $\operatorname{diag}(0_r,J,0)$, 与此同时可以使得 $\begin{pmatrix}A+D&B\\-B^{\mathrm{T}}&C\end{pmatrix}$ 合同于 $\operatorname{diag}(D,J,0)$. 这与 $D\neq 0$ 矛盾. □

类似于定义 2, 我们可定义 $K_m(\mathbf{F})$ 的半线性算子. 如果 φ 为 $K_m(\mathbf{F})$ 的一个半线性算子并且 φ 为满射，则称 φ 为 $K_m(\mathbf{F})$ 的一个半线性满射.

引理 3.2 设 $\mathbf{F}$ 是一个域， m 是大于 3 的整数，且 φ 是 $K_m(\mathbf{F})$ 的保粘切的半线性满射，则存在 $Q\in GL_m(\mathbf{F})$ 使得

$$\varphi(J_i)=Q^{\mathrm{T}}J_iQ,\quad 1\leq i\leq[\frac{m}{2}].$$

证明 易见 $\varphi(0)=0$. 由 $\operatorname{rank}(J_i)=2$ 知 $\operatorname{rank}(\varphi(J_i))=2$. 从而存在 $P_i=\begin{pmatrix}\alpha_{2i-1}\\\alpha_{2i}\end{pmatrix}\in$

$M_{2\times m}(\mathbf{F})$ 且 $\operatorname{rank}(P_i)=2,\ i=1,\dots,n=[\frac{m}{2}]$ 使得

$$\varphi(J_i)=P_i^{\mathrm T}JP_i,\quad i=1,\dots,n. \tag{1}$$

设 $\{\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_s}\}$ 是 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{2n}\}$ 的极大线性无关组，其中 $1=i_1\le i_2\le\cdots\le i_s\le 2n$. 令 $P_{11}=\begin{pmatrix}\alpha_{i_1}\\ \vdots\\ \alpha_{i_s}\end{pmatrix}$, 则 $\operatorname{rank}(P_{11})=s$. 易见存在 $Y_i\in M_{2\times s}(\mathbf{F})$ 使得 $P_i=Y_iP_{11},\ i=1,\dots,n$. 显然存在 $P_{12}\in M_{(m-s)\times m}(\mathbf{F})$ 使得 $Q=\begin{pmatrix}P_{11}\\ P_{12}\end{pmatrix}\in GL_m(\mathbf{F})$.

由 (1) 式可知

$$\varphi(J_i)=Q^{\mathrm T}\begin{pmatrix}Y_i^{\mathrm T}JY_i & \\ & 0_{m-s}Q\end{pmatrix},\quad i=1,\dots,n. \tag{2}$$

令

$$\Omega=\left\{Q^{\mathrm T}\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ -X_{12}^{\mathrm T} & 0_{m-s}\end{pmatrix}Q: X_{11}\in K_s(\mathbf{F}), X_{12}\in M_{s\times(m-s)}(\mathbf{F})\right\}\subset K_m(\mathbf{F}).$$

则由 (2) 有 $\varphi(J_i)\in\Omega$.

任取 $\varphi(D_{ij})\in\Omega,\ i<j$. 如果 i 为偶数，则 D_{ij} 同时与 J_k 及 0 粘切，其中 $k=[\frac{i}{2}]$. 故由 (2) 与引理 3.1 知 $\varphi(D_{ij})\in\Omega$. 如果 i 为奇数并且 $j=i+1$, 则 $D_{ij}=J_k$, 其中 $k=[\frac{i+1}{2}]$, 从而 $\varphi(D_{ij})\in\Omega$. 如果 i 为奇数并且 $j>i+1$, 则 D_{ij} 同时与 J_k 及 0 粘切，其中 $k=[\frac{i+1}{2}]$, 故由 (2) 与引理 3.1 知 $\varphi(D_{ij})\in\Omega$. 因此我们有 $\varphi(D_{ij})\in\Omega,\ \ \forall\, i<j$. 因为任取 $X\in K_m(\mathbf{F})$, X 可写成 $X=\sum_{i<j}x_{ij}D_{ij}$, 于是由 φ 是半线性的知 $\varphi(K_m(\mathbf{F}))\subset\Omega$. 因为 φ 满射，故 $m-s\le 1$. 下面我们分两种情形讨论.

(a). 当 $m=2n+1$ 为奇数时，由 $s\le 2n$ 与 $m-s\le 1$ 知 $s=2n$. 从而 $P_{11}=\begin{pmatrix}P_1\\ \vdots\\ P_n\end{pmatrix}$, 再由 (1) 可得 $\varphi(J_i)=P_i^{\mathrm T}JP_i=Q^{\mathrm T}J_iQ,\ \ i=1,\dots,n$.

(b). 当 $m=2n$ 是偶数时，由 $m-s\le 1$ 知 $s=2n$ 或 $s=2n-1$. 若 $s=2n$, 则类似于情形 (a) 可完成证明. 若 $s=2n-1$, 我们只对 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{2n-1}\}$ 是 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{2n}\}$ 的极大线性无关组的情形给出证明，而其它的情形是类似的.

此时，设 $Q=\begin{pmatrix}P_{11}\\ \beta\end{pmatrix}$, β 是一个 $1\times m$ 阵. 由此可得

$$\varphi(J_i)=Q^{\mathrm T}J_iQ,\quad i=1,\dots,n-1.$$

在 Ω 的定义中令 $m-s=2$ 得到一个新的集合 Ω_1. 类似于上面的证明，对于 $i<j$ 且 $(i,j)\ne(m-1,m)$ 有 $\varphi(D_{ij})\in\Omega_1$. 设 $\alpha_{2n}=\sum_{i=1}^{2n-1}k_i\alpha_i$, 其中 $k_i\in\mathbf{F}, i=1,\dots,2n-1$. 经简单计算易见 $\varphi(J_n)=P_n^{\mathrm T}JP_n=-\sum_{i=1}^{2n-2}k_iQ^{\mathrm T}D_{i,2n-1}Q\in\Omega_1$. 因此有 $\varphi(D_{ij})\in\Omega_1,\forall\, i<j$. 因为任取 $X\in K_m(\mathbf{F})$, X 可写成 $X=\sum_{i<j}x_{ij}D_{ij}$, 于是由 φ 是半线性的知 $\varphi(K_m(\mathbf{F}))\subset\Omega_1$, 这与 φ 是满射矛盾. □

定理 3.3 设 $\mathbf{F}$ 为任意域， m 是一个大于 3 的整数，则 φ 是 $K_m(\mathbf{F})$ 的保粘切的半线性满射的充要条件是： φ 是从 $K_m(\mathbf{F})$ 到自身的双射， $\varphi(0)=0$, 并且 φ 与 φ^{-1} 都保粘切. 因此, $K_m(\mathbf{F})$ 的保粘切的半线性满射必为定理 1.2 中的形式但其中 $R=0$.

证明 由定理 1.2 充分性是显然的，下证必要性．首先证明 φ 保任意秩．任取 $X \in K_m(\mathbf{F})$ 且 $\operatorname{rank}(X) = 2r \neq 0$, 于是有 $P \in GL_m(\mathbf{F})$ 使 $X = P^{\mathrm{T}}(J_1 + \cdots + J_r)P$. 定义一个新的映射 $\psi : X \mapsto \varphi(P^{\mathrm{T}}XP)$, $\forall X \in K_m(\mathbf{F})$. 易见 ψ 仍为 $K_m(\mathbf{F})$ 的保粘切的半线性满射．由引理 3.2 知存在 $Q \in GL_m(\mathbf{F})$ 使得 $\varphi(X) = \psi(J_1 + \cdots + J_r) = Q^{\mathrm{T}}(J_1 + \cdots + J_r)Q$. 这说明 $\operatorname{rank}(\varphi(X)) = \operatorname{rank} X = 2r$, 因此 φ 保任意秩．显然， φ 可逆且 φ^{-1} 亦保粘切，即 φ 及 φ^{-1} 均保粘切．应用定理 1.2 可得结论．其中由 φ 是半线性的推出 $\varphi(0) = 0$, 从而 $R = 0$. □

推论 3.4 设 $\mathbf{F}$ 为任意域， m 是一个大于 3 的整数，则 $K_m(\mathbf{F})$ 的保粘切的线性满射必为定理 1.2 中的形式但其中 f 是恒等映射且 $R = 0$.

注 4 本文定理 3.3 是一个新的结果，这个结果对于研究 $K_m(\mathbf{F})$ 的其它保持问题是一个重要基础.

参考文献:

[1] WAN Zhe-xian. *Geometry of matrices revisited* [C]. Algebras and combinatorics (Hong Kong, 1997), 477–486, Springer, Singapore, 1999.

[2] WAN Zhe-xian. *Geometry of Matrices: In Memory of Professor L. K. Hua (1910-1985)* [M]. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.

[3] SEMRL P. *Hua's fundamental theorems of the geometry of matrices and related results* [J]. Linear Algebra Appl., 2003, **361**: 161–179.

[4] LI C K, TSING N K. *Linear preserver problems: a brief introduction and some special techniques* [J]. Linear Algebra Appl., 1992, **162/164**: 217–235.

[5] 张显，曹重光．保不量的矩阵加群同态 [M]. 哈尔滨：哈尔滨出版社， 2001.
ZHANG Xian, CAO chong-guang. *Homomorphisms between Additive Matrix Groups which Preserve Some Invariants* [M]. Harbin: Harbin Press, 2001. (in Chinese)

[6] HUA Loo-Keng. *A theorem on matrices over a sfield and its applications* [J]. J. Chinese Math. Soc. (N.S.), 1951, **1**: 110–163.

[7] 刘木兰．交错矩阵几何 [J]. 数学学报， 1966, **16**: 104–135.
LIU Mu-lan, Geometry of alternate matrices [J], Acta Math. Sinica, 1966, **16**: 104–135. (in Chinese)

[8] GUTERMAN A. *Linear preservers for matrix inequalities and partial orderings* [J]. Linear Algebra Appl., 2001, **331**(1-3): 75–87.

[9] 曹重光．线性代数 [M]. 呼和浩特：内蒙古科学技术出版社， 1999.
CAO Chong-guang. *Linear Algebra* [M]. Hohhot: Inner Mongolia Science and Technology Press, 1999. (in Chinese)

[10] BEASLEY L B, PULLMAN N J. *Linear operators preserving idempotent matrices over fields* [J]. Linear Algebra Appl., 1991, **146**: 7–20.

[11] CHAN C H, LIM M H. *Linear preservers on powers of matrices* [J]. Linear Algebra Appl., 1992, **162/164**: 615–626.

Several Applications of Geometry of Matrices in Preserver Problem

CAO Chong-guang[1], *TANG Xiao-min*[1], *HUANG Li-ping*[2]

(1. Department of Mathematics, Heilongjiang University, Heilongjiang 150080, China;
2. School of Mathematics and Computing Science, Changsha University of Science and Technology, Hunan 410076, China)

Abstract: By the fundamental theorems of the geometry of matrices, some semi-linear preserver operators and additive preserver operators on matrix spaces are characteriged, including rank-additivety preservers, weak semi-automorphisms of the full matrix ring, idempotence preservers, 2-potent matrices preservers, and the adjacency preservers of altenate matrices.

Key words: geometry of matrices; linear preserver problems; semilinear operator; alternate matrix.