**文章编号**: 1000-341X(2007)04-0704-05 **文献标识码**: **A**

# 绕积马氏链的几个结果

贾兆丽 [1], 祝东进 [2], 汪晓云 [2]
(1. 合肥工业大学理学院，安徽 合肥 230009; 2. 安徽师范大学数学计算机学院，安徽 芜湖 241000)
(E-mail: zljia06@sina.com)

**摘 要**: 本文利用一般马氏链的理论讨论了随机环境中的马氏链的各种状态的特征及遍历性，并用两种方式将状态空间进行严格的分类.

**关键词**: 随机环境中的马氏链；绕积马氏链；状态分类；常返性.
**MSC(2000)**: 60J10
**中图分类**: O211.62

## 1 导言和符号

随机环境中的马氏链的研究是随机过程论研究的一项重要内容， Cogburn 与 Orey 等人对其一般理论进行了研究，得到了一系列结果. 胡迪鹤，肖争艳等人定义了绕积马氏链，研究了与之相关的概率特征函数的性质，以及各状态之间的联系. 本文在此基础上用两种方式将状态空间进行严格的划分，并进一步讨论各状态的特征，及遍历性.

设有可数可测空间 $(X,\mathfrak{A})$ 和任一可测空间 $(\Theta,\mathfrak{B}),\{p(\theta),\theta\in\Theta\}$ 是 $(X,\mathfrak{A})$ 上的一转移矩阵族. 对任意给定的 $x,y\in X,P(\theta)(x,y)$ 是 $\theta$ 的关于 $\sigma$ 代数 $\mathfrak{B}$ 的实值可测函数. 记 $Z$ 为整数集，设 $\{Z_n,n\geq 0\}$ 与 $\overrightarrow{\xi}=(\xi_n)_{n\in Z}$ 分别取值于 $X$ 与 $\Theta^Z$ 的随机序列. 若 $Z_n$ 和 $\xi_n$ 满足

$$P(Z_{n+1}=y|Z_0,\ldots,Z_n;\overrightarrow{\xi})=P(\xi_n;Z_n,y),$$

则称 $\{Z_n,n\geq 0\}$ 是随机环境 $\overrightarrow{\xi}$ 中的马氏链, 称 $X$ 为状态空间，$\Theta$ 为环境空间. 设 $\Theta_n:\Theta^z\to\Theta$ 为坐标函数 $(n\in Z)$. 定义 $\mathfrak{B}_k^l=\sigma(\theta_n,k-1<n<l+1)$. 设 $T:\Theta^Z\to\Theta^Z$ 为推移算子，即对任何 $\overrightarrow{\theta}=(\theta_n,n\in Z),T(\overrightarrow{\theta})=\overrightarrow{\theta}',\theta_n'=\theta_{n+1}(\forall n\in Z)$, 记 $P(\theta_m,\ldots,\theta_{n-1})=P(\theta_m)\cdots P(\theta_{n-1}),(-\infty<m\leq n<\infty)$. 设 $\pi$ 是可测空间 $(\Theta^Z,\mathfrak{B}^Z)$ 上的任一概率测度，且满足 $\pi\cdot T^{-1}=\pi$. 记 $E=X\times\Theta^Z,\Sigma=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}^z,\mu=\kappa\times\pi$ 其中 $\kappa$ 为 $X$ 上的计数测度.

**定义** $\{Z_n,n\geq 0\}$ 是随机环境 $\overrightarrow{\xi}$ 中的马氏链，则 $\{(X_n,T^n\overrightarrow{\xi}),n\geq 0\}$ 称为具有一步转移概率为 $P(x,\overrightarrow{\theta};F)=\sum_{y\in X}P(\theta_0;x,y)I_{(F)y}(\overrightarrow{\theta})$ 的绕积马氏链.

对集合 $F\in\Sigma$. 记 $(F)_x=\{\overrightarrow{\theta}\in\Theta^Z:(x,\overrightarrow{\theta})\in F\}$, 定义

$$\hat{P}(x,\overrightarrow{\theta};F)=\sum_{y\in X}P(\theta_0;x,y)I_{(F)_y}(\overrightarrow{\theta}),\quad \hat{P}^n(x,\overrightarrow{\theta};F)=\sum_{y\in X}P(\theta_0,\ldots,\theta_{n-1};x,y)I_{(F)_y}(T\overrightarrow{\theta}).$$

$\tau_F$ 是首次到达集合 $F$ 的时刻，令

$$[E]_x=\{x\}\times\Theta^Z,L(x,\overrightarrow{\theta};F)=P_{x,\overrightarrow{\theta}}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(X_n,T^n\overrightarrow{\theta})\in F\});$$

**收稿日期**: 2005-05-18; **接受日期**: 2006-07-03

$$Q(x,\overrightarrow{\theta};F)=P_{x,\overrightarrow{\theta}}(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\{(X_n,T^n\overrightarrow{\theta})\in F\})$$

$$G(x,\overrightarrow{\theta};F)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{y\in X}P(\theta_0,\cdots,\theta_{n-1};x,y)I_{(F)_y}(T^n\overrightarrow{\theta});$$

$$F^n(x,\overrightarrow{\theta};F)=P_{x,\overrightarrow{\theta}}(\tau_F=n).$$

## 2 主要结果及证明

**定义 1** 称状态 $x$ 是强常返的，若 $\pi(\overrightarrow{\theta}:Q(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=1)=1$. 称状态 $x$ 是弱常返的，若 $\pi(\overrightarrow{\theta}:G(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=\infty)=1$.

**定义 2** 称状态 $x$ 是强暂留的，若 $\pi(\overrightarrow{\theta}:G(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)<\infty)=1$. 称状态 $x$ 是弱暂留的，若 $\pi(\overrightarrow{\theta}:G(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)<\infty)>0$.

**定义 3** 称状态 $x$ 是本质的，若 $\mu((y,\overrightarrow{\theta}):Q(y,\overrightarrow{\theta};[E])_x)>0)>0$. 称状态 $x$ 是非本质的，若 $\pi(\overrightarrow{\theta}:Q(x,\overrightarrow{\theta};[E])_x)=0)=1$. 称状态 $x$ 是非正则本质的，若 $[E]_x$ 是本质集，且 $\exists B_n\in\mathfrak{B}^Z$ 使得 $[E]_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{x\}\times B_n)$ 满足 $\forall y\in X,\pi(\overrightarrow{\theta}:Q(y,\overrightarrow{\theta};\{x\}\times B_n)=0)=1$. 称状态 $x$ 是正则本质的，若 $[E]_x$ 是本质集，且不存在可数个非本质集. 使其和为 $[E]_x$.

**注 1** 从上述定义可知状态 $x$ 是强常返的一定是弱常返的. 状态 $x$ 是强暂留的一定是弱暂留的. 在忽略零测度集的条件下，状态 $x$ 不是弱常返的就是弱暂留的. 不是本质的就是非本质的.

**定义 4** 称状态 $x$ 可达状 $y$, 若 $\pi(\overrightarrow{\theta}:L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_y)>0)=1$; 称状态 $x$ 一致可达状态 $y$, 若 $\exists\varepsilon>0$, 使 $\pi(\overrightarrow{\theta}:L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_y)>\varepsilon)=1$; 称状态 $x$ 均匀可达状态 $y$, $\forall\overrightarrow{\theta}\in\Theta^z,\exists\overrightarrow{\theta'}\in\Theta^z$, 有 $L(x,\overrightarrow{\theta'};(y,\overrightarrow{\theta}))>0$.

**引理 1**[1] 若状态 $x$ 是强常返的，则是本质的. 若状态 $x$ 是强暂留的，则是非本质的.

**定理 1** 若状态 $x$ 为强常返的，且 $x$ 均匀可达 $y$, 则 $L(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=1.\pi-a.s.$

**证明** $x$ 为强常返的, $\pi\{\overrightarrow{\theta}:Q(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=1\}=1$, 因为 $L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)\geq Q(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x).\pi-a.s.$ 所以 $\pi\{\overrightarrow{\theta}:L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=1\}=1.\forall\overrightarrow{\theta}$, 由于 $x$ 均匀可达 $y$, 可见自 $x$ 出发终于到达 $y$, 而且中间不经过 $x$ 的概率大于零，因此，必存在 $N\geq 1$, 使自 $x$ 出发于第 $N$ 步时初次到达 $y$, 而且中间不经过 $x$ 的概率 $F^N(x,T^{-N}\overrightarrow{\theta};(y,\overrightarrow{\theta}))>0$.

若设 $L(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)<1$, 则自 $x$ 出发不回到 $x$ 的概率至少为 $F^N(x,T^{-N}\overrightarrow{\theta};(y,\overrightarrow{\theta}))(1-L(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x))>0$. 由 $\overrightarrow{\theta}$ 的任意性，此与 $x$ 为强常返的矛盾. 故 $L(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=1.\pi-a.s.$

**推论 1** 若状态 $x$ 为强常返的，且 $x$ 均匀可达 $y$, 则 $x$ 和 $y$ 一致互达，且 $y$ 也为强常返的.

**证明** 状态 $x$ 为强常返的， $x$ 可达 $y$, 利用定理 1 可知， $L(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=1.\pi-a.s.$ 则 $y$ 一致可达 $x$, 且 $y$ 为强常返的. 再利用定理 1 可知， $x$ 一致可达 $y$. 即 $x$ 和 $y$ 一致互达.

**推论 2** 若状态 $x$ 为强常返的， $\forall y\in X$ 若 $x$ 均匀可达 $y$, 则

(1) $L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_y)=1.\pi-a.s.$

(2) $L(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=1.\pi-a.s.$

(3) $Q(x,\overrightarrow{\theta};[E]_y)=1.\pi-a.s.$

(4) $Q(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=1.\pi-a.s.$

**证明** (1),(2) 式易证. (4) 式的证明与 (3) 式相似，只证 (3) 式，由 (1) 式及文献 [2] 命题 2.6 知 $Q(x,\overrightarrow{\theta};[E]_y)=1.\pi-a.s.$

**推论 3** 若状态 $x$ 为强常返的，$\forall y\in X$ 有 $x$ 均匀可达 $y$, 则 $X_n$ 为一致不可约的，进而 $E$ 为不可分解的.

**定理 2** 若状态 $x$ 为非正则本质的或为非本质的，则 $\lim_{n\to\infty}P(\theta_0,\ldots,\theta_n;y,x)=0$.

**证明** 若状态 $x$ 为非本质的，$\pi\{\overrightarrow{\theta}:Q(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=0\}=1$. $(y,\overrightarrow{\theta})$ 无穷次到达 $[E]_x$ 的概率为零. $\exists N,P(\theta_0,\cdots,\theta_N;y,x)\geq 0,\pi-a.s.\forall n\geq N,P(\theta_0,\cdots,\theta_n;y,x)=0$.

若状态 $x$ 为非正则本质的，$\exists B_k\uparrow\Theta^z,\{x\}\times B_k$ 为非本质集. $\forall n,Q(x,\overrightarrow{\theta};\{x\}\times B_k)=0.\mu-a.s.$

$$P(\theta_0,\ldots,\theta_n;y,x)I_{B_k}(T^{n+1}\overrightarrow{\theta})\to 0,\quad\forall y\in X,\pi-a.s.$$

$$P(\theta_0,\ldots,\theta_n;y,x)\leq P(\theta_0,\ldots,\theta_n;y,x)I_{B_k}(T^{n+1})+I_{B_k^c}(T^{n+1}),\quad\forall\varepsilon>0.$$

选 $B_k,\pi B_k^c<\varepsilon,\limsup_{n\to\infty}\pi\{\overrightarrow{\theta}:P(\theta_0,\ldots,\theta_n;y,x)>\varepsilon\}<\varepsilon$.

故状态 $x$ 为非正则本质的或为非本质的，有 $\lim_{n\to\infty}P(\theta_0,\ldots,\theta_n;y,x)=0$.

**推论 4** 若状态空间 $X$ 有限，则 $X$ 不能只有非正则本质状态，或不能只有非本质状态.

**证明** $\forall x\in X$, 设为 $x$ 非正则本质的，或非本质. $1=\sum_{x\in X}P^{(n)}((y,\overrightarrow{\theta}),[E]_x)$ 令 $n\to\infty$. 由上述定理知，1=0, 矛盾，

故 $X$ 不能只有非正则本质状态，或不能只有非本质状态.

**定义 5** 称状态 $x$ 有周期 $t$, 若正整数集 $(n:\pi\{\overrightarrow{\theta}:\hat{P}^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)>0)\}=1)$ 的最大公约数为 $t$. 通常，若 $t>1$, 称 $x$ 为周期的；若 $t=1$ 称 $x$ 为非周期的. $\mu_x=\sum_{n=1}^{\infty}nF^n$. 称为 $x$ 的平均回转时间.

以下均在 $\pi--a.s.$ 意义下讨论.

**引理 2** 设正整数集 $(n:\pi\{\overrightarrow{\theta}:F^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)>0)\}=1)$ 的最大公约数为 $d$. 则 $d=t$.

**证明** 由文献 [2] 中命题 2.2

$$\hat{P}^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=F^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)+\sum_{k=1}^{n-1}F^k(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)\hat{P}^{n-k}(x,T^k\overrightarrow{\theta};[E]_x)\tag{1}$$

知 $\hat{P}^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)\geq F^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)$ 故 $(n:F^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)>0)\subset(n:\hat{P}^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)>0)$, 从而 $d\geq t$. 如果 $d=1$, 则结论显然成立. 如果 $d>1$, 则对每个 $r=1,\ldots,t-1$. 利用 (1) 式得

$$\hat{P}^r(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=F^1(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)\hat{P}^{r-1}(x,T\overrightarrow{\theta};[E]_x)+\cdots+F^r(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x),\tag{2}$$

但由 $d$ 的定义,知 $F^1(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=F^2(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=\cdots=F^r(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=0$, 故 $P^r(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=0$. 其次 $n=d+r$, 用 (1) 式同样有 $\hat{P}^{d+r}(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=F^d(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)\hat{P}^r(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=0$. 一般地，有

$$\begin{aligned}\hat{P}^{kd+r}(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=&F^d(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)\hat{P}^{(k-1)d+r}(x,T\overrightarrow{\theta};[E]_x)+\\&F^{2d}(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)\hat{P}^{(k-2)d+r}(x,T^2\overrightarrow{\theta};[E]_x)+\cdots+F^{kd}(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x).\end{aligned}$$

利用归纳法，可见 $\hat{P}^{kd+r}(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=0$, 换言之，如 $n$ 非 $d$ 的整数倍，则 $\hat{P}^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=0$. 从而 $(n:\hat{P}^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)>0)$ 中的数都可被 $d$ 整除，故 $t\geq d$, 于是 $t=d$.

**引理 3** 设状态 $x$ 为强常返的，有周期 $t$, 则 $\lim_{n\to\infty}\hat{P}_x^{nt}=t/\mu_x$.

**证明** 对 $n\geq 0$, 令 $r^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=\sum_{v=n+1}^{\infty}F^v(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)$, 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=\sum_{n=1}^{\infty}nF^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=\mu_x, \tag{3}$$

以 $F^v(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=r^{v-1(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)}-r^v(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)$ 代入 (1) 式，并记

$$F_x^v=F^v(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x),\quad \hat{P}_x^v=\hat{P}^v(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x),\quad r_x^v=r^v(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x).$$

得 $\hat{P}_x^n=-\sum_{v=1}^{n}(r_x^v-r_x^{v-1})P_x^{n-v}$, 即 $\sum_{v=0}^{n}r_x^v\hat{P}_x^{n-v}=\sum_{v=0}^{n}r_x^v\hat{P}_x^{n-1-v}$. 此表 $\sum_{v=0}^{n}r_x^v\hat{P}_x^{n-v}$ 之值与 $n$ 无关；既然 $r_x^0=1,r_x^0\hat{P}_x^0=1$ 得

$$\sum_{v=0}^{n}r_x^v\hat{P}_x^{n-v}=1\quad(n\geq 0), \tag{4}$$

设 $\lambda=\overline{\lim}_{n\to\infty}\hat{P}_x^{nt}$, 因当 $k$ 非 $t$ 的倍数时， $\hat{P}_x^k=0$, 故

$$\lambda=\overline{\lim_{n\to\infty}}\hat{P}_x^{nt}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\hat{P}_x^{k}. \tag{5}$$

必存在子列 $\{n_m\},n_m\to\infty$, 使 $\lambda=\lim\limits_{m\to\infty}\hat{P}_x^{n_mt}$, 任意取 s 使 $F_x^s>0$ 由引理 2 知 $t$ 可整除 $s$, 利用 (1) 式及状态 $x$ 为强常返的 $L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=1a.s.$ 得

$$\begin{aligned}
\lambda=&\underline{\lim}_{m\to\infty}\hat{P}_x^{n_mt}=\underline{\lim}_{m\to\infty}(F_x^s\hat{P}^{n_mt-s}(x,T^s\overrightarrow{\theta};[E]_x)+\sum_{v=1,v\neq s}^{n_mt}F_x^v\hat{P}^{n_mt-v}v)(x,T^v\overrightarrow{\theta};[E]_x)\\
\leq&F_x^s\underline{\lim}_{m\to\infty}\hat{P}^{n_mt-s}(x,T^s\overrightarrow{\theta};[E]_x)+\sum_{v=1,v\neq s}^{n_mt}F_x^v\overline{\lim_{m\to\infty}}\hat{P}^{n_mt-s}(x,T^s\overrightarrow{\theta};[E]_x)\\
=&F_x^s\underline{\lim}_{m\to\infty}\hat{P}^{n_mt-s}(x,T^s\overrightarrow{\theta};[E]_x)+(1-F_x^s)\lambda.
\end{aligned}$$

于是 $\underline{\lim}_{m\to\infty}\hat{P}_x^{n_mt-s}\geq\lambda$ 故由 (5) 式 $\lim_{m\to\infty}\hat{P}_x^{n_mt-s}=\lambda$. 这对每一个使 $F_x^s$ 的 $s$, 及每一个使 $\lim_{m\to\infty}\hat{P}_x^{n_mt-s}=\lambda$. 的子列 $\{n_m\}$ 正确. 因此，由于 $s$ 是 $t$ 的倍数，得 $\lim_{m\to\infty}\hat{P}_x^{n_mt-2s}=\lim_{m\to\infty}\hat{P}_x^{(n_mt-s)-s}=\lambda,\ldots$, 将此事实连续用若干次后可见 $\lim_{m\to\infty}\hat{P}_x^{n_mt-u}=\lambda$. 对任意形如 $u=\sum_{i=1}^{l}c_it_i$ 的 $u$ 正确，这里 $c_i$ 及 $t_i$ 都是正整数，使 $F_x^{t_i}>0,i=1,\ldots,l$. 既然 $t$ 也是 $(n:F^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)>0)$ 的最大公约数，可见必存在满足 $F_x^{t_i}>0$ 的 $t_i,i=1,\ldots,l$, 使 $t_1,t_2,\ldots,t_l$ 的最大公约数为 $t$, 存在 $k_0$, 当 $k\geq k_0$ 时，必有正整数 $c_i$ 使 $kt=\sum_{i=1}^{l}c_it_i$, 这样，便证明了：对每个 $k\geq k_0$ 有 $\lim_{m\to\infty}\hat{P}_x^{(n_mt-k)t}=\lambda$.

今在 (3) 式中令 $n=(n_m-k_0)t$, 并注意， $v$ 非 $t$ 的正整数倍时， $\hat{P}_x^v=0$ 就有

$$\sum_{v=0}^{n_m-k_0}r_x^{vt}\hat{P}_x^{(n_m-k_0-v)t}=1.$$

令 $m\to\infty$, 易见 $\lambda\sum\limits_{v=0}^{\infty}r_x^{vt}=1$. 只要 $\sum_{v=0}^{\infty}r_x^{vt}<\infty$, 否则 $\lambda=0$. 在任一情况下都有 $\lambda=1/\sum\limits_{v=0}^{\infty}r_x^{vt}$, 但因当 $v$ 非 $t$ 的正整数倍时， $F_x^v=0$. 故由 $r_x^v$ 的定义易见 $r_x^{vt}=\frac{1}{t}\sum_{j=vt}^{vt+t-1}r_x^j$ 从而由 (2) 式 $\sum_{v=0}^{\infty}r_x^{vt}=\frac{1}{t}\sum_{v=0}^{\infty}r_x^v$. 于是证明了 $\lambda=\frac{t}{\mu_x}$, 类似地可证 $\underline{\lim}_{m\to\infty}\hat{P}_x^{nt}=\frac{t}{\mu_x}$.

设状态 $x$ 的周期为 $t$, 引进数值

$$f^r(x,\overrightarrow{\theta};[E]_y)=\sum_{m=0}^{\infty}F^{mt+r}(x,\overrightarrow{\theta};[E]_y)\quad (r=1,\ldots,t,y\in X)$$

因此 $f^r(x,\overrightarrow{\theta};[E]_y)$ 为自 $x$ 出发在某 $n$ 步 $(n=r(\mathrm{mod}\ t))$ 上初次到达 $y$ 的概率. 故

$$\sum_{r=1}^{t}f^r(x,\overrightarrow{\theta};[E]_y)=L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_y).$$

**定理 3** 设状态 $x$ 的周期为 $t$ 的强常返的，则对任意 $y\in X$, 有

$$\lim_{n\to\infty}P^{nt+r}(y,\overrightarrow{\theta};[E]_y)=f^r(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)t/\mu_x.$$

**证明** 由 (2) 式，并注意 $P^r(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)=0,l\neq 0\ (\mathrm{mod}\ t)$. 对 $N\leq n$ 有

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{N}F^{mt+r}(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)P^{(n-m)t}(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x)\leq P^{nt+r}(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)\\ &\leq\sum_{m=N+1}^{\infty}F^{mt+r}(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)+\sum_{m=0}^{N}F^{mt+r}(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)P^{(n-m)t}(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x),\end{aligned}$$

于此式中令 $n\to\infty$, 并利用引理 3, 再令 $N\to\infty$, 由 $f^r(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)$ 的定义，即得所欲证.

## 参考文献:


[1] 肖争艳，胡迪鹤．绕积马氏链的状态分类 [J]. 数学物理学报， 2003, **23**(3): 306–313.
XIAO Zheng-yan, HU Di-he. *The classification of states for skew product Markov chains* [J]. Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed., 2003, **23**(3): 306–313. (in Chinese)

[2] 胡迪鹤．从 $p-m$ 链到随机环境中的马氏链 [J]. 数学年刊， 2004, **25**(1): 65–78.
HU Di-he. *From* $(p-m)$ *chains to Markov chains in random environments* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 2004, **25**(1): 65–78. (in Chinese)

[3] COGBURN R. *Markov chains in random environments: the case of Markovian environments* [J]. Ann. Probab., 1980, **8**(5): 908–916.

[4] COGBURN R. *The ergodic theory of Markov chains in random environments* [J]. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1984, **66**(1): 109–128.


# Some Results for Skew Product Markov Chains


*JIA Zhao-li*[1], *ZHU Dong-jin*[2], *WANG Xiao-yun*[2]

(1. School of Sciences, Hefei University of Technology, Anhui 230009, China;
2. College of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Anhui 241000, China )



**Abstract**: In this paper, we discuss the classification of states on skew product Markov chains, and the ergodic results. We divide the space of states in two ways.



**Key words**: Markov chains in random environments; skew product Markov chains; classification of states; strongly recurrent states.