

两类积图的邻点可区别全染色

田双亮¹, 陈 萍²

(1. 西北民族大学数学系, 甘肃 兰州 730030; 2. 西北民族大学经济管理学院, 甘肃 兰州 730030)
(E-mail: sl_tian@163.com)

摘 要: 本文证明了: 当 $n \geq 2$ 时, $\chi_{at}(K_n \times K'_n) = 2n$; 当 $p, q \geq 2$ 时, $\chi_{at}(C_{2p} \times K_{2q}) = 2q + 3$, 其中 $K_n \times K'_n$ 是两个不同标号完全图的积图, $C_{2p} \times K_{2q}$ 是偶圈和偶阶完全图的积图.

关键词: 积图; 邻点可区别全染色; 邻点可区别全色数.

MSC(2000): 05C15

中图分类号: O157.5

1 引 言

本文所考虑的图 G 都是有限无向的简单图, 用 $V(G)$, $E(G)$ 分别表示 G 的点和边的集合.

定义 1.1^[1] 设 G 和 H 是两个简单图, 且 $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 则称顶点集和边集分别为

$$V = \{w_{ij} | w_{ij} = (u_i, v_j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\},$$

$$E = \{w_{ij}w_{lk} | i = l \text{ 且 } v_jv_k \in E(H), \text{ 或 } j = k \text{ 且 } u_iu_l \in E(G), 1 \leq i, l \leq m, 1 \leq j, k \leq n\}$$

的图为 G 和 H 的积图, 简记为 $G \times H$.

定义 1.2^[2] 设 G 是阶至少为 2 的连通图, k 是正整数且 f 是一从 $V(G) \cup E(G)$ 到 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的映射. 对任意 $u \in V(G)$, 用 $C(u)$ 表示 $\{f(u)\} \cup \{f(uv) | uv \in E(G), v \in V(G)\}$. 如果

- 1) 对任意 $uv, vw \in E(G)$, $u \neq w$, 有 $f(uv) \neq f(vw)$;
- 2) 对任意 $uv \in E(G)$, 有 $f(u) \neq f(v)$, $f(u) \neq f(uv)$, $f(v) \neq f(uv)$,

则称 f 是 G 的 k -正常全染色. 若 f 是 G 的 k -正常全染色, 且

- 3) 对任意 $uv \in E(G)$, 有 $C(u) \neq C(v)$,

则称 f 是 G 的一 k -邻点可区别全染色 (简记为 k -AVDTC). 且称

$$\chi_{at}(G) = \min\{k | G \text{ 存在 } k\text{-AVDTC}\}$$

为 G 的邻点可区别全色数.

定义 1.2 中的 $C(u)$ 称为点 u 在 f 下的色集合, $C(u)$ 在全体颜色构成的集合 $C = \{1, 2, \dots, k\}$ 中的补集记为 $\overline{C}(u)$.

对阶至少为 2 的简单连通图 G , $\chi_{at}(G)$ 显然存在.

由定义 1.2, 容易得到以下引理.

引理 1.1 如果图 G 有两个相邻的最大度点, 则

$$\chi_{at}(G) \geq \Delta(G) + 2,$$

其中 $\Delta(G)$ 为 G 的最大度.

引理 1.2^[3] 对 n 阶完全图 K_n , 有

$$\chi_T(K_n) = \begin{cases} n, & \text{若 } n \equiv 1 \pmod{2}; \\ n+1, & \text{若 } n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

其中 $\chi_T(K_n)$ 为 K_n 的全色数.

引理 1.3^[2] 对 n 阶完全图 $K_n, n \geq 2$, 有

$$\chi_{at}(K_n) = \begin{cases} n+2, & \text{若 } n \equiv 1 \pmod{2}; \\ n+1, & \text{若 } n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

文献 [2] 给出了圈、完全图、完全二部图、扇、轮和树的邻点可区别全色数. 本文将给出积图 $K_n \times K'_n$ ($n \geq 2$) 与 $C_{2p} \times K_{2q}$ ($p, q \geq 2$) 的邻点可区别全色数. 文中未加说明的术语及符号可参见 [1],[3].

2 主要结论及其证明

定理 2.1 设完全图 K_n 与 K'_n 的顶点集分别为 $V(K_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $V(K'_n) = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$. 当 $n \geq 2$ 时, 有 $\chi_{at}(K_n \times K'_n) = 2n$.

证明 在 $K_n \times K'_n$ 中, 记 $v_{ij} = (u_i, u'_j)$, 用 $K_n^{(i)}$ 表示顶点集为 $V(K_n^{(i)}) = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}\}$ 的 n 阶完全图. 显然, 任意 $K_n^{(i)}$ 与 $K_n^{(t)}$ 不相交, $i \neq t, i, t = 1, 2, \dots, n$. 类似地, 用 $K_n^{(j)}$ 表示顶点集为 $V(K_n^{(j)}) = \{v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{nj}\}$ 的 n 阶完全图, 其中任意 $K_n^{(j)}$ 与 $K_n^{(s)}$ 不相交, $j \neq s, j, s = 1, 2, \dots, n$.

由定义 1.1 知, $K_n \times K'_n$ 是两个边不交的子图 $\bigcup_{i=1}^n K_n^{(i)}$ 与 $\bigcup_{j=1}^n K_n^{(j)}$ 的并集. 即

$$K_n \times K'_n = \left(\bigcup_{i=1}^n K_n^{(i)} \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^n K_n^{(j)} \right). \quad (1)$$

显然 $K_n \times K'_n$ 为正则图, 且 $\Delta(K_n \times K'_n) = 2n - 2$, 由引理 1.1, $\chi_{at}(K_n \times K'_n) \geq 2n$. 要证 $\chi_{at}(K_n \times K'_n) \leq 2n$, 仅需证明 $K_n \times K'_n$ 存在 $2n$ -AVDTC 即可. 考虑以下两种情况.

情况 1. n 为奇数.

由 (1) 式, 可分两步定义一个从 $E(K_n \times K'_n) \cup V(K_n \times K'_n)$ 到色集 $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\}$ 的映射 f .

首先, 对 $K_n^{(i)} (i = 1, 2, \dots, n)$ 进行全染色. 因 n 为奇数, 由引理 1.2, 可用 n 种色 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 染 $K_n^{(i)}$ 的顶点和边, 使其成为 $K_n^{(i)}$ 的 n -正常全染色, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$. 具体地,

设 $K_n^{(i)} (i = 1, 2, \dots, n)$ 的顶点与边集的 n 个最大独立集为

$$T_p^{(i)} = \{v_{i,p+q}v_{i,p-q} | q = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\} \bigcup \{v_{ip}\}, p = 1, 2, \dots, n$$

其中下标 $p+q$ 与 $p-q$ 取模 n .

显然, $T_1^{(i)}, T_2^{(i)}, \dots, T_n^{(i)}$ 是 $E(K_n'^{(i)}) \cup V(K_n'^{(i)})$ 的一个划分. 对任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 令

$$f(T_p^{(i)}) = a_{p+i-2}, p = 1, 2, \dots, n,$$

其中 a_{p+i-2} 的下标取模 n .

其次, 用 n 种色 $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ 染完全图 $K_n^{(j)}$ 的边, 使其成为 $K_n^{(j)}$ 的 n -邻强边染色^[4]. 其中 $j = 1, 2, \dots, n$. 具体地, 设 $K_n^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 的 n 个最大匹配为

$$E_t^{(j)} = \{v_{t+s,j}v_{t-s,j} | s = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}, t = 1, 2, \dots, n,$$

其中下标 $t+s$ 与 $t-s$ 取模 n .

显然, $E_1^{(j)}, E_2^{(j)}, \dots, E_n^{(j)}$ 是 $E(K_n^{(j)})$ 的一个划分. 对任意 $j = 1, 2, \dots, n$, 令

$$f(E_t^{(j)}) = b_{t+j-2}, t = 1, 2, \dots, n,$$

其中 b_{t+j-2} 的下标取模 n .

容易验证, f 为 $K_n \times K_n'$ 的 $2n$ -正常全染色, 且有

$$\overline{C}(v_{ij}) = \{b_{i+j-2}\}, i, j = 1, 2, \dots, n,$$

其中 b_{i+j-2} 的下标取模 n .

若用矩阵 $\overline{C} = (b_{i+j-2})_{n \times n}$ 表示各顶点色集的缺色情况, 其中 $i+j-2$ 取模 n 且 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 则有

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_0 & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_0 & \cdots & b_{n-4} & b_{n-3} \\ b_{n-1} & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} \end{pmatrix}.$$

在 $\overline{C}$ 中, 因每一行 (或列) 的任意两元素均不同, 所以

$$C(v_{ij}) \neq C(v_{il}), j \neq l, i, j, l = 1, 2, \dots, n;$$

$$C(v_{ij}) \neq C(v_{kj}), i \neq k, i, k, j = 1, 2, \dots, n.$$

因此, f 为 $K_n \times K_n'$ 的 $2n$ -AVDTC.

情况 2. n 为偶数.

类似于情况 1, 分两步定义一个从 $E(K_n \times K_n') \cup V(K_n \times K_n')$ 到色集 $\{0, 1, \dots, 2n-1\}$ 的映射 f .

首先, 因 n 为偶数, 由引理 1.3, 可用 $n+1$ 种色 $0, 1, 2, \dots, n$ 对 $K_n'^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 进行全染色, 使其成为 $K_n'^{(i)}$ 的 $(n+1)$ -AVDTC. 具体地, 对任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 令

$$f(v_{ij}v_{il}) = (i+j+l-2) \pmod{n+1}, j \neq l, j, l = 1, 2, \dots, n;$$

$$f(v_{ij}) = (i+2j-2) \pmod{n+1}, j = 1, 2, \dots, n.$$

其次, 因 n 为偶数, 所以可用 $n-1$ 种色 $n+1, n+2, \dots, 2n-1$ 对每一 $K_n^{(j)} (j=1, 2, \dots, n)$ 进行正常边染色.

容易证明, f 是 $K_n \times K'_n$ 的 $2n$ -正常全染色. 且有

$$\overline{C}(v_{ij}) = \{i+j-2\}, i, j = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $i+j-2$ 取模 $n+1$.

与情况 1 类似, 若用矩阵 $\overline{C} = (i+j-2)_{n \times n}$ 表示各顶点色集的缺色情况, 其中 $i+j-2$ 取模 $n+1$ 且 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 则有

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-2 & n-1 & n & \cdots & n-5 & n-4 \\ n-1 & n & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \end{pmatrix}.$$

因 $\overline{C}$ 中的每一行 (或列) 的任意两元素均不同, 所以

$$C(v_{ij}) \neq C(v_{il}), j \neq l, i, j, l = 1, 2, \dots, n;$$

$$C(v_{ij}) \neq C(v_{kj}), i \neq k, i, k, j = 1, 2, \dots, n.$$

因此, f 为 $K_n \times K'_n$ 的 $2n$ -AVDTC.

综合以上情况, 定理结论成立.

定理 2.2 设 C_{2p} 为偶圈, K_{2q} 为偶阶完全图, $p, q \geq 2$, 则 $\chi_{at}(C_{2p} \times K_{2q}) = 2q + 3$.

证明 令 $m = 2p, n = 2q$. 在 $C_m \times K_n$ 中, 因 $\Delta(C_m \times K_n) = n+1$ 且最大度点相邻, 由引理 1.1, $\chi_{at}(C_m \times K_n) \geq n+3$. 要证 $\chi_{at}(C_m \times K_n) \leq n+3$, 仅需证明 $C_m \times K_n$ 存在 $(n+3)$ -AVDTC 即可.

设

$$C_m = u_1 u_2 \cdots u_m u_1, V(K_n) = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}.$$

在 $C_m \times K_n$ 中, 记 $v_{ij} = (u_i, u'_j)$, 用 $K_n^{(i)}$ 表示顶点集为 $V(K_n^{(i)}) = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}\}$ 的 n 阶完全图, 其中 $i = 1, 2, \dots, m$. 用 $C_m^{(j)}$ 表示 m 阶圈 $v_{1j} v_{2j} \cdots v_{mj} v_{1j}$, 其中 $j = 1, 2, \dots, n$. 由定义 1.1 知, $C_m \times K_n$ 是 $n+m$ 个边不交的子图 $K_n^{(i)}, C_m^{(j)} (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$ 的并集. 即

$$C_m \times K_n = \left(\bigcup_{i=1}^m K_n^{(i)} \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^n C_m^{(j)} \right), \quad (2)$$

其中任意 $K_n^{(i)}$ 与 $K_n^{(t)}$ 不相交, $i \neq t, i, t = 1, 2, \dots, m$, 且任意 $C_m^{(j)}$ 与 $C_m^{(s)}$ 不相交, $j \neq s, j, s = 1, 2, \dots, n$.

由 (2) 式, 可分两步定义一个从 $E(C_m \times K_n) \cup V(C_m \times K_n)$ 到色集 $\{0, 1, \dots, n+2\}$ 的映射 f .

首先, 因 n 为偶数, 由引理 1.3, 可用 $n+1$ 种色 $0, 1, 2, \dots, n$ 对 $K_n^{(i)} (i = 1, 2, \dots, m)$ 进行全染色, 使其成为 $K_n^{(i)}$ 的 $(n+1)$ -AVDTC. 具体地,

对任意 $i = 1, 2, \dots, m$, 当 $i \equiv 1 \pmod{2}$ 时, 令

$$f(v_{ij}v_{il}) = (j + l - 1) \pmod{n+1}, j \neq l, j, l = 1, 2, \dots, n;$$

$$f(v_{ij}) = (2j - 1) \pmod{n+1}, j = 1, 2, \dots, n.$$

当 $i \equiv 0 \pmod{2}$ 时, 令

$$f(v_{ij}v_{il}) = (j + l) \pmod{n+1}, j \neq l, j, l = 1, 2, \dots, n;$$

$$f(v_{ij}) = (2j) \pmod{n+1}, j = 1, 2, \dots, n.$$

其次, 因 $C_m^{(j)}$ 为偶圈, 所以可用两种色 $n+1, n+2$ 依次循环地染 $C_m^{(j)}$ 的边 $v_{1j}v_{2j}, v_{2j}v_{3j}, \dots, v_{mj}v_{1j}$, 其中 $j = 1, 2, \dots, n$.

容易验证, f 为 $C_m \times K_n$ 的 $(n+3)$ -正常全染色, 且对 $i = 1, 2, \dots, m$, 有

$$\overline{C}(v_{ij}) = \{j-1\}, j = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } i \equiv 1 \pmod{2};$$

$$\overline{C}(v_{ij}) = \{j\}, j = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } i \equiv 0 \pmod{2}.$$

所以

$$C(v_{ij}) \neq C(v_{il}), j \neq l, i = 1, 2, \dots, m, j, l = 1, 2, \dots, n;$$

$$C(v_{ij}) \neq C(v_{i+1,j}), C(v_{mj}) \neq C(v_{1j}), i = 1, 2, \dots, m-1, j = 1, 2, \dots, n.$$

因此, f 为 $C_m \times K_n$ 的 $(n+3)$ -AVDTC. 从而定理为真.

参考文献:

- [1] BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Applications* [M]. New York: American Elsevier, 1976.
- [2] 张忠辅, 陈祥恩, 李敬文, 等. 关于图的邻点可区别全染色 [J]. 中国科学 (A 辑), 2004, **34**(5): 574-583.
ZHANG Zhong-fu, CHEN Xiang-en, LI Jing-wen. et al. *On the adjacent vertex-distinguishing total coloring of graphs* [J]. Sci. in China Ser. A, 2004, **34**(5): 574-583. (in Chinese)
- [3] YAP H P. *Total Colourings of Graphs* [M]. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [4] ZHANG Zhong-fu, LIU Lin-zhong, WANG Jian-fang. *Adjacent strong edge coloring of graphs* [J]. Appl. Math. Lett., 2002, **15**(5): 623-626.

On the Adjacent Vertex-Distinguishing Total Coloring of Two Classes of Product Graphs

TIAN Shuang-liang¹, CHEN Ping²

(1. Department of Mathematics, Northwest Minorities University, Lanzhou 730030, China;

2. College of Economics and Management, Northwest Minorities University, Lanzhou 730030, China)

Abstract: It is proved that if $n \geq 2$, then $\chi_{at}(K_n \times K'_n) = 2n$, and if $p, q \geq 2$, then $\chi_{at}(C_{2p} \times K_{2q}) = 2q + 3$, where $K_n \times K'_n$ is the product of two complete graphs with different labels, and $C_{2p} \times K_{2q}$ is the product of an even cycle and a complete graph of even order.

Key words: product graphs; adjacent vertex-distinguishing total coloring; adjacent vertex-distinguishing total chromatic number.