文章编号: 1000-341X(2007)04-0738-05 **文献标识码**: **A**

关于弱 MCP 空间与弱层空间

彭 良 雪
(北京工业大学应用数理学院，北京 100022)
(E-mail: pengliangxue@bjut.edu.cn)

摘 要: 本文引入了与已知的一些空间类非常类似的两个概念，我们分别称它们为弱 MCP 空间与弱层空间. 本文主要讨论了这两空间类的等价命题与一些基本性质，及它们与原有空间类的关系.

关键词: MCM 空间; k-MCM 空间; q- 空间; k- 半层空间; 弱 MCP 空间; 弱层空间.
MSC(2000): 54E20; 54E30
中图分类: O189.1

1 引 言

可数仿紧 (可数亚紧) 可以用相交为空集的递减闭集列的开扩张性质来刻画，在文献 [1] 中讨论了开扩张的单调性质，并引入了单调可数仿紧 (MCP) 空间与单调可数亚紧 (MCM) 空间. 每个 MCP 空间是可数仿紧空间，每个 MCM 空间是可数亚紧空间. 在文献 [2] 中我们讨论了 k-MCM 空间，同时由文献 [1] 、 [2] 与 [3] 我们知道 MCM 空间与 k-MCM 空间均可由 g 函数来刻画. 从文献 [4]–[7] 我们知道，层空间、 k- 半层空间、半层空间也都可利用 g 函数来刻画.

设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间，称函数 $g:\omega\times X\to\mathcal{T}$ 是 X 上的 g 函数，若每一 $x\in g(n,x)$, 不妨设每一 $g(n+1,x)\subset g(n,x)$. 如不特别说明，本文均用 g 表示 g 函数. 本文就是从 g 函数的不同性质刻画，考虑了两空间类及它们与原有空间类的关系. 为叙述方便，引入一些约定和记号：本文中所论的空间都是满足 T_1 分离性质的拓扑空间，所用到的映射均是连续满射. $\mathbf{N}$ 表示正整数集， $\omega=\mathbf{N}\cup\{0\}$. 若 $\{A_n\}_{n\in\omega}$ 和 $\{B_n\}_{n\in\omega}$ 是 X 中两集列，如果每一 $A_n\subset B_n$, 记为 $(A_n)\preceq(B_n)$. 令 2^X 为空间 X 中的所有非空闭集构成的族，未定义的术语见文献 [8] 与 [9].

2 弱 MCP 空间

定义 1[1] 如果存在算子 U, 对于空间 X 的任一交为空集的递减闭集列 $\{D_j\}_{j\in\omega}$ 都对应一开集列 $U(\{D_j\})=\{U(n,\{D_j\})\}_{n\in\omega}$ 满足：

(1) 对每一 $n\in\omega$ 有 $D_n\subset U(n,\{D_j\})$;

(2) $\bigcap_{n\in\omega}U(n,\{D_j\})=\emptyset$;

(3) 如果 $(D_n)\preceq(E_n)$, 则 $U(\{D_j\})\preceq U(\{E_j\})$,

则称 X 为单调可数亚紧 (monotonically countably metacompact) 空间，简称为 MCM 空间.

如果更设条件 (2), X 满足： $\bigcap_{n\in\omega}\overline{U(n,\{D_j\})}=\emptyset$, 则称 X 为单调可数仿紧 (monotonically countably paracompact) 空间，简称为 MCP 空间，在上述定义中可要求 $U(n+1,\{D_j\})\subset U(n,\{D_j\})$.

收稿日期: 2005-12-05; **接受日期**: 2006-07-03
基金项目: 北京市自然科学基金 (1062002).

定义 2[1] 考虑空间 X 上的 g 函数性质：

(β) 若对于每一 $n\in\omega$ 有 $x\in g(n,y_n)$, 则序列 $\{y_n\}$ 在 X 中有聚点；

(ωN) 若对于每一 $n\in\omega$ 有 $g(n,x)\cap g(n,y_n)\neq\emptyset$, 则序列 $\{y_n\}$ 在 X 中有聚点；

(q) 若对于每一 $n\in\omega$ 有 $y_n\in g(n,x)$, 则序列 $\{y_n\}$ 在 X 中有聚点.

如果空间 X 有 g 函数分别满足条件 (β) 、 (ωN) 或 (q), 则分别称 X 是 β- 空间、 ωN- 空间或 q- 空间.

文献 [1] 证明了 MCM 空间与 β- 空间等价. 如果把 β- 空间定义中的 x 换成有聚点的序列，我们将有如下的定义.

定义 3 空间 X 上如果有 g 函数具有如下性质：若对于每一 $n\in\omega$ 有 $x_n\in g(n,y_n)$, 且序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点，则序列 $\{y_n\}$ 在 X 中也有聚点. 则称空间 X 是弱 MCP 空间，其中 g 为 X 的弱 MCP 函数.

定义 4[2] 空间 X 上如果有 g 函数具有如下性质：对 X 中的任一序列 $\{x_n\}$ 及紧集 C, 若对任一 $n\in\omega$, 都有 $g(n,x_n)\cap C\neq\emptyset$, 则序列 $\{x_n\}$ 在 X 中也有聚点. 则称空间 X 是 k-MCM 空间，其中 g 为 X 的 k-MCM 函数.

由定义易知每个弱 MCP 空间是 k-MCM 空间，下面将说明 MCP 空间是弱 MCP 空间.

定理 1 X 是拓扑空间，则下述条件等价：

(1) X 是弱 MCP 空间；

(2) 空间 X 上有 g 函数满足：对任一交为空集的递减闭集列 $\{F_n\}_{n\in\omega}$, 若对于每一 $n\in\omega$ 有 $x_n\in\cup\{g(n,y):y\in F_n\}$, 则序列 $\{x_n\}$ 在 X 中没有聚点；

(3) 存在算子 U, 对 X 中每一交为空集的递减闭集列 $\{D_j\}_{j\in\omega}$ 都对应开集列 $U(\{D_j\})=\{U(n,\{D_j\})\}_{n\in\omega}$ 使得下述成立：

(I). 对于每一 $n\in\omega$ 有 $D_n\subset U(n,\{D_j\})$;

(II). 对 $n\in\omega$, 若 $x_n\in U(n,\{D_j\})$, 则序列 $\{x_n\}$ 没有聚点；

(III). 如果 $(D_j)\preceq(E_j)$, 则 $U(\{D_j\})\preceq U(\{E_j\})$ (我们称 U 是 X 的弱 MCP 算子).

证明 (1)$\Rightarrow$ (2). 对 X 中每一交为空集的递减闭集列 $\{F_n\}_{n\in\omega}$, 若对于每一 $n\in\omega$ 有 $x_n\in\cup\{g(n,y):y\in F_n\}$, 则存在 $y_n\in F_n$, 使得 $x_n\in g(n,y_n)$. 若序列 $\{x_n\}$ 有聚点，由于 g 是弱 MCP 函数，则序列 $\{y_n\}$ 在 X 中也有聚点. 这与 $\bigcap\{F_n:n\in\omega\}=\emptyset$ 矛盾.

(2)$\Rightarrow$(3). 显然.

(3)$\Rightarrow$ (1). 对任一 $x\in X$, $\{x\}$ 是闭集. 对 $n\in\omega$, 如果 $j\leq n$, 定义 $D_j^n(x)=\{x\}$, 否则 $D_j^n(x)=\emptyset$, 则 $\{D_j^n(x)\}_{j\in\omega}$ 是 X 的交为空集的递减闭集列. 令 $g(n,x)=U(n,\{D_j^n(x)\})$, 则 $g:\omega\times X\to\mathcal{T}$ 是 X 上的 g 函数. 令 $y_n\in g(n,x_n)$, 且 $\{y_n\}$ 是 X 的有聚点的序列. 假若序列 $\{x_n\}$ 在 X 中没有聚点，令 $F_n=\{x_m:m\geq n\}$, 则 $\{F_n\}_{n\in\omega}$ 是 X 中交为空集的递减闭集列. 对于 $m\leq n$, 有 $x_n\in F_m$. 因此集列 $D_j^n(x_n)\preceq(F_j)$. 这样 $g(n,x_n)=U(n,(D_j^n(x_n))\subset U(n,(F_j))$. 于是有 $y_n\in U(n,(F_j))$. 由 (II) 可知，序列 $\{y_n\}$ 在 X 中没有聚点，矛盾. 因此序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点，这样 (1) 成立. □

推论 1 每个 MCP 空间是弱 MCP 空间.

由推论 1 及文献 [1] 与 [2] 可得： ωN- 空间 $\Rightarrow$ MCP $\Rightarrow$ 弱 MCP $\Rightarrow$ k-MCM $\Rightarrow$ MCM.

下面我们将说明 MCM$\not\Rightarrow$ k-MCM, 弱 MCP$\not\Rightarrow$ MCP.

引理 1 第一可数的 k-MCM 空间是 ωN- 空间.

证明 令 g 是 k-MCM 函数， X 是第一可数空间，不妨设 $\{g(n,x):n\in\omega\}$ 也是点 x 的邻域基. 若 $g(n,y_n)\cap g(n,x)\neq\emptyset$, 令 $z_n\in g(n,y_n)\cap g(n,x)$, 则序列 $\{z_n\}$ 收敛于点 x, 由于 g 是 k-MCM 函数，因此序列 $\{y_n\}$ 在 X 中有聚点. 这样 X 是 ωN- 空间.

说明 1 MCM $\not\Rightarrow$ k-MCM

每个 Moore 空间都是半层空间, 而半层空间是 MCM 空间, 因此每个 Moore 空间都是 MCM 空间. 如果 Y 是不可度量 Moore 空间，则 Y 一定不是 k-MCM 空间. 假若 Y 是 k-MCM 空间，则由引理 1 知 Y 是 MCP 空间. 而 MCP 的 Moore 空间可度量化 [1], 矛盾. 因此 Y 不是 k-MCM 空间.

为了说明弱 MCP$\not\Rightarrow$ MCP, 我们首先证如下定理.

定理 2 弱 MCP 空间的闭映射像是弱 MCP 空间.

证明 令 $f:X\to Y$ 是闭映射, 且 X 是弱 MCP 空间, 下证 Y 是弱 MCP 空间. 由定理 1, 令 U 是 X 的弱 MCP 算子. 令 $\{F_n\}_{n\in\omega}$ 是 Y 中交为空集的递减闭集列, 我们定义 $V(m,(F_n)_{n\in\omega})=Y\setminus f(X\setminus U(m,(f^{-1}(F_n))_{n\in\omega}))$, 则 $V(m,(F_n)_{n\in\omega})$ 开于 Y, 且 $F_m\subset V(m,(F_n)_{n\in\omega})$. 对任意 $y_m\in V(m,(F_n)_{n\in\omega})$, 则 $f^{-1}(y_m)\subset U(m,(f^{-1}(F_n))_{n\in\omega})$. 取 $x_m\in f^{-1}(y_m)$, 假若序列 $\{y_m\}$ 在 Y 中有聚点，则由 f 是闭映射可知，序列 $\{x_m\}$ 在 X 中有聚点，这与 U 是 X 的弱 MCP 算子矛盾. 因此 V 是 Y 的弱 MCP 算子.

说明 2 由文献 [1] 中的例 15 知道 MCP 空间的闭像不一定是 MCP 空间，因此再由定理 2 知：弱 MCP$\not\Rightarrow$ MCP.

问题 1 k-MCM 空间是弱 MCP 空间吗？

利用文献 [6] 中林寿的方法，可以证明如下结论:

定理 3 若 $f:X\to Y$ 是闭映射，且 X 是弱 MCP 空间，则对 Y 中的任一闭可数紧集 C, 一定有 X 中的可数紧集 B, 使得 $f(B)=C$.

证明 令 g 是 X 的弱 MCP 函数，C 是 Y 的闭可数紧子集. 对任意 $y\in C$, 取 $x_y\in f^{-1}(y)$, 并令 $A=\{x_y:y\in C\}$, 则有 $f(A)=C$. 令 $B=\overline{A}$. 对于 A 中的任一序列 $\{x_n\}$, 若满足当 $n\neq m$ 时，有 $x_n\neq x_m$, 则 $\{f(x_n)\}$ 在 C 中有聚点. 而 f 是闭映射，因此序列 $\{x_n\}$ 在 X 中也有聚点. 对于序列 $\{y_n\}$, 若 $y_n\in B\setminus A$, 取 $x_n\in g(n,y_n)\cap A$. 由于序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点，而 g 又是弱 MCP 函数，因此序列 $\{y_n\}$ 在 X 中有聚点. 这样对 B 中的任意序列都有聚点，因此 B 是 X 中的可数紧集，且有 $f(B)=f(\overline{A})=\overline{f(A)}=\overline{C}=C$.

定义 5[9] $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间，如果空间 X 存在算子 $U:\omega\times 2^X\to\mathcal{T}$ 满足下述条件:

(1) $F\subset U(n,F)$;

(2) $F_1\subset F_2\Rightarrow$ 对于每一 $n\in\omega$ 有 $U(n,F_1)\subset U(n,F_2)$,

若 $F=\bigcap_{n\in\omega}U(n,F)$, 则称 X 为半层空间；若 $F=\bigcap_{n\in\omega}\overline{U(n,F)}$, 则称 X 为层空间；若 K 是 X 的紧集且 $K\cap F=\emptyset$, 则有某个 $m\in\omega$ 使得 $K\cap U(m,F)=\emptyset$, 则称 X 为 k- 半层空间.

文献 [6] 与 [10] 证明了正则 k- 半层空间的闭像是 k- 半层空间，由定理 3 及林的证明方法很容易得到如下的定理.

定理 4 若 X 是弱 MCP 的 k- 半层空间，且 $f:X\to Y$ 是闭映射，则 Y 也是 k- 半层空间.

证明 X 是弱 MCP 的 k- 半层空间，因此 X 中的可数紧集是紧集. 由定理 3 知： Y 中的任意紧集都是 X 中某紧集的像. 如果 U 是 X 的 k- 半层算子，则对任意 $F\in 2^Y$, 我们令 $V(n,F)=Y\setminus f(X\setminus U(n,f^{-1}(F)))$. 很容易证明 V 是 Y 的 k- 半层算子.

问题 2 每个 k- 半层空间是弱 MCP 空间吗？

文献 [1] 证明了 X 是 ωN- 空间的充要条件是 X 为 MCP 的 q- 空间，而我们有如下定理.

定理 5 X 是 ωN- 空间的充要条件是 X 为弱 MCP 的 q- 空间.

证明 只需证明弱 MCP 的 q- 空间是 ωN- 空间. 令 g_1 是弱 MCP 函数，g_2 是 q- 函数. 令 $g(n,x)=g_1(n,x)\cap g_2(n,x)$. 若 $g(n,y_n)\cap g(n,x)\neq\emptyset$, 取 $z_n\in g(n,y_n)\cap g(n,x)$, 则 $z_n\in g_2(n,x)$, 这样序列 $\{z_n\}$ 有聚点. 由于 $z_n\in g_1(n,y_n)$, 且序列 $\{z_n\}$ 有聚点，g_1 是弱 MCP 函数，这样序列 $\{y_n\}$ 有聚点，因此 X 是 ωN- 空间.

引理 2[7] X 是 k- 半层空间等价于 X 存在 g 函数满足：若 $x_n\in g(n,y_n), n\in\omega$, 且序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x, 则序列 $\{y_n\}$ 也收敛与 x.

一个很自然的问题是, 如果把上述引理中的收敛于点 x 改为有聚点 x, 这样的空间类将有什么特点？

定义 6 若 X 中存在 g 函数满足：

(1) $\{x\}=\bigcap_{n\in\omega} g(n,x)$;

(2) 若 $x_n\in g(n,y_n), n\in\omega$, 且序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点 x, 则序列 $\{y_n\}$ 也有聚点 x, 则称空间 X 是弱层空间，称 g 为 X 的弱层函数.

定理 6 每个弱层空间是 k- 半层空间.

证明 令 g 是 X 的弱层函数，对 $n\in\omega, x_n\in g(n,y_n)$ 且序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x. 于是序列 $\{y_n\}$ 有聚点 x. 对于序列 $\{y_n\}$ 的任一子列 $\{y_{n_k}\}$, 不妨设 $n_k<n_{k+1}$. $x_{n_k}\in g(n_k,y_{n_k})$, 序列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于点 x. 对于任一 $k\in\omega$, $m\in\omega$, 若 $n_k<m\leq n_{k+1}$, 令 $x'_m=x_{n_{k+1}}, y'_m=y_{n_{k+1}}$. $x'_m\in g(n_{k+1},y_{n_{k+1}})\subset g(m,y_{n_{k+1}})=g(m,y'_m)$. 由于序列 $\{x'_m\}$ 有聚点 x, 这样序列 $\{y'_m\}$ 也有聚点 x. 因此序列 $\{y_n\}$ 的任一子列在 X 中有聚点 x, 于是序列 $\{y_n\}$ 在 X 中收敛于点 x, 因此 X 是 k- 半层空间.

为了说明弱层空间与层空间的关系，我们先考察弱层空间的等价命题.

定理 7 X 是拓扑空间，则下述关系等价：

(1) X 是弱层空间;

(2) X 中存在算子 $U:\omega\times 2^X\to\mathcal{T}$, 使得

(I). 对于每一 $n\in\omega$, 有 $F_n\subset U(n,F)$;

(II). 如果 $F_1,F_2\subset 2^X$, 且有 $F_1\subset F_2$, 则 $U(n,F_1)\subset U(n,F_2)$;

(III). 对于每一 $n\in\omega$, 若 $x_n\in U(n,F)$, 则序列 $\{x_n\}$ 在 $X\setminus F$ 中没有聚点.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). g 为弱层函数, 令 $U(n,F)=\cup\{g(n,x):x\in F\}$, 则 $U(n,F)$ 满足 (I)–(III).

(2) $\Rightarrow$ (1). $\{x\}$ 是闭集，令 $U(n,\{x\})=g(n,x)$. 若 $y\in\cap\{g(n,x):n\in\omega\}$, 则 $y\in\cap\{U(n,\{x\}):n\in\omega\}$. 假若 $y\neq x$, 令 $y_n=y, n\in\omega$, 这样序列 $\{y_n\}$ 在 $X\setminus\{x\}$ 有聚点 y, 与已知 (III) 矛盾. 因此 $\cap\{g(n,x):n\in\omega\}=\{x\}$. 若 $x_n\in g(n,y_n), n\in\omega$, 且序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点 x, 下证序列 $\{y_n\}$ 也有聚点 x. 假若 x 不是序列 $\{y_n\}$ 的聚点，不妨设对所有 $n\in\omega$, $x\neq y_n$. 这样 $x\notin\overline{\{y_n:n\in\omega\}}=A$, 而 $x_n\in g(n,y_n)\subset U(n,A)$, 这样 $x_n\in U(n,A)$. 由 (2) 知，序列 $\{x_n\}$ 在 $X\setminus A$ 中没有聚点. 而 $x\notin A$, 这样点 x 不是序列 $\{x_n\}$ 的聚点，矛盾. 因此序列 $\{y_n\}$ 也有聚点 x, X 是弱层空间.

由上述定理及层空间的定义易得：层空间 $\Rightarrow$ 弱层空间 $\Rightarrow$ k- 半层空间 $\Rightarrow$ 半层空间.

我们知道半层空间与层空间均被闭映射保持. 文献 [6] 与 [10] 证明了正则 k- 半层空间的闭像是 k- 半层空间，下面我们考虑弱层空间的闭像.

定理 8 弱层空间的闭像是弱层空间.

证明 X 是弱层空间，且 $f: X \to Y$ 是闭映射，下证 Y 也是弱层空间. X 中存在弱层算子 $U: \omega \times 2^X \to \mathcal{T}$ 满足定理 7 中 (2) 的条件. 对于 Y 中的任一非空闭集 F, 则 $f^{-1}(F)$ 闭于 X. 对于 $n \in \omega$, 定义 $V(n, F) = Y \setminus f(X \setminus U(n, f^{-1}(F)))$, 则 $V(n, F)$ 开于 Y, 且 $F \subset V(n, F)$. 对任意 $y_n \in V(n, F)$, 则 $f^{-1}(y_n) \subset U(n, F)$. 取 $x_n \in f^{-1}(y_n)$, 假若序列 $\{y_n\}$ 在 $Y \setminus F$ 中有聚点，则由 f 是闭映射可知，序列 $\{x_n\}$ 在 $X \setminus f^{-1}(F)$ 中有聚点，这与 U 是 X 中的弱层算子矛盾. 因此 V 是 Y 的弱层算子.

由定义很容易知道每个弱层 q- 空间是第一可数空间，而第一可数的 k- 半层空间是 Nagata 空间，因此弱层 q- 空间是 Nagata 空间.

问题 3 k- 半层 q- 空间是 Nagata 空间吗？

问题 4 k- 半层空间是弱层空间吗？

问题 5 弱层空间是层空间吗？

问题 6 弱层空间具有可数积性质吗？

问题 7 弱层 T_2 空间还有什么更好的分离性质？

问题 8 弱层空间的任一开覆盖 $\mathcal{U}$, 是否存在开加细序列 $\{\mathcal{V}_n\}_{n\in\omega}$, 使得对 X 中任一紧集 C, 都存在 $n \in \omega$ 使得 $\mathrm{ord}(C, \mathcal{V}_n) < \omega$ (其中 $\mathrm{ord}(C, \mathcal{V}) = |\{V : V \cap C \neq \emptyset, V \in \mathcal{V}\}|$)?

参考文献:

[1] GOOD C, KNIGHT R, STARES I. *Monotone countable paracompactness* [J]. Topology Appl., 2000, **101**(3): 281–298.

[2] 彭良雪，林寿. 关于单调空间与度量化定理 [J]. 数学学报， 2003, **46**(6): 1225–1232.
PENG Liang-xue, LIN Shou. *Monotone spaces and metrization theorems* [J]. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 2003, **46**(6): 1225–1232. (in Chinese)

[3] 吴利生. 关于 k- 半层空间 [J]. 苏州大学学报， 1983, **1**: 1–4.
WU Li-sheng. *About k-semistratifiable spaces* [J]. J. Suzhou Univ., 1983, **1**: 1–4. (in Chinese)

[4] BORGES C R. *On stratifiable spaces* [J]. Pacific J. Math., 1966, **17**: 1–16.

[5] CREEDE G. *Concerning semi-stratifiable spaces* [J]. Pacific J. Math., 1970, **32**: 47–54.

[6] LIN Shou. *Mapping theorems on k-semistratifiable spaces* [J]. Tsukuba J. Math., 1997, **21**(3): 809–815.

[7] GAO Zhi-min. *On g-function separation* [J]. Questions Answers Gen. Topology, 1986, **4**(1): 47–57.

[8] 林寿. 广义度量空间与映射 [M]. 北京：科学出版社， 1995.
LIN Shou. *Generalized Metric Spaces and Mappings* [M]. Beijing: Chinese Science Publishers, 1995. (in Chinese)

[9] GRUENHAGE G. *Generalized metric spaces* [M]. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[10] GAO Zhi-min. *$\aleph$–space is invariant under perfect mappings* [J]. Questions Answers Gen. Topology, 1987, **5**(2): 271–279.

On Weak MCP Spaces and Weak Stratifiable Spaces

PENG Liang-xue

(College of Applied Science, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

Abstract: In this note, we introduce two new classes of spaces, called weak MCP spaces and weak stratifiable spaces, respectively. The properties of the two new classes of spaces are discussed in this note. Finally, we list the relationship of some known spaces and also raise some questions concerning the two new classes of spaces.

Key words: MCM space; k-MCM space; q-space; k-semistratifiable space; weak MCP space; weak stratifiable space.