文章编号: 1000-341X(2007)04-0743-07 **文献标识码**: **A**

一类复映射 $z \leftarrow e^{i\phi}(\bar{z})^{\alpha} + c\ (\alpha < 0)$ 的广义 M 集

王 兴 元
(大连理工大学电子与信息工程学院, 辽宁 大连 116024)
(E-mail: wangxy@dlut.edu.cn)

摘 要: 本文分析了一类复映射 $z \leftarrow e^{i\phi}(\bar{z})^{\alpha} + c\{\alpha < 0, \phi \in [0, 2\pi)\}$ 的临界点的性质, 给出了广义 Mandelbrot 集 (简称广义 M 集) 的定义, 并构造出一系列广义 M 集. 利用复变函数理论和计算机制图相结合的实验数学的方法, 本文对广义 M 集的结构和演化进行了研究, 结果表明: 1). 广义 M 集的几何结构依赖于参数 α, R 和 ϕ; 2). 整数阶广义 M 集具有对称性和分形特征; 3). 小数阶广义 M 集出现了错动和断裂, 且其演化过程依赖于相角主值范围的选取.

关键词: 一类复映射; 临界点; 广义 M 集; 分形; 演化.
MSC(2000): 28A80
中图分类: TP301.5

0 引 言

近 20 年来, 人们对复映射 $z \leftarrow z^{\alpha} + c(\alpha = 2)$ 所构造的 M 集已进行了深入研究, 发现其中深藏着规律性的结构 [1−5]. 在此基础上, Lakhtakia 和 Gujar 研究了 $\alpha \in R$ 的广义 M 集, 并基于其视觉结构特点提出了几点假设 [6,7]; Glynn 分析了 $\alpha > 0$ 的广义 M 集的对称演化 [8]; 作者从理论上进行了研究, 提出了广义 M 集的嵌套拓扑分布定理和裂变演化规律, 证实了 Lakhtakia, Gujar 和 Glynn 的假设 [9,10]. 此外, Pickover, Hooper 和 Philip 曾分别提出了 ε 正交法、星迹法、区域分解法和角度分解法, 研究了 M 集非边界区域的分形结构 [11−13]; Lakhtakia 提出了开关 Julia 集的构造算法 [14]; 作者推广了他们的方法, 研究了广义 M 集非边界区域和开关广义 M 集的分形结构 [15,16]. 本文将上述映射推广为 $z \leftarrow e^{i\phi}(\bar{z})^{\alpha} + c\{\alpha < 0, \phi \in [0, 2\pi)\}$, 并研究了由推广后的映射所构造的广义 M 集的分形结构和裂变演化规律.

1 理论和方法

复映射 $f: z \leftarrow e^{i\phi}(\bar{z})^{\alpha} + c\ (\alpha \in R)$ 的临界点 z_0 是使其一阶导数为零的点. 若设 $z = re^{i\theta}$, 则 $f(z) = e^{i\phi}r^{\alpha}e^{-i\alpha\theta} + c$, $f'(z) = e^{i\phi}(\alpha r^{\alpha-1}r'e^{-i\alpha\theta} - i\alpha r^{\alpha}e^{-i\alpha\theta}\theta')$, 故 f 的临界点应满足 $e^{i\phi}(\alpha r^{\alpha-1}r'e^{-i\alpha\theta} - i\alpha r^{\alpha}e^{-i\alpha\theta}\theta') = 0$, 即 $e^{i\phi}\alpha r^{\alpha-1}e^{-i\alpha\theta}(r' - ir\theta') = 0$. 若 $\alpha \neq 0$, 由 $r' - ir\theta' \neq 0$, 可得

$$\begin{cases} \alpha < 1, & \text{临界点为} z \to \infty, \\ \alpha = 1, & \text{无临界点}, \\ \alpha > 1, & \text{临界点为} z = 0. \end{cases} \tag{1}$$

由复映射 f 构造广义 M 集, 应从 f 的临界点开始迭代, 可当 $\alpha > 1$ 时, 若取 $z_0 = 0$, 则 $z_1 = c$, $z_2 = e^{i\phi}(\bar{c})^{\alpha} + c, \ldots$; 当 $\alpha < 0$ 时, 若取 $z_0 = \infty$, 则 $z_1 = c$, $z_2 = e^{i\phi}(\bar{c})^{\alpha} + c, \ldots$. 因此为

收稿日期: 2005-08-10
基金项目: 国家自然科学基金 (60573172); 辽宁省教育厅高等学校科学技术研究项目 (20040081).

避免计算机溢出，式 (1) 选取迭代初始点为 $z_0=c$, 这使得用计算机构造任意实指数 $\alpha\in R$ 且 $\alpha\notin[0,1]$ 的广义 M 集的操作得到了统一. 值得注意的时，当 $\alpha\in[0,1]$ 时，仍用 $z_0=c$ 作为初始点迭代，得到的图像不是真正的 M 集. 这是因为： $\alpha=1$ 时，因为无临界点，所以也就谈不上临界点的轨道； $0\le\alpha<1$ 时，临界点为 ∞, ∞ 的轨道上没有参数 c, 所以从 c 开始迭代的图像不是的 M 集.

定义 1 设 $f:z\leftarrow e^{i\phi}(\bar{z})^{\alpha}+c$ ($\alpha<0$ 或 $\alpha>1$) 为黎曼球 $\hat{C}$ 上的复映射， M_f 表示 C 中 c 点的轨道有界的复数 c 的集合，即：

$$M_f=\{c\in C:\{f^k(c)\}_{k=1}^{\infty}\text{有界}\}=\{c\in C:c,e^{i\phi}(\bar{c})^{\alpha}+c,e^{i\phi}[\overline{e^{i\phi}(\bar{c})^{\alpha}+c}]^{\alpha}+c,\dots\not\to\infty,k\to\infty\}$$

则称 M_f 为相应于 f 的广义 M 集.

定义 1 是利用逃逸时间算法绘制 M_f 的计算机图象的理论基础 [4,5]. 选取逃逸半径 $R=20$ 、逃逸时间限制 $N=200$, $\phi=\pi/2$, 利用逃逸时间算法作者绘制了 $\alpha<0$ 的 M_f. 图中白色代表稳定区 M_f, 黑色代表不稳定区 $\overline{M_f}$. 将 α 表示为 $\alpha=-(\eta+\varepsilon)$, 其中 η 是正整数， ε 为正小数即 $0<\varepsilon<1$, 根据分形图的结构特点，可分两种情况来研究 M_f.

2 实验与结果

2.1 $\alpha=-\eta$

图 1 为 α 取负整数时的广义 M 集，可见分形图为 $\eta-1$ 个卫星群环绕中央行星的星群结构，不稳定区 $\overline{M_f}$ 嵌于稳定区 M_f 之中.

(a) $\alpha=-2$ (b) $\alpha=-5$ (c) $\alpha=-6$ (d) 图 a 方框区域的局部放大

图 1 负整数阶的广义 M 集

定理 1 由复映射 $f:z\leftarrow e^{i\phi}(\bar{z})^{\alpha}+c(\alpha=-\eta)$ 构造广义 M 集，有

$$\left\|f^k(c)\right\|=\left\|f^k(ce^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}})\right\|,\quad k=1,2,3,\dots,N;\ j=0,1,2,\dots,\eta-2.$$

证明 利用数学归纳法，因为

$$f^1(ce^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}})=e^{i\phi}(\overline{ce^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}}})^{-\eta}+ce^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}}=e^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}}(e^{i\phi}(\bar{c})^{-\eta}e^{i(2\pi j)}+c)=e^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}}(e^{i\phi}(\bar{c})^{-\eta}+c),$$

所以 $\left\|f^1(c)\right\|=\left\|f^1(ce^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}})\right\|$, 故可设

$$\left\|f^{k-1}(c)\right\|=\left\|f^{k-1}(ce^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}})\right\| \tag{2}$$

成立． $f^k(ce^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}}) = f^{k-1}[f(ce^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}})] = f^{k-1}[e^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}}(e^{i\phi}(\bar{c})^{-\eta}+c)]$, 令 $f^1(c)=e^{i\phi}(\bar{c})^{-\eta}+c=c'$, 则 $f^k(ce^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}}) = f^{k-1}(c'e^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}})$. 而 $f^k(c)=f^{k-1}[f^1(c)]=f^{k-1}(c')$, 由式 (2) 知 $\left\|f^{k-1}(c')\right\| = \left\|f^{k-1}(c'e^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}})\right\|$, 故有 $\left\|f^k(c)\right\| = \left\|f^k(ce^{i\frac{2\pi j}{\eta-1}})\right\|$.

定理说明 $\alpha=-\eta$ 的广义 M 集的中心为原点且具有 $\eta-1$ 次的旋转对称性.

定理 2 复映射 $f: z\leftarrow e^{i\phi}(\bar{z})^{\alpha}+c\ (\alpha<0)$ 所产生的广义 M 集的中央行星为以原点为圆心、半径为 $R^{1/\alpha}$ 的近似圆.

证明 由 $\alpha<0$, 可知若 $\|x\|\ll 1$, 则有 $\left\|f^1(x)\right\|\geq R$. 又由定理 1 知原点为行星中心，故可认为中央行星上任意点 $c\ (\|c\|<1)$ 都满足 $\left\|f^1(c)\right\|\geq R$. $f^1(c)=e^{i\phi}(\bar{c})^{\alpha}+c$, 若令 $c=\|c\|\,e^{i\varphi}$, 则

$$f^1(c)=\|c\|^{\alpha}\,e^{i(\phi-\alpha\varphi)}+\|c\|\,e^{i\varphi}. \tag{3}$$

$\alpha<0$, $\|c\|<1$, $\|c\|^{\alpha}\gg\|c\|$. 由 (3) 式得 $\left\|f^1(c)\right\|\cong\|c\|^{\alpha}$. $\left\|f^1(c)\right\|\geq R$, $\|c\|^{\alpha}\geq R$, 故可推得

$$\|c\|\leq R^{1/\alpha}. \tag{4}$$

对 (3) 式求模的平方，有

$$\left\|f^1(c)\right\|^2=\|c\|^{2\alpha}+2\,\|c\|^{\alpha+1}\cos[(\alpha+1)\varphi-\phi]+\|c\|^2. \tag{5}$$

由 (5) 式可知 $\|c\|$ 为 φ 的函数，根据 (4) 式可将 $\|c\|$ 写成

$$\|c\|=R^{1/\alpha}[1-\delta(\varphi)], \tag{6}$$

这里 $\delta(\varphi)\ll 1$. 将 (6) 式代入 (5) 式，基于 $\left\|f^1(z)\right\|^2\geq R^2$ 并取一阶近似，可得

$$\delta\left(\varphi\right)\cong\frac{\cos[(\alpha+1)\varphi-\phi]}{\alpha R^{1-1/\alpha}}. \tag{7}$$

可见中央行星与圆的误差具有 $|\alpha+1|$ 次的旋转对称性，且最大误差发生在

$$\varphi=(2k\pi+\phi)/(\alpha+1)\ (k\ \text{为整数，且}\ 0\leq k\leq|\alpha+1|-1).$$

定理 2 的证明中并没规定 α 取负整数，故定理 2 的结论也适用于 α 取负小数时的情况.

中央行星上的任意点 c 满足 $\left\|f^1(c)\right\|\geq R$, 可用 B^1 表示它. 若某卫星上的任意点 c 满足 $\left\|f^k(c)\right\|\geq R$ 且 $\left\|f^{k-1}(c)\right\|<R$, 则用 B^k 表示该卫星.

$\forall c\in B^2$, $\exists f^1(c)\in B^1$ 和 $\left\|f^2(c)\right\|\geq R$. 设 B^2 的中心为 c_2, B^1 中心为 c_1, 则 $c_1=0$ (原点) 是 c_2 的像. 故有 $e^{i\phi}(\bar{c}_2)^{\alpha}+c_2=0$, 则

$$c_2=e^{i\frac{\phi-(2m+1)\pi}{\alpha+1}},\quad m=0,1,\ldots,|\alpha+1|-1, \tag{8}$$

由 (8) 式可知 B^2 的个数为 $|\alpha+1|$. 由图 1 可见 B^2 即为卫星群中最大的卫星. 根据 (8) 式，主要卫星 B^2 的中心位于半径为 1 的圆周上. 又由定理 2, α 越小，中央行星 B^1 的半径 $R^{1/\alpha}$ 越大并趋于 1, 即 B^1 越接近 B^2, 因此 B^2 只有减小，故可得出 B^1 的尺寸要大于 B^2. 进而可推出 B^k 的尺寸随着 k 的增大而逐渐降低.

由图 1(d) 还可看到主要卫星周围环绕着小卫星，小卫星周围又环绕着更小卫星 $\cdots$, 这种结构在不同水平上嵌套出现，广义 M 集的整体与局部放大图极为相似，体现了明显的自相似性.

下面讨论高阶小卫星 B^k $(3\le k\le N):\forall c\in B^k, \exists f^1(c)\in B^{k-1}$. 设 B^k 的中心为 c_k, B^{k-1} 的中心为 c_{k-1}, 则 $f^1(c_k)=c_{k-1}$. 首先考虑 B^3, B^2 的中心是 B^3 的中心 c_3 的像. 即

$$e^{i\phi}(\bar{c}_3)^\alpha+c_3=c_2. \tag{9}$$

将 (8) 式代入 (9) 式，即可求出 c_3. 为了确定 B^3 的个数和位置，考虑如下特殊情况： $\alpha=-2$, $\phi=\pi/2$, 且令 $c_3=\|c_3\|\,e^{i\gamma}$, 则 (9) 式变为

$$\|c_3\|^{-2}\,e^{i(\pi/2-2\gamma)}+\|c_3\|\,e^{i\gamma}=e^{i\pi/2}. \tag{10}$$

由 (10) 式两边实部、虚部对应相等，有

$$\begin{cases}\|c_3\|^{-2}\cos 2\gamma+\|c_3\|\sin\gamma=1,\\ \|c_3\|^{-2}\sin 2\gamma+\|c_3\|\cos\gamma=0.\end{cases} \tag{11}$$

由 (11) 式的第二式解得 $\gamma_1=\pi/2$, $\gamma_2=-\pi/2$, $\sin\gamma=-\|c_3\|^3\big/2$. 将 $\gamma_1=\pi/2$ 代入 (11) 的第一式，得

$$\|c_3\|^3-\|c_3\|^2-1=0. \tag{12}$$

由三次方程解的公式，方程 (12) 的正实根为

$$\|c_3\|=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{\frac{29+\sqrt{837}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{29-\sqrt{837}}{2}}+1), \tag{13}$$

上式 $\|c_3\|>1$, 可知该 B^3 位于原点到 B^2 (由 (8) 式可知 B^2 位于正 y 轴上) 中心连线的延长线上，以此类推在延长线上依次还有 $B^4,B^5,\dots,B^N$. 将 $\gamma_2=-\pi/2$ 代入 (11) 式的第一式，得

$$\|c_3\|^3+\|c_3\|^2+1=0, \tag{14}$$

方程 (14) 无正实根，故 $\gamma_2=-\pi/2$ 舍去. 再将 $\sin\gamma=-\|c_3\|^3\big/2$ 代入 (11) 式的第一式，可得

$$\|c_3\|^6+\|c_3\|^2-1=0. \tag{15}$$

令 $\|c_3\|^2=y$, 则上式可化为三次方程，解出该三次方程的正实根，即可求得

$$\|c_3\|=\sqrt{y}=(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}}})^{\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

上式 $\|c_3\|<1$, 将其代入 $\sin\gamma=-\|c_3\|^3\big/2$ 中，可求得

$$\gamma=\pm\arcsin[-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{31}{3}}})^{\frac{3}{2}}]. \tag{17}$$

由 (17) 式，可知还有关于正 y 轴对称在 B^2 里侧 (比 B^2 更靠近原点) 的两个 B^3, 即 B^2 有 3 个原像 B^3. 这说明 $\alpha=-2$ 的广义 M 集有 $|\alpha+1|=1$ 个 B^2, $|\alpha-1|=3$ 个 B^3.

依 (9) 式类推，可知 B^k 的中心坐标为

$$e^{i\phi}(\bar{c}_k)^\alpha+c_k=c_{k-1}. \tag{18}$$

由上述分析可推得 $\alpha=-\eta$ 的广义 M 集的 B^1 个数为 1, B^k 个数为 $\left|(\alpha-1)(\alpha+1)^{k-2}\right|$ $(k=2,3,\ldots,N)$. 这表明 $N\to\infty$ 时，即理论意义上的负整数阶的广义 J 集具有无穷嵌套的自相似几何结构.

2.2 $\alpha=-(\eta+\varepsilon)$

图 2 为 α 取负小数时的广义 M 集，它为 $\eta+1$ 个卫星群及一个卫星群胚胎环绕中央行星的不对称星群结构，并随 ε 的增大，卫星群胚胎不断生长而演化成为完整卫星群. 这一现象可解释为由复映射

$$z \leftarrow e^{i\phi}(\bar{z})^{\alpha}+c,\quad \alpha<0 \tag{19}$$

构造广义 M 集，对 $(\bar{z})^{\alpha}$ 的计算，采用了 DeMoivre 理论

$$(\bar{z})^{\alpha}=r^{\alpha}(\cos\alpha\theta-i\sin\alpha\theta), \tag{20}$$

这就涉及到相角 θ 主值范围的选取,作者选取 θ 的范围为以下四种情况：$[0,2\pi)$, $[-\pi,\pi)$, $[-3\pi/2,\pi/2)$ 和 $[-\pi/2,3\pi/2)$. 当 $\alpha=-\eta$ 时，将不会影响 (20) 式的使用，因

$$\begin{cases}\cos(\alpha\theta)=\cos(\alpha\theta+2\pi\alpha),\\ \sin(\alpha\theta)=\sin(\alpha\theta+2\pi\alpha),\end{cases} \tag{21}$$

但 $\alpha=-(\eta+\varepsilon)$ 时，则 (21) 式不成立，故 θ 范围的不同选取将导致广义 M 集的不同演化. 另外在使用 (20) 式时，若 $\alpha\theta$ 超出上述四种主值范围，就要使 $\alpha\theta$ 加或减 2π 的整数倍来进行调整，这就导致广义 M 集出现了错动和断裂，产生了部分卫星群. 对于负小数的 α 值，由式 (8) 可知一个完整的主要卫星 B^2 的中心的相角为 $(\phi-\pi)/(\alpha+1)$. 若 θ^+ 和 θ^- 分别表示含该 B^2 卫星群的所有点中的最大和最小相角，则 $\theta^{\pm}=(\phi-\pi)/(\alpha+1)\pm\pi/|\alpha+1|$. 又根据定理 1, 可利用该组完整的卫星群通过按顺时针或逆时针方向旋转 $|\alpha+1|-1$ 倍的 $2\pi/|\alpha+1|$ 弧度来获得广义 M 集的其余卫星群，而上述相角 θ 的选取在正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴处的不连续性，将不允许该卫星群通过正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴，这就导致穿过 x 或 y 轴 (在两个方向上) 的卫星群部分消失，出现了部分卫星群，且仅出现在相角 θ 不连续的正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴处，可见仅当 α 取负小数时部分卫星群才会出现. 下面作者以选取相角 $\theta\in[0,2\pi)$ 为例，来定量说明这一现象. 当某一组完整的卫星群穿过正 x 轴时，如果有正整数 m^+ 和 m^- 满足

1). $\theta^++2\pi m^+/|\alpha+1|>2\pi>\theta^-+2\pi m^+/|\alpha+1|$;

2). $\theta^--2\pi m^-/|\alpha+1|<0<\theta^+-2\pi m^-/|\alpha+1|$.

则将导致部分卫星群的出现. 对于情况 (1), 部分卫星群出现在正 x 轴下方到相角为 $(\theta^-+2\pi m^+/|\alpha+1|)$ 处；对于情况 (2), 部分卫星群出现在正 x 轴上方到相角为 $(\theta^+-2\pi m^-/|\alpha+1|)$ 处. 由 α 取负整数时作者对小卫星的讨论，可知对负小数的 α 值，部分卫星 B^2 经逆映射 f^{-1} 将产生较小的部分卫星 B^3, 小部分卫星经逆映射 f^{-1} 将产生更小部分卫星 $B^4\cdots$, 这样部分卫星 B^2 将导致它的无限阶次的原像小部分卫星 $B^k(k=3,4,\ldots,N)$ 的出现，这说明负小数阶的广义 J 集也具有无穷嵌套的自相似几何结构 [图 2(d)]. 同理我们可对相角选取为 $\theta\in[-3\pi/2,\pi/2)$, $\theta\in[-\pi,\pi)$ 和 $\theta\in[-\pi/2,3\pi/2)$ 的情况进行定量阐述.

3 结 论

1). 本文研究了一类复映射 $z\leftarrow e^{i\phi}(\bar{z})^{\alpha}+c\{\alpha<0,\phi\in[0,2\pi)\}$ 临界点的性质，给出了该复映射的广义 M 集的定义，并构造出一系列广义 M 集. 利用复变函数理论和计算机制图相结合

(a) $\alpha=-5.2, \theta \in[0,2\pi)$ (b) $\alpha=-5.5, \theta \in[0,2\pi)$ (c) $\alpha=-5.8, \theta \in[0,2\pi)$ (d) 图 a 方框区域的局部放大

(e) $\alpha=-5.2, \theta \in[-3\pi/2, \pi/2)$ (f) $\alpha=-5.5, \theta \in[-3\pi/2, \pi/2)$ (g) $\alpha=-5.8, \theta \in[-3\pi/2, \pi/2)$

(h) $\alpha=-5.2, \theta \in[-\pi, \pi)$ (i) $\alpha=-5.5, \theta \in[-\pi, \pi)$ (j) $\alpha=-5.8, \theta \in[-\pi, \pi)$

(k) $\alpha=-5.2, \theta \in[-\pi/2, 3\pi/2)$ (l) $\alpha=-5.5, \theta \in[-\pi/2, 3\pi/2)$ (m) $\alpha=-5.8, \theta \in[-\pi/2, 3\pi/2)$

图 2 负小数阶的广义 M 集

的实验数学的方法，对广义 M 集的结构和演化进行了研究，发现整数阶广义 M 集具有对称性和分形特征，小数阶广义 M 集出现了错动和断裂，且其演化过程依赖于相角主值范围的选取.

2). 本文发现该复映射的广义 M 集的几何结构与参数 α, R 和 ϕ 之间存在定量关系，但这

一工作仍然是不完整的，如 $\alpha < -2$ 时广义 M 集小卫星 B^k $(2 \le k \le N)$ 的形状、大小和位置，还需要在理论上严格求解.

参考文献：

[1] MANDELBROT B B. *The Fractal Geometry of Nature* [M]. San Fransisco: Freeman W H, 1982, 5–47.
[2] PEITGEN H O, SAUPE D. *The Science of Fractal Images* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988, 137–218.
[3] BARNSLEY M F. *Fractals Everywhere* [M]. Boston: Academic Press Professional, 1993, 26–109.
[4] 王兴元. 复杂非线性系统中的混沌 [M]. 北京：电子工业出版社， 2003, 91–113.
WANG Xing-yuan. *Chaos in the Complex Nonlinearity system* [M]. Beijing: Electronics Industry Press, 2003, 91–113. (in Chinese)
[5] 王兴元. 广义 M-J 集的分形机理 [M]. 大连：大连理工大学出版社， 2002, 1–58.
WANG Xing-yuan. *Fractal Mechanism of the Generalized M-J Set* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2002, 1–58. (in Chinese)
[6] LAKHTAKIA A, VARADAN V V, MESSIER R. et al. *On the symmetries of the Julia sets for the process* $z \Rightarrow z^p + c$ [J]. J. Phys. A, 1987, **20**(11): 3533–3535.
[7] GUJAR U G, BHAVSAR V C. *Fractals from* $z \leftarrow z^{\alpha} + c$ *in the complex c-plane* [J]. Computers & Graphics, 1991, **15**(3): 441–449.
[8] GLYNN E F. *The evolution of the Gingerbread Man* [J]. Computers & Graphics, 1991, **15**(4): 579–582.
[9] WANG Xing-yuan, LIU Xiang-dong, ZHU Wei-yong. et al. *Analysis of c-plane fractal images from* $z \leftarrow z^{\alpha} + c$ *for* $\alpha < 0$ [J]. Fractals, 2000, **8**(3): 307–314.
[10] 王兴元, 刘向东, 朱伟勇. 由复映射 $z \leftarrow z^{\alpha} + c$ $(\alpha < 0)$ 所构造的广义 M 集的研究 [J]. 数学物理学报， 1999, **19**(1): 73–79.
WANG Xing-yuan, LIU Xiang-dong, ZHU Wei-yong. *Researches on generalized Mandelbrot sets from complex mapping* $z \leftarrow z^{\alpha} + c$ $(\alpha < 0)$ [J]. Acta Math. Sci. (Chinese), 1999, **19**(1): 73–79. (in Chinese)
[11] PICKOVER C A. *Computers, Pattern, Chaos and Beauty* [M]. New York: St. Martin's Press, 1990, 43–105.
[12] HOOPER K J. *A note on some internal structures of the Mandelbrot set* [J]. Computers & Graphics, 1991, **15**(2): 295–297.
[13] PHILIP K W. *Field lines in the Mandelbrot set* [J]. Computers & Graphics, 1992, **16**(4): 443–447.
[14] LAKHTAKIA A. *Julia sets of switched processes* [J]. Computers & Graphics, 1991, **15**(4): 597–599.
[15] WANG Xing-yuan. *Fractal structures of the non-boundary region of the generalized Mandelbrot set* [J]. Progr. Natur. Sci., 2001, **11**(9): 693–700.
[16] WANG Xing-yuan. *Switched processes generalized Mandelbrot sets for complex index number* [J]. Appl. Math. Mech., 2003, **24**(1): 73–81.

Generalized Mandelbrot Sets from a Class of Complex Mapping $z \leftarrow e^{i\phi}(\bar{z})^{\alpha} + c(\alpha < 0)$

WANG Xing-yuan
(School of Electronic & Information Engineering, Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China)

Abstract: The nature of critical points from a class of complex mapping $z \leftarrow e^{i\phi}(\bar{z})^{\alpha} + c\{\alpha < 0, \phi \in [0, 2\pi)\}$ was analyzed, the definition of the generalized Mandelbrot sets was given, and a series of the generalized Mandelbrot sets for negative real index number were constructed. Using the experimental mathematics method and the theory of analytic function of one complex variable with computer aided drawing, the fractal features and evolution of the generalized Mandelbrot sets were studied. The results show: 1). The geometry structure of the generalized Mandelbrot sets depends on the parameters of α, R and the following ϕ; 2). The generalized Mandelbrot sets for integer index number have symmetry and fractal feature; 3). The generalized Mandelbrot sets for decimal index number have discontinuity and collapse, and their evolutions depend on the choice of the principal range of the phase angle.

Key words: a class of complex mapping; critical point; the generalized Mandelbrot sets; fractal; evolution.