第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0767-06 **文献标识码**: **A**

张量对称类上诱导线性算子的数值半径

刘 修 生
(黄石理工学院数理学院，湖北 黄石 435003)
(E-mail: lxs6682@163.com)

摘 要: 设 V 是一个 n 维线性空间， $V_\chi^m(G)$ 为 V 上的张量对称类. A 为 V 的线性算子 T 的矩阵， $K(A)$ 为 $V_\chi^m(G)$ 上的诱导线性算子 $K(T)$ 的矩阵. 本文从 $K(A)$ 的数值半径 $r(K(A))$ 和可分数值半径 $r_\chi(K(A))$ 定义出发，研究了 $r(K(A))$ 、 $r_\chi(K(A))$ 与范数 $\|A\|_p(1\le p\le 2)$ 、广义矩阵函数 $d_\chi^G(A)$ 的关系，得到了它们之间的两个不等式.

关键词: 张量对称类；诱导线性算子；数值半径.
MSC(2000): 15A45
中图分类: O151.2

1 张量对称类

设 V 是一个 n 维线性空间， G 是 m 次对称群 S_m 的一个子群， χ 是 G 一次不可约特征标. 在张量空间 $\otimes^m V$ 上，定义

$$T(G,\chi)(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(m)}.$$

易证 $T(G,\chi)$ 是 $\otimes^m V$ 上的一个线性算子. 它具有以下性质 [1]:

(1) $T(G,\chi)^2=T(G,\chi)$;

(2) $T(G,\chi)^*=T(G,\chi)$.

正因为如此，人们称 $T(G,\chi)(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)$ 为对称化子，记为 $v_1*v_2*\cdots*v_m$. 而称 $\otimes^m V$ 的子空间 $V_\chi^m(G)=T(G,\chi)(\otimes^m V)$ 为在 V 上的张量对称类.

对于任意一个作用在 V 上的线性算子 T, 则存在着惟一作用在 $V_\chi^m(G)$ 上的诱导线性算子 $K(T)$ 使

$$K(T)v_1*\cdots*v_m=Tv_1*\cdots*Tv_m.$$

设 $M_n(\mathbb{C})$ 是 n 阶复矩阵集合， $A\in M_n(\mathbb{C})$, 结合张量对称类，我们称

$$d_G^\chi(A)=\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

为广义矩阵函数.

收稿日期: 2005-06-01; **接受日期**: 2007-03-22
基金项目: 湖北省教委重点科研项目 (2004X157).

记

$$\Gamma_{m,n}=\{\alpha|\alpha=(\alpha(1),\alpha(2),\cdots,\alpha(m)),\quad 1\le\alpha(i)\le n,\quad i=1,2,\cdots,m\}.$$

对 $r=1,2,\cdots,n$ 和 $\alpha\in\Gamma_{m,n}$, 让 $m_r(\alpha)$ 表示整数 r 出现在 α 上的次数. 对于 $\alpha\in\Gamma_{m,n}$, 集合 $\Gamma_\alpha=\{\alpha\sigma|\sigma\in G\}$ 称为 $\Gamma_{m,n}$ 中包含 α 的 G 轨道或轨迹. 故 α,β 属于同一轨道当且仅当存在 $\sigma\in G$ 使 $\alpha=\beta\sigma$. 显然两个轨道或者重合或者不相交，因此 $\Gamma_{m,n}$ 可分解为若干个互不相交的轨道的并集.

现在我们把每个轨道中按字典排列的第一名挑出来组成一个集合，叫轨道代表集，记为 $\triangle$. 我们再定义

$$\overline{\triangle}=\{\omega:\omega\in\triangle,v(\omega)=\sum_{\sigma\in G_\omega}\chi(\sigma)\neq 0\}.$$

这里 G_ω 是 ω 的一个稳定子群，即 $G_\omega=\{\sigma:\sigma\in G,$ 且 $\omega\sigma=\omega\}$.

接下来看 $K(T)$ 的矩阵表示. 在本文中，我们总假设 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 是 V 的标准正交基. 我们可以证明，当 $\chi(e)=1$ 时，即 χ 为群 G 的主特征标， $\widetilde{E_*}=\{\sqrt{\frac{|G|}{|G_\alpha|}}e^*_\alpha:\alpha\in\overline{\triangle}\}$ 是 $V^m_\chi(G)$ 的标准正交基，其中 $e^*_\alpha=e_{\alpha_{(1)}}*e_{\alpha_{(2)}}*\cdots*e_{\alpha_{(m)}}$. 此时诱导线性算子 $K(T)$ 在 $\widetilde{E_*}$ 的矩阵称为诱导矩阵，记为 $K(A)$. 显然 $K(A)$ 是 $|\overline{\triangle}|\times|\overline{\triangle}|$ 矩阵，且满足 [2]

$$K(A)x_1*x_2*\cdots*x_m=Ax_1*Ax_2*\cdots*Ax_m.$$

2 矩阵数值半径与可分数值半径

我们引进文献 [2] 的概念.

设 $A\in M_n(\mathbb{C})$, 称 $W(A)=\{(Ax,x):(x,x)=1,x\in\mathbb{C}^n\}$ 为矩阵 A 的数值域，而称 $r(A)=\max\{|\eta|:\eta\in W(A)\}$ 为矩阵 A 的数值半径. 进一步地，称 $W_\chi(A)=\{(K(A)x^*,x^*):x^*$ 是一个可分解的单位张量 $\}$ 为矩阵 A 的可分解数值域，而称 $r_\chi(A)=\max\{|\eta|:\eta\in W_\chi(A)\}$ 为矩阵 A 的可分解数值半径.

众所周知，上述概念已在纯粹数学与应用数学中得到了广泛的应用.

对于诱导矩阵 $K(A)$, 由于可分解单位张量是 $V^m_\chi(G)$ 中的单位张量, 所以有 $W_\chi(A)\subseteq W(K(A))$. 因此 $r_\chi(A)\le r(K(A))$.

我们还需要下面概念.

设 $x\in\mathbb{C}^n,A\in M_n(\mathbb{C})$, 我们分别称 $\|x\|_p=(\sum_{i=1}^n|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ 与 $\|A\|_p=\max\{\|Ax\|_p:\|x\|_p=1\}$ 为向量 x 与矩阵 A 的 l_p- 范数，其中 $1\le p\le+\infty$.

3 矩阵不等式

在给出主要结果之前，我们需要如下引理

引理 3.1[3] (1) 若 $x_i\in\mathbb{C}^n,i=1,2,\ldots,s$, 则 $\|x_1\otimes\cdots\otimes x_s\|_p=\prod_{i=1}^s\|x_i\|_p$;

(2) 若 $A_i\in M_n(\mathbb{C}),i=1,2,\ldots,s$, 则 $\|A_1\otimes\cdots\otimes A_s\|_p=\prod_{i=1}^s\|A_i\|_p$.

引理 3.2[1] 设 χ 是群 G 的任意特征标，则对于任意 $\sigma\in G$, 有 $|\chi(\sigma)|\le\chi(e)$.

引理 3.3 设 $A_i \in M_n(\mathbb{C}), x_i \in \mathbb{C}^n$ 且 $\|x_i\|_p = 1, i = 1, 2, \ldots, m$, 则

$$\|A_1x_1 * \cdots * A_mx_m\|_p \leq \prod_{i=1}^{m} \|A_ix_i\|_p \leq \prod_{i=1}^{m} \|A_i\|.$$

证明 由定义

$$A_1x_1 * \cdots * A_mx_m = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) A_{\sigma^{-1}(1)} x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes A_{\sigma^{-1}(m)} x_{\sigma^{-1}(m)}.$$

这里 G 是 m 次对称群 S_m 的一个子群， χ 是一次不可约特征标. 因此

$$\begin{aligned}
\|A_1x_1 * \cdots * A_mx_m\|_p &= \frac{1}{|G|} \| \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) A_{\sigma^{-1}(1)} x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes A_{\sigma^{-1}(m)} x_{\sigma^{-1}(m)} \|_p \\
&\leq \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |\chi(\sigma)| \left\| A_{\sigma^{-1}(1)} x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes A_{\sigma^{-1}(m)} x_{\sigma^{-1}(m)} \right\|_p \\
&\leq \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \left\| A_{\sigma^{-1}(1)} x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes A_{\sigma^{-1}(m)} x_{\sigma^{-1}(m)} \right\|_p \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \prod_{i=1}^{m} \left\| A_{\sigma^{-1}(i)} x_{\sigma^{-1}(i)} \right\|_p = \prod_{i=1}^{m} \|A_ix_i\|_p \leq \prod_{i=1}^{m} \|A_i\|_p .
\end{aligned}$$

引理 3.4[4] 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 $\frac{1}{2}\|A\|_2 \leq r(A) \leq \|A\|_2$.

为了方便读者，我们给出引理 3.4 的证明.

证明 先证右半边不等式. 由定义及 Schwarz 不等式可得

$$r(A) = \max\{|(Ax, x)| : \|x\|_2 = 1\} \leq \max\{\|Ax\|_2\|x\|_2 : \|x\|_2 = 1\} = \|A\|_2.$$

再证左半边不等式. 因为

$$4(Ax, y) = (A(x + y), x + y) - (A(x - y), x - y) + i(A(x + iy), x + iy) - i(A(x - iy), x - iy),$$

且

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2,$$

又由于

$$r(A) = \max\{|(Ax, x)| : \|x\|_2 = 1\} = \max\{|(A\frac{v}{\|v\|_2}, \frac{v}{\|v\|_2})| : v \in \mathbb{C}\} \geq \frac{1}{\|v\|_2}|(Av, v)|,$$

所以

$$\begin{aligned}
4|(Ax, y)| &\leq r(A)(\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 + \|x + iy\|_2^2 + \|x - iy\|_2^2) \\
&\leq 4r(A)(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2),
\end{aligned}$$

因此

$$\max\{|(Ax, y)| : \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1\} \leq 2r(A).$$

取 $y=\frac{1}{\|Ax\|_2}Ax$, 则 $\|y\|_2=1$. 此时, $|(Ax,y)|=\|Ax\|_2$. 故 $\|A\|_2\le 2r(A)$. 即 $r(A)\ge\frac{1}{2}\|A\|_2$.

引理 3.5 设 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 是 n 维线性空间 V 的标准正交基, 令 $x_1=\sqrt{|G|}e_1,x_2=e_2,\ldots,x_n=e_n$, 记 $x^*=x_1*\cdots*x_n$, 则 $\|x^*\|_2^2=(x^*,x^*)=1$.

证明 由内积的定义, 有

$$\begin{aligned}\|x^*\|_2^2=(x^*,x^*)=&\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\rho\in G}\chi(\sigma)\overline{\chi(\rho)}(e_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\sigma^{-1}(n)},e_{\rho^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\rho^{-1}(n)})\\=&\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\rho\in G}\chi(\sigma)\overline{\chi(\rho)}\prod_{i=1}^{m}(e_{\sigma^{-1}(i)},e_{\rho^{-1}(i)})\\=&\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\overline{\chi(\sigma)}\prod_{i=1}^{m}(e_{\sigma^{-1}(i)},e_{\sigma^{-1}(i)})\\=&\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\chi(\sigma^{-1})=1.\end{aligned}$$

引理 3.6[5] 设 $A_k=(a_{ij}^k)_{m_k\times n_k},B_k=(b_{ij}^k)_{p_k\times q_k},k=1,2,\ldots,s$, 则

$$(A_1B_1)\otimes(A_2B_2)\otimes\cdots\otimes(A_sB_s)=(A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_s)(B_1\otimes B_2\otimes\cdots\otimes B_s).$$

定理 3.1 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$. 则

$$\frac{1}{2}|\det(A)|^{\frac{m}{n}}\le r(K(A))\le\sum_{\alpha\in\overline{\triangle}}\sqrt{\frac{|G|}{|G_\alpha|}}\|A\|_p^m.$$

其中 $1\le p\le 2$.

证明 先证左半边不等式. 由引理 3.4, 有

$$\begin{aligned}r(K(A))&\ge\frac{1}{2}\|K(A)\|_2\ge\frac{1}{2}\rho(K(A))=\frac{1}{2}\rho(A)^m\\&\ge\frac{1}{2}|\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n|^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{2}|\det(A)|^{\frac{m}{n}}.\end{aligned}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 为矩阵 A 的全部特征值.

再证右半边不等式. 因为

$$r(K(A))\le\|K(A)\|_2=\max\{\|K(A)x\|_2:\|x\|_2=1,x\in V_\chi^m(G)\},$$

显然存在 $x_0\in V_\chi^m(G)$, 且 $\|x_0\|_2=1$, 使

$$\max\{\|K(A)x\|_2:\|x\|_2=1,x\in V_\chi^m(G)\}=\|K(A)x_0\|_2,$$

令 $x_0=\sum_{\alpha\in\overline{\triangle}}C_\alpha\sqrt{\frac{|G|}{|G_\alpha|}}e_\alpha^*$, 其中 $\sqrt{\sum_{\alpha\in\overline{\triangle}}C_\alpha^2}=1$, 则

$$r(K(A))\le\|K(A)\|_2\le\|K(A)x_0\|_2=\|K(A)\sum_{\alpha\in\overline{\triangle}}C_\alpha\sqrt{\frac{|G|}{|G_\alpha|}}e_\alpha^*\|_2$$

$$\leq \sum_{\alpha\in\overline{\triangle}} \|C_\alpha\sqrt{\frac{|G|}{|G_\alpha|}}K(A)e_\alpha^*\|_2 \leq \sum_{\alpha\in\overline{\triangle}} |C_\alpha|\sqrt{\frac{|G|}{|G_\alpha|}}\,\|A\|_2^m$$
$$\leq \sum_{\alpha\in\overline{\triangle}} \sqrt{\frac{|G|}{|G_\alpha|}}\,\|A\|_2^m \leq \sum_{\alpha\in\overline{\triangle}} \sqrt{\frac{|G|}{|G_\alpha|}}\,\|A\|_p^m\,,$$

其中 $1\leq p\leq 2$.

定理 3.2 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$, 在 $V_\chi^m(G)$ 中取 $m=n$, 则 $|d_\chi^G(A)|\leq r_\chi(A)\leq \|A\|_p^n$, 其中 $1\leq p\leq 2$.

证明 第一步证明： $r_\chi(A)\leq \|A\|_p^n$, 这里 $1\leq p\leq 2$.

事实上，由定义及 Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned} r_\chi(A) &= \max\{|\eta| : \eta\in W_\chi(A)\} = \max\{|(K(A)x^*, x^*)| : \|x^*\|_2 = 1\} \\ &\leq \max\{\|K(A)x^*\|_2\|x^*\|_2 : \|x^*\|_2 = 1\} \\ &= \max\{\|K(A)x^*\|_2 : \|x^*\|_2 = 1\}. \end{aligned}$$

显然存在 $u^* = x_1 * \cdots * x_n = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)(x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma^{-1}(n)})$, 且

$$\|u^*\|_2 = \|\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)(x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma^{-1}(n)})\|_2 = 1,$$

使 $r_\chi(A) = \max\{\|K(A)x^*\|_2 : \|x^*\|_2 = 1\} = \|K(A)u^*\|_2$. 于是

$$\begin{aligned} r_\chi(A) &\leq \max\{\|K(A)x^*\|_2 : \|x^*\|_2 = 1\} \\ &= \|K(A)u^*\|_2 = \|Ax_1 * \cdots * Ax_n\|_2 \\ &= \|\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)(Ax_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes Ax_{\sigma^{-1}(n)})\|_2 \\ &= \|\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)(\otimes^n A)(x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma^{-1}(n)})\|_2 \\ &= \|(\otimes^n A)\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)(x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma^{-1}(n)})\|_2 \\ &\leq \|\otimes^n A\|_2\|\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)(x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma^{-1}(n)})\|_2 \\ &= \|A\|_2^n \leq \|A\|_p^n, \end{aligned}$$

这里 $1\leq p\leq 2$.

第二步证明： $|d_\chi^G(A)|\leq r_\chi(K(A))$.

取 $y^* = \sqrt{|G|}e_1 * e_2 * \cdots * e_n$, 由引理 3.5 知 $\|y^*\|_2 = 1$. 于是

$$\begin{aligned} r_\chi(A) &= \max\{|\eta| : \eta\in W_\chi(A)\} = \max\{|(K(A)x^*, x^*)| : \|x^*\|_2 = 1\} \\ &\geq |(K(A)y^*, y^*)| = |(K(A)\sqrt{|G|}e_1 * e_2 * \cdots * e_n, \sqrt{|G|}e_1 * e_2 * \cdots * e_n)| \\ &= \overline{|(\sqrt{|G|}e_1 * e_2 * \cdots * e_n, K(A)\sqrt{|G|}e_1 * e_2 * \cdots * e_n)|} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ||G|(e_1 * e_2 * \cdots * e_n, Ae_1 * Ae_2 * \cdots * Ae_n)| \\
&= |G||(e_1 \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_n, \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)Ae_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes Ae_{\sigma^{-1}(n)})| \\
&= |\sum_{\sigma\in G}\overline{\chi(\sigma)}(e_1 \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_n, Ae_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes Ae_{\sigma^{-1}(n)})| \\
&= |\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\prod_{i=1}^{n}(e_i, Ae_{\sigma^{-1}(i)})| = |\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(e_i, Ae_{\sigma(i)})| \\
&= |\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(A^*e_i, e_{\sigma(i)})| = |\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(A^*)_{\sigma(i),i}| \\
&= |d_\chi^G(A)|.
\end{aligned}
$$

所以定理得证. □

致谢 作者对 LI. C K 教授的帮助表示衷心感谢！

参考文献:

[1] 王伯英. 多重线性代数 [M]. 北京：北京师范大学出版社， 1985.
WANG Bo-ying. *Multilinear Algebra* [M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1985. (in Chinese)

[2] LI C K. *The decomposable numerical radius and numerical radius of a compound matrix* [J]. Linear Algebra Appl., 1986, **76**: 45–58.

[3] BHATIA R, ELSNER L. *On the variation of permanents* [J]. Linear and Multilinear Algebra, 1990, **27**(2): 105–109.

[4] GOLDBERG M, TADMOR E. *On the numerical radius and its applications* [J]. Linear Algebra Appl., 1982, **42**: 263–284.

[5] 程云鹏，张凯院. 矩阵论 [M]. 西安：西北工业大学出版社， 2000.
CHENG Yun-peng, ZHANG Kai-yuan. *Theory of Matrix* [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2000. (in Chinese)

Numerical Radius of Induced Operators on Symmetry Classes of Tensors

LIU Xiu-sheng
(School of Mathematics and Physics, Huangshi College of Technology, Hubei 435003, China)

Abstract: Let V be an n-dimensional linear space and $V_\chi^m(G)$ be a subspace of $\otimes^m V$, called the symmetry class of tensors over V associated with G and χ. Suppose A is a matrix of the linear operator T acting on V and $K(A)$ is a matrix of the induced operator $K(T)$ acting on $V_\chi^m(G)$. Form definition of the numerical radius $r(K(A))$ and decomposable numerical radius $r_\chi(A)$, two matrix inequalities involving the numerical radius $r(K(A))$, the decomposable numerical radius $r_\chi(A)$, the norm $\|A\|_2$ and the generalized matrix function $d_\chi^G(A)$ are obtained.

Key words: symmetry class of tensors; induced operator; numerical radius.