第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0773-08 **文献标识码**: **A**

一个对偶的 Hardy-Hilbert 不等式

杨必成
(广东教育学院数学系，广东 广州 510303)
(E-mail: bcyang@pub.guangzhou.gd.cn)

摘 要: 建立一个对偶的 Hardy-Hilbert 不等式, 它是 Hilbert 不等式的具有最佳常数因子的 (p,q)-参数形式的推广. 本文还考虑了它的更一般的推广形式及等价形式.

关键词: Hardy-Hilbert 不等式；对偶；权系数； Hölder 不等式； β 函数.
MSC(2000): 26D15
中图分类: O178

1 引 言

设 $a_n, b_n \geq 0$, 使得 $0 < \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$ 及 $0 < \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 < \infty$, 则有如下著名的 Hilbert 不等式 [1]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+1} < \pi\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\sum_{n=0}^{\infty}b_n^2\Big\}^{1/2}, \tag{1.1}$$

这里，常数因子 π 是最佳值.

不等式 (1.1) 已由杨必成 [2] 作多参数的推广，并由高明哲 [3] 作出加强. 在理论及应用方面，还有如下经典的 (1.1) 式的 (p,q)- 参数形式的推广式 [1]:

若 $a_n, b_n \geq 0$, $p > 1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $0 < \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p < \infty$ 及 $0 < \sum_{n=0}^{\infty} b_n^q < \infty$, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+1} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}a_n^p\Big\}^{1/p}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}b_n^q\Big\}^{1/q}, \tag{1.2}$$

这里，常数因子 $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ 是最佳值. 它的等价形式是 [4]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{m+n+1}\Big)^p < \Big[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\Big]^p\sum_{n=0}^{\infty}a_n^p, \tag{1.3}$$

这里，常数因子 $[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}]^p$ 仍是最佳值.

显然，当 $p=q=2$ 时，不等式 (1.2) 化为 (1.1). (1.2) 式以 Hardy-Hilbert 不等式著称，它在分析学有重要的应用 [5].

近年，由于建立了权系数 $\omega_1(r,n)$ $(n \in N_0, r > 1)$ 的如下不等式:

$$\omega_1(r,n) = \left(n+\frac{1}{2}\right)^{(1-\frac{1}{r})}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+1/2)^{\frac{1}{r}-1}}{m+n+1} < \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{r})} - \frac{\ln 2-\gamma}{(2n+1)^{1+\frac{1}{r}}}, \tag{1.4}$$

收稿日期: 2005-03-28; **接受日期**: 2005-07-19
基金项目: 广东高校自然科学基金重点研究项目 (05Z026); 广东教育学院教授、博士科研基金.

杨必成 [6] 给出了 (1.2) 式的如下加强式:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+1}<\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}-\frac{\ln 2-\gamma}{(2n+1)^{1+\frac{1}{p}}}\right]a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\times$$
$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}-\frac{\ln 2-\gamma}{(2n+1)^{1+\frac{1}{q}}}\right]b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}},\tag{1.5}$$

这里, $\ln 2-\gamma=0.1159315^{+}$ ($\gamma=0.57721567^{+}$ 是 Euler 常数). 还有与 (1.5) 式不能比较强弱的另一 (1.2) 的加强式 [7].

在引入参数 λ 及 β 函数的情形下, 杨必成等 [4] 给出 (1.1) 式的一个推广式:

若 $2-\min\{p,q\}<\lambda\leq 2, 0<\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{1-\lambda}a_n^p<\infty$ 及 $0<\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{1-\lambda}b_n^q<\infty$, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n+1)^{\lambda}}<k_{\lambda}(p)\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{1-\lambda}a_n^p\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{1-\lambda}b_n^q\}^{\frac{1}{q}},\tag{1.6}$$

这里, 常数因子 $k_{\lambda}(p)=B(\frac{p+\lambda-2}{p},\frac{q+\lambda-2}{q})$ 是最佳值, ($B(u,v)$ 是 β 函数). 当 $\lambda=1$ 时, 不等式 (1.6) 变为 (1.2).

本文的主要目的是通过估算如下定义的权系数:

$$\omega_{\lambda}(r,n)=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\lambda(1-\frac{1}{r})}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+1/2)^{\frac{\lambda}{r}-1}}{(m+n+1)^{\lambda}}(n\in N_0, r>1, 0<\lambda\leq r),\tag{1.7}$$

导出联系二重级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n+1)^{\lambda}}$ 的具有最佳常数因子的 (1.1) 的推广式,它不同于 (1.6) 及 (1.2) 式 (当 $\lambda=1$ 时). 作为应用, 考虑了推广式的等价形式. 在本文的一些特殊结果中, 包括了对偶的 Hardy-Hilbert 不等式及其等价式.

为此, 先介绍若干引理.

2 若干引理

首先, 介绍 β 函数的如下公式 [8]:

$$B(u,v)=\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+t)^{u+v}}t^{-1+u}\mathrm{d}t=B(v,u)\quad(u,v>0),\tag{2.1}$$

及级数的如下估值不等式 [4,9]:

若 $f^{(4)}\in C[0,\infty)$, $\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x<\infty$, 及 $(-1)^n f^{(n)}(x)>0, f^{(n)}(\infty)=0$ $(n=0,1,2,3,4)$, 则

$$\sum_{m=0}^{\infty}f(m)<\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}f(0)-\frac{1}{12}f'(0).\tag{2.2}$$

引理 2.1 若 $n\in N_0=N\cup\{0\}, r>1, 0<\lambda\leq r$, 定义 $R_{\lambda}(r,n)$ 为

$$R_{\lambda}(r,n)=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{(x+n+1)^{\lambda}}(x+\frac{1}{2})^{\frac{\lambda}{r}-1}\mathrm{d}x-\frac{4r-\lambda}{3r}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\lambda}2^{\lambda/r}}-\frac{\lambda}{6(n+1)^{\lambda+1}2^{\lambda/r}}.\tag{2.3}$$

则有 $R_\lambda(r,n) > 0$.

证明 分步积分得

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{(x+n+1)^\lambda}(x+\frac{1}{2})^{\frac{\lambda}{r}-1}\mathrm{d}x = \frac{r}{\lambda}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{(x+n+1)^\lambda}\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})^{\frac{\lambda}{r}} \\
&= \frac{r}{\lambda}\cdot\frac{1}{(x+n+1)^\lambda}(x+\frac{1}{2})^{\frac{\lambda}{r}}|_{-\frac{1}{2}}^{0} + r\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{(x+n+1)^{\lambda+1}}(x+\frac{1}{2})^{\frac{\lambda}{r}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{r}{\lambda}\cdot\frac{1}{(n+1)^\lambda 2^{\lambda/r}} + \frac{r^2}{\lambda+r}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{(x+n+1)^{\lambda+1}}\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})^{\frac{\lambda}{r}+1} \\
&> \frac{r}{\lambda(n+1)^\lambda 2^{\lambda/r}} + \frac{r^2}{2(\lambda+r)(n+1)^{\lambda+1}2^{\lambda/r}}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

由 (2.3) 式，因 $r>1$ 及 $0<\lambda\le r$, 有

$$\begin{aligned}
R_\lambda(r,n) &> \left[\frac{r}{\lambda}-\frac{4r-\lambda}{3r}\right]\frac{1}{(n+1)^\lambda 2^{\lambda/r}} + \left[\frac{r^2}{2(\lambda+r)}-\frac{\lambda}{6}\right]\frac{1}{(n+1)^{\lambda+1}2^{\lambda/r}} \\
&= \frac{(r-\lambda)(3r-\lambda)}{3r\lambda(n+1)^\lambda 2^{\lambda/r}} + \frac{3r^2-\lambda r-\lambda^2}{6(\lambda+r)(n+1)^{\lambda+1}2^{\lambda/r}} > 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

引理 2.2 若 $n\in N_0, r>1, 0<\lambda\le r$, $\omega_\lambda(r,n)$ 由 (1.7) 式所定义，则有如下不等式：

$$\omega_\lambda(r,n) < B\left(\frac{\lambda}{r}, \lambda(1-\frac{1}{r})\right). \tag{2.6}$$

证明 固定 n. 设函数

$$f(x) = \frac{1}{(x+n+1)^\lambda}(x+\frac{1}{2})^{\frac{\lambda}{r}-1}, \quad x\in(-\frac{1}{2},\infty).$$

由 (2.2) 式，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+n+1)^\lambda}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\lambda}{r}-1} < \int_0^\infty \frac{1}{(x+n+1)^\lambda}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\lambda}{r}-1}\mathrm{d}x + \\
&\quad \frac{1}{(n+1)^\lambda 2^{\lambda/r}} + \frac{1}{12}\left[\frac{2\lambda}{(n+1)^{\lambda+1}2^{\lambda/r}} + \frac{r-\lambda}{r}\cdot\frac{4}{(n+1)^\lambda 2^{\lambda/r}}\right] \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{1}{(x+n+1)^\lambda}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\lambda}{r}-1}\mathrm{d}x - \\
&\quad \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{(x+n+1)^\lambda}(x+\frac{1}{2})^{\frac{\lambda}{r}-1}\mathrm{d}x - \frac{4r-\lambda}{3r(n+1)^\lambda 2^{\lambda/r}} - \frac{\lambda}{6(n+1)^{\lambda+1}2^{\lambda/r}}\right].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

作变换 $u=(x+\frac{1}{2})/(n+\frac{1}{2})$, 由 (2.1) 式，可得

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{1}{(x+n+1)^\lambda}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\lambda}{r}-1}\mathrm{d}x &= \left(n+\frac{1}{2}\right)^{\lambda(\frac{1}{r}-1)}\int_0^\infty \frac{u^{-1+\lambda/r}}{(1+u)^\lambda}\mathrm{d}u \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)^{\lambda(\frac{1}{r}-1)} B\left(\frac{\lambda}{r}, \lambda(1-\frac{1}{r})\right).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

因而由 (2.7),(2.8) 及 (2.3) 式，有

$$\omega_\lambda(r,n) < B\left(\frac{\lambda}{r}, \lambda(1-\frac{1}{r})\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)^{\lambda(1-\frac{1}{r})} R_\lambda(r,n).$$

再由引理 2.1, 可得 (2.6) 式. □

引理 2.3 若 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 0<\lambda\le\min\{p,q\}$, 及 $0<\varepsilon<\lambda$, 则有

$$\begin{aligned} I &:= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+n+1)^\lambda}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\lambda-p-\varepsilon}{p}}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\lambda-q-\varepsilon}{q}} \\ &> \frac{2^\varepsilon}{\varepsilon}B\left(\frac{\lambda-\varepsilon}{q}, \frac{\lambda}{p}+\frac{\varepsilon}{q}\right) - \frac{2^\varepsilon q^2}{(\lambda-\varepsilon)(\lambda-\varepsilon+q\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

证明 由条件，有 $\frac{\lambda-r-\varepsilon}{r}<0\ (r=p,q)$, 及 $\lambda-\varepsilon>0$. 作变换 $u=(y+\frac{1}{2})/(x+\frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned} I &> \int_0^\infty \left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\lambda-p-\varepsilon}{p}}\left[\int_0^\infty \frac{1}{(x+y+1)^\lambda}(y+\frac{1}{2})^{\frac{\lambda-q-\varepsilon}{q}}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \left(x+\frac{1}{2}\right)^{-1-\varepsilon}\left[\int_{\frac{1}{2x+1}}^\infty \frac{1}{(1+u)^\lambda}u^{\frac{\lambda-\varepsilon}{q}-1}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \left(x+\frac{1}{2}\right)^{-1-\varepsilon}\left[\int_0^\infty \frac{u^{\frac{\lambda-\varepsilon}{q}-1}}{(1+u)^\lambda}\mathrm{d}u - \int_0^{\frac{1}{2x+1}} \frac{u^{\frac{\lambda-\varepsilon}{q}-1}}{(1+u)^\lambda}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x \\ &> \frac{2^\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{\lambda-\varepsilon}{q}-1}}{(1+u)^\lambda}\mathrm{d}u - \int_0^\infty \left(x+\frac{1}{2}\right)^{-1-\varepsilon}[\int_0^{\frac{1}{2x+1}} u^{\frac{\lambda-\varepsilon}{q}-1}\mathrm{d}u]\mathrm{d}x \\ &= \frac{2^\varepsilon}{\varepsilon}B\left(\frac{\lambda-\varepsilon}{q}, \frac{\lambda}{p}+\frac{\varepsilon}{q}\right) - \frac{2^\varepsilon q^2}{(\lambda-\varepsilon)(\lambda-\varepsilon+q\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

3 主要结果及应用

定理 3.1 若 $a_n, b_n\ge 0$, $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $0<\lambda\le\min\{p,q\}$, 及

$$0<\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{p-1-\lambda}a_n^p<\infty,\quad 0<\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{q-1-\lambda}b_n^q<\infty,$$

则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n+1)^\lambda} < B\left(\frac{\lambda}{p}, \frac{\lambda}{q}\right)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{p-1-\lambda}a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{q-1-\lambda}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{3.1}$$

这里，常数因子 $B\left(\frac{\lambda}{p}, \frac{\lambda}{q}\right)$ 是最佳值. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+1} < \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{p-2}a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{q-2}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{3.2}$$

这里，常数因子 $\pi/\sin(\pi/p)$ 仍是最佳值.

证明 由 Hölder 不等式及 (1.7) 式 (当 $r=p,q$ 时), 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n+1)^{\lambda}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{a_m}{(m+n+1)^{\lambda/p}}\cdot\frac{(m+1/2)^{(p-\lambda)/pq}}{(n+1/2)^{(q-\lambda)/pq}}\right]\times \\
&\quad \left[\frac{b_n}{(m+n+1)^{\lambda/q}}\cdot\frac{(n+1/2)^{(q-\lambda)/pq}}{(m+1/2)^{(p-\lambda)/pq}}\right] \\
&\le \left\{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_m^p}{(m+n+1)^{\lambda}}\cdot\frac{(m+\frac{1}{2})^{\frac{p-\lambda}{q}}}{(n+\frac{1}{2})^{\frac{q-\lambda}{q}}}\right\}^{\frac{1}{p}}\times \\
&\quad \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_n^q}{(m+n+1)^{\lambda}}\cdot\frac{(n+\frac{1}{2})^{\frac{q-\lambda}{p}}}{(m+\frac{1}{2})^{\frac{p-\lambda}{p}}}\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\{\sum_{m=0}^{\infty}\omega_{\lambda}(q,m)(m+\frac{1}{2})^{p-1-\lambda}a_m^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{\lambda}(p,n)(n+\frac{1}{2})^{q-1-\lambda}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

因而由 (2.6) 式，又由于 $\omega_{\lambda}(r,n)<B(\lambda/p,\lambda/q)$ $(r=p,q)$, 有 (3.1) 式.

对于 $0<\varepsilon<\lambda$, 置 $\widetilde{a}_m$, $\widetilde{b}_n$ 为：

$$\widetilde{a}_m=\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\lambda-p-\varepsilon}{p}},\widetilde{b}_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\lambda-q-\varepsilon}{q}},\quad m,n\in N_0.$$

则有

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{p-1-\lambda}\widetilde{a}_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{q-1-\lambda}\widetilde{b}_n^q\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1-\varepsilon}=2^{1+\varepsilon}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1-\varepsilon} \\
&<2^{1+\varepsilon}+\int_0^{\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-1-\varepsilon}dx=2^{1+\varepsilon}+\frac{2^{\varepsilon}}{\varepsilon}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

若存在正的参数 $\lambda(\le\min\{p,q\})$, 使得不等式 (3.1) 的常数因子不是最佳值，则有正数 $K<B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)$，使当 $B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)$ 换成 K 时， (3.1) 式仍成立．特别有

$$\varepsilon I=\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\widetilde{a}_m\widetilde{b}_n}{(m+n+1)^{\lambda}}<\varepsilon k\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{p-1-\lambda}\widetilde{a}_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{q-1-\lambda}\widetilde{b}_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.5)$$

由 (2.9) 及 (3.4) 式，可得

$$2^{\varepsilon}B\left(\frac{\lambda-\varepsilon}{q},\frac{\lambda}{p}+\frac{\varepsilon}{q}\right)-\varepsilon\frac{2^{\varepsilon}q^2}{(\lambda-\varepsilon)(\lambda-\varepsilon+q\varepsilon)}<K(\varepsilon 2^{1+\varepsilon}+2^{\varepsilon}).$$

在上式中令 $\varepsilon\to 0^{+}$, 可得 $B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)<K$. 这与 $K<B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)$ 构成矛盾．因而 (3.1) 式的常数因子 $B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)$ 对任何正的参数 $\lambda(\le\min\{p,q\})$ 都是最佳值. □

评注 3.2 1). 当 $p=q=2$ 及 $\lambda=1$ 时，不等式 (3.1) 变成 (1.1) 式. 这说明 (3.1) 是 (1.1) 式的新的推广，但不同于 (1.6) 式.

2). 由于 (3.2) 与 (1.2) 式的条件及形式不同，显然 (3.1) 不是 (1.2) 式的推广.

3). 由 (3.3) 式，当 $\lambda=1$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+1}\le\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\omega_1(q,m)(m+\frac{1}{2})^{p-2}a_m^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\omega_1(p,n)(n+\frac{1}{2})^{q-2}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

因而由 (1.4) 式，有如下 (3.2) 式的加强式:

推论 3.3 若 $a_n,b_n\ge 0$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\gamma=0.57721567^+$ 是 Euler 常数， $0<\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{p-2}a_n^p<\infty$, $0<\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{q-2}b_n^q<\infty$, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+1}<\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}-\frac{\ln 2-\gamma}{(2n+1)^{1+\frac{1}{p}}}\right]\left(n+\frac{1}{2}\right)^{p-2}a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\times$$
$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}-\frac{\ln 2-\gamma}{(2n+1)^{1+\frac{1}{q}}}\right]\left(n+\frac{1}{2}\right)^{q-2}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{3.6}$$

定理 3.4 若 $a_n\ge 0, p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 0<\lambda\le\min\{p,q\}$, 及 $0<\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{p-1-\lambda}a_n^p<\infty$, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{\lambda(p-1)-1}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n+1)^{\lambda}}\right]^p<\left[B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)\right]^p\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{p-1-\lambda}a_n^p, \tag{3.7}$$

这里，常数因子 $\left[B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)\right]^p$ 是最佳值. 不等式 (3.7) 等价于 (3.1). 特别地，当 $\lambda=1$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{p-2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{m+n+1}\right)^p<\left[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\right]^p\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{p-2}a_n^p, \tag{3.8}$$

这里，常数因子 $[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}]^p$ 仍是最佳值.

证明 因 $0<\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{p-1-\lambda}a_n^p<\infty$, 故有 $k_0\in N_0$, 对任意 $k\ge k_0$, 成立 $0<\sum_{n=0}^{k}(n+\frac{1}{2})^{p-1-\lambda}a_n^p<\infty$. 置

$$b_n(k):=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\lambda(p-1)-1}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{a_m}{(m+n+1)^{\lambda}}\right]^{p-1}, k\ge k_0,$$

并由 (3.1) 式求得

$$0<\sum_{n=0}^{k}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{q-1-\lambda}b_n^q(k)$$
$$=\sum_{n=0}^{k}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\lambda(p-1)-1}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{a_m}{(m+n+1)^{\lambda}}\right]^p=\sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{k}\frac{a_m b_n(k)}{(m+n+1)^{\lambda}}$$

$$< B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)\left\{\sum_{n=0}^{k}(n+\frac{1}{2})^{p-1-\lambda}a_n^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=0}^{k}(n+\frac{1}{2})^{q-1-\lambda}b_n^q(k)\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{3.9}$$

因而有

$$\left[\sum_{n=0}^{k}\ (n+\frac{1}{2})^{q-1-\lambda}b_n^q(k)\right]^{\frac{1}{p}} < B\left(\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda}{q}\right)\sum_{n=0}^{k}(n+\frac{1}{2})^{p-1-\lambda}a_n^p. \tag{3.10}$$

这说明 $0<\sum_{n=0}^{\infty}\ (n+\frac{1}{2})^{q-1-\lambda}b_n^q(\infty)<\infty$. 故当 $k\to\infty$ 时，仍由 (3.1) 式，知 (3.9) 式为真；(3.10) 式亦然．因而不等式 (3.7) 成立.

我们已由 (3.1) 式推证出 (3.7) 式．为证等价性，下面由 (3.7) 式推证 (3.1) 式.

由 Hölder′ 不等式，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n+1)^{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\frac{1}{2})^{(\lambda+1-q)/q}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n+1)^{\lambda}}\right]\left[(n+\frac{1}{2})^{(q-1-\lambda)/q}b_n\right]$$

$$\leq \left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{\lambda(p-1)-1}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n+1)^{\lambda}}\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})^{q-1-\lambda}b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{3.11}$$

再由 (3.7) 式，可得 (3.1) 式.

若 (3.7) 式的常数因子不是最佳的，则由 (3.11) 式，易知 (3.1) 式的常数因子也不是最佳的．这个矛盾说明 (3.7) 式的常数因子是最佳的. □

评注 3.5 i). 不等式 (3.2) 显然也是 (1.1) 式的类似于 Hardy-Hilbert 不等式 (1.2) 的 (p,q)-参数形式的最佳推广．称 (3.2) 式为 (1.2) 式的对偶不等式．当然，等价地，亦可称 (3.8) 式为 (1.3) 式的对偶不等式.

ii). 基于对这类对偶性的认识，它有助于猜想并证明不少已知的双线型不等式的对偶形式．例如，由于已知如下 Hardy-Hilbert 积分不等式及其等价式 [1]:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\left\{\int_0^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^{\infty}g^q(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}; \tag{3.12}$$

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x+y}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y < \left[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\right]^p\int_0^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x. \tag{3.13}$$

易由本文提供的形式及方法推证得其相应的对偶不等式是：

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\left\{\int_0^{\infty}x^{p-2}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^{\infty}x^{q-2}g^q(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}; \tag{3.14}$$

$$\int_0^{\infty}y^{p-2}\left(\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x+y}\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y < \left[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\right]^p\int_0^{\infty}x^{p-2}f^p(x)\mathrm{d}x, \tag{3.15}$$

且以上不等式的常数因子都是最佳值．当然，对偶不等式的条件起了一定程度的变化.

iii). 产生对偶性的主要原因应是 β 函数的对称性.

参考文献：

[1] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. *Inequalities* [M]. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.

[2] YANG Bi-cheng. *On a generalization of Hilbert's double series theorem* [J]. Math. Inequal. Appl., 2002, **5**(2): 197–204.
[3] GAO Ming-zhe, WEI Shong-rong, HE Le-ping. *On the Hilbert inequality with weights* [J]. Z. Anal. Anwendungen, 2002, **21**(1): 257–263.
[4] YANG Bi-cheng, DEBNATH Lokenath. *On a new generalization of Hardy-Hilbert's inequality and its applications* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1999, **233**(2): 484–497.
[5] MITRINOVIC D S, PECARIC J E, FINK A M. *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives* [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.
[6] 杨必成. 较为精密的 Hardy-Hilbert 不等式的一个加强 [J]. 数学学报， 1999, **42**(6): 1103–1110.
YANG Bi-cheng. *On a strengthened version of the more precise Hardy-Hilbert inequality* [J]. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 1999, **42**(6): 1103–1110. (in Chinese)
[7] YANG Bi-cheng. *On a strengthened Hardy-Hilbert inequality* [J]. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math., 2000, **1**(2): 22.
[8] 王竹溪，郭敦仁. 特殊函数论 [M]. 北京：科学出版社， 1979.
WANG Zhu-xi, GUO Dun-ren. *An Introduction to Special Functions* [M]. Beijing: Science Press, 1979. (in Chinese)
[9] KUANG Ji-chang, DEBNATH L. *On new generalizations of Hilbert's inequality and their applications* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2000, **245**(1): 248–265.

A Dual Hardy-Hilbert's Inequality and Generalizations

YANG Bi-cheng
(Department of Mathematics, Guangdong Institute of Education, Guangdong 510303, China)

Abstract: This paper gives a dual Hardy-Hilbert's inequality with a best constant factor, which is a new extension of Hilbert's inequality with (p,q)-parameter form. We also consider its more extended form and an equivalent inequality with a single parameter.

Key words: Hardy-Hilbert's inequality; dual; weight coefficient; Hölder's inequality; β function.