文章编号: 1000-341X(2007)04-0814-05 文献标识码: A

代数体函数的唯一性定理

甘会林[1], 孙道椿[2]
(1. 广东商学院数学与计算科学系, 广东 广州 510320; 2. 华南师范大学数学科学学院, 广东 广州 510631)
(E-mail: ganhuilin2003@tom.com)

摘 要: 本文研究了代数体函数的唯一性问题, 推广了某些已有结果.

关键词: 代数体函数; 唯一性; 公共值.
MSC(2000): 30D35
中图分类: O175.25; O174.55

1 引 言

设 $w(z)$ 和 $\hat{w}(z)$ 分别是由不可约方程

$$\psi(z,w)=A_\nu(z)w^\nu+A_{\nu-1}(z)w^{\nu-1}+\cdots+A_0(z)=0 \tag{1}$$

和

$$\varphi(z,\hat{w})=B_\mu(z)\hat{w}^\mu+B_{\mu-1}(z)\hat{w}^{\mu-1}+\cdots+B_0(z)=0 \tag{2}$$

所确定的 ν 值和 μ 值代数体函数, 其中 $A_j(z)$ $(j=0,1,\ldots,\nu)$ 和 $B_j(z)(j=0,1,\ldots,\mu)$ 为整函数, 且不在一点同时为零. 不失一般性, 我们设 $\mu\le\nu$. 对任意 $a\in\hat{C}$, 令 $\overline{n}_0(r,a)$ 表示 $w(z)=a$ 和 $\hat{w}(z)=a$ 在圆 $|z|<r$ 内公共值点数, 且每一值点只计算一次. 再令

$$\overline{N}_0(r,a)=\frac{\mu+\nu}{2\mu\nu}\int_0^r\frac{\overline{n}_0(t,a)-\overline{n}_0(0,a)}{t}\mathrm{d}t+\overline{n}_0(0,a)\log r$$

及

$$\overline{N}_{12}(r,a)=\overline{N}(r,\frac{1}{w-a})+\overline{N}(r,\frac{1}{\hat{w}-a})-2\overline{N}_0(r,a).$$

此外, 我们将直接引用文献 [1] 中的符号和术语, 如 $m(r,w),N(r,w),T(r,w),\overline{N}(r,w),S(r,w)$ 等, 并用 $\overline{E}(a,w)$ 表示 $w(z)-a$ 的零点集合 ($a=\infty$ 时为 $w(z)$ 的极点集合), 每个零点 (极点) 仅计算一次.

关于代数体函数的唯一性问题, 已有一些结果 [1−4]. 本文将文献 [1] 中的若干定理作了推广, 得到更好的结论.

2 主要结果及其证明

引理 1 设 $w(z)$ 和 $\hat{w}(z)$ 分别为由 (1) 和 (2) 确定的 ν 值和 μ 值代数体函数, 满足下述条件 (简记为 (C)):

收稿日期: 2005-05-11; **接受日期**: 2006-07-02
基金项目: 国家自然科学基金 (10471048).

(C): $A_\nu(0)\neq 0, B_\mu(0)\neq 0, w(0)$ 与 $\hat{w}(0)$ 无公共值.

若 $w(z)\not\equiv\hat{w}(z)$, 则

$$\sum\overline{N}_0(r,a)\leq\frac{\mu+\nu}{2}[T(r,w)+T(r,\hat{w})]+O(1).$$

证明 设 $w(z)\not\equiv\hat{w}(z)$, 则

$$\sum\overline{n}_0(r,a)\leq n(r,\frac{1}{R(\psi,\varphi)}).\tag{3}$$

其中 $R(\psi,\varphi)$ 是 $\psi(z,w)$ 和 $\varphi(z,w)$ 的结式 [1, P_{36}]; 即

$$R(\psi,\varphi)=[A_\nu(z)]^\mu[B_\mu(z)]^\nu\prod_{1\leq j\leq\nu,1\leq k\leq\mu}[w_j(z)-\hat{w}_k(z)].$$

由 Jensen 公式,

$$\begin{aligned}N(r,\frac{1}{R(\psi,\varphi)})&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|R(\psi,\varphi)|\mathrm{d}\theta+\log|\frac{1}{R(\psi,\varphi)}|_{z=0}\\&=\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|A_\nu(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta+\frac{\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|B_\mu(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta+\\&\quad\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\prod_{1\leq j\leq\nu,1\leq k\leq\mu}[w_j(re^{i\theta})-\hat{w}_k(re^{i\theta})]|\mathrm{d}\theta+O(1)\\&\leq\mu\nu[T(r,w)+T(r,\hat{w})]+O(1).\end{aligned}\tag{4}$$

由 (3) 式以及条件 (C), 有

$$\sum\overline{N}_0(r,a)\leq\frac{\mu+\nu}{2\mu\nu}N(r,\frac{1}{R(\psi,\varphi)}).$$

结合 (4) 式知引理 1 成立.

注 1 实际上, 条件 (C) 可以去掉, 只须作一个变换即可. 例如, 假设有 $A_\nu(0)=0, B_\mu(0)=0, w(0)$ 与 $\hat{w}(0)$ 有公共值，因为总可以找到一点 $z_0\in C$, 使得 $A_\nu(z_0)\neq 0, B_\mu(z_0)\neq 0, w(z_0)$ 与 $\hat{w}(z_0)$ 无公共值，并令

$$\begin{aligned}\psi^*(z,w^*)&=\psi(z+z_0,w)=A_\nu(z+z_0)w^\nu+A_{\nu-1}(z+z_0)w^{\nu-1}+\cdots+A_0(z+z_0)\\&=A_\nu^*(z)w^{*\nu}+A_{\nu-1}^*(z)w^{*(\nu-1)}+\cdots+A_0^*(z)=0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\varphi^*(z,\hat{w}^*)&=\varphi(z+z_0,\hat{w})=B_\mu(z+z_0)\hat{w}^\mu+B_{\mu-1}(z+z_0)\hat{w}^{\mu-1}+\cdots+B_0(z+z_0)\\&=B_\mu^*(z)\hat{w}^{*\mu}+B_{\mu-1}^*(z)\hat{w}^{*(\mu-1)}+\cdots+B_0^*(z)=0,\end{aligned}$$

则 $A_\nu^*(0)=A_\nu(z_0)\neq 0, B_\mu^*(0)=B_\mu(z_0)\neq 0$,$w^*(0)=w(z_0)$ 与 $\hat{w}^*(0)=\hat{w}(z_0)$ 无公共值，故 $w^*(z)=w(z+z_0)$ 和 $\hat{w}^*(z)=\hat{w}(z+z_0)$ 满足引理 1 的条件，因而有

$$\sum\overline{N}_0(r,a)\leq\frac{\mu+\nu}{2}[T(r,w^*)+T(r,\hat{w}^*)]+O(1)=\frac{\mu+\nu}{2}[T(r,w)+T(r,\hat{w})]+O(1).$$

以下定理 2 至定理 4 保留条件 (C) 是为了证明的简洁流畅，实际上可同上引理去掉它，即通过证明 $w(z+z_0)\equiv\hat{w}(z+z_0)$ 得到 $w(z)\equiv\hat{w}(z)$.

由引理 1 立即得

引理 2 设 $w(z)$ 和 $\hat{w}(z)$ 分别为由 (1) 和 (2) 式确定的 ν 值和 μ 值代数体函数，若 $w(z)\not\equiv\hat{w}(z)$, 则

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\sum\overline{N}_0(r,a)}{T(r,w)+T(r,\hat{w})}\le\frac{\mu+\nu}{2}.$$

由引理 2 可得下述唯一性定理：

定理 1 设 $w(z)$ 和 $\hat{w}(z)$ 分别为由 (1) 和 (2) 式确定的 ν 值和 μ 值代数体函数，若

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\sum\overline{N}_0(r,a)}{T(r,w)+T(r,\hat{w})}>\frac{\mu+\nu}{2},$$

则 $w(z)\equiv\hat{w}(z)$.

下述定理 2 改进了文献 [1] 中定理 2.33.

定理 2 设 $w(z)$ 和 $\hat{w}(z)$ 分别为由 (1) 和 (2) 式确定的 ν 值和 μ 值代数体函数，满足条件 (C). 若 $a_j\in\hat{C}(j=1,2,\ldots,4\nu+1)$ 是互相判别的复数且不为 $w(0)$ 的值，使得

$$\overline{E}(a_j,w)\subseteq\overline{E}(a_j,\hat{w}),\quad j=1,2,\ldots,4\nu+1 \tag{5}$$

和

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{w-a_j})/\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{\hat{w}-a_j})>\frac{\mu(2\nu+1)}{(4\nu-2\mu+1)(2\nu-\mu+1)}, \tag{6}$$

则 $w(z)\equiv\hat{w}(z)$.

注 2 若 $\mu=\nu$, 则 (6) 式简化为

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{w-a_j})/\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{\hat{w}-a_j})>\frac{\nu}{\nu+1}.$$

定理 2 的证明 由代数体函数第二基本定理得

$$(2\nu+1)T(r,w)<\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{w-a_j})+S(r,w), \tag{7}$$

$$(4\nu+1-2\mu)T(r,\hat{w})<\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{\hat{w}-a_j})+S(r,\hat{w}). \tag{8}$$

于是

$$\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{w-a_j})=O(T(r,w)), \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{\hat{w}-a_j})=O(T(r,\hat{w})). \tag{10}$$

假设 $w(z)\not\equiv\hat{w}(z)$, 由 (5) 式知

$$\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{n}(r,\frac{1}{w-a_j})\leq\sum\overline{n}_0(r,a).$$

结合条件 (C) 以及 $w(0)$ 不取值 a_j $(j=1,2,\ldots,4\nu+1)$, 得

$$\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{w-a_j})\leq\frac{2\mu}{\mu+\nu}\sum\overline{N}_0(r,a).$$

再由引理 1 得

$$\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{w-a_j})\leq\mu[T(r,w)+T(r,\hat{w})]+O(1).$$

由 (7), (8) 式，并考虑 (9), (10) 式得

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{w-a_j})\\&\quad\leq\mu[\frac{1}{2\nu+1}+o(1)]\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{w-a_j})+\mu[\frac{1}{4\nu+1-2\mu}+o(1)]\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{\hat{w}-a_j}).\end{aligned}$$

于是

$$[1-\frac{\mu}{2\nu+1}+o(1)]\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{w-a_j})\leq[\frac{\mu}{4\nu+1-2\mu}+o(1)]\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{\hat{w}-a_j}).$$

所以

$$\varliminf_{r\to\infty}\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{w-a_j})/\sum_{j=1}^{4\nu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{\hat{w}-a_j})\leq\frac{\frac{\mu}{4\nu+1-2\mu}}{1-\frac{\mu}{2\nu+1}}=\frac{\mu(2\nu+1)}{(4\nu-2\mu+1)(2\nu-\mu+1)}.$$

但这与 (6) 式矛盾，因此 $w(z)\equiv\hat{w}(z)$.

仿定理 2 的证明可以得下面结果.

定理 3 设 $w(z)$ 和 $\hat{w}(z)$ 分别为由 (1) 和 (2) 式确定的 ν 值和 μ 值代数体函数，满足条件 (C). 若 $a_j\in\hat{C}$ $(j=1,2,\ldots,3\nu+\mu+1)$ 是互相判别的复数且不为 $w(0)$ 的值，使得

$$\overline{E}(a_j,w)\subseteq\overline{E}(a_j,\hat{w}),\quad j=1,2,\ldots,3\nu+\mu+1$$

和

$$\varliminf_{r\to\infty}\sum_{j=1}^{3\nu+\mu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{w-a_j})/\sum_{j=1}^{3\nu+\mu+1}\overline{N}(r,\frac{1}{\hat{w}-a_j})>\frac{\mu(\nu+\mu+1)}{(3\nu-\mu+1)(\nu+1)},$$

则 $w(z)\equiv\hat{w}(z)$.

在叙述定理 4 之前，我们先给出一些符号的含义. 设 $w(z)$ 为 ν 值代数体函数， γ 为某个正整数，令 $n^{\gamma)}(r,\frac{1}{w-a})$ 表示 $w(z)$ 的重级不大于 γ 的 a 值点个数，若不计其重数，则记为

$\overline{n}^{\gamma)}(r,\frac{1}{w-a})$. 相应的密指量记为 $N^{\gamma)}(r,\frac{1}{w-a})$ 和 $\overline{N}^{\gamma)}(r,\frac{1}{w-a})$. 设 γ_k $(k=1,2,\ldots,p)$ 是正整数, 则代数体函数的第二基本定理可改写为 [1,P109]

$$(\sum_{k=1}^{p}\frac{\gamma_k}{\gamma_k+1}-2\nu)T(r,w)<\sum_{k=1}^{p}\frac{\gamma_k}{\gamma_k+1}\overline{N}^{\gamma_k)}(r,\frac{1}{w-a_k})+S(r,w). \tag{11}$$

下述定理 4 推广了文献 [1] 中的定理 2.34.

定理 4 设 $w(z)$ 和 $\hat{w}(z)$ 分别为由 (1) 和 (2) 式确定的 ν 值和 μ 值代数体函数, 满足条件 (C). γ_j $(j=1,2,\ldots,p)$ 是正整数, $a_j\in\hat{C}$ $(j=1,2,\ldots,p)$ 是互相判别的复数且不为 $w(0)$ 的值或为 $w(0)$ 的重级大于 γ_j 的值. 令 $\overline{E}^{\gamma_j}(a_j,w)$ 表示 $w(z)-a_j$ 的零点集, 其重级不大于 γ_j 者, 每一值点只计算一次, 高于 γ_j 者略去不计. $\overline{E}^{\gamma_j}(a_j,\hat{w})$ 表示 $\hat{w}(z)-a_j$ 的相应零点集. 若

(i)

$$\overline{E}^{\gamma_j}(a_j,w)\subseteq\overline{E}^{\gamma_j}(a_j,\hat{w});$$

(ii)

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{\gamma_j}{\gamma_j+1}-2\nu-\mu>0;$$

(iii)

$$\varliminf_{r\to\infty}\sum_{j=1}^{p}\frac{\gamma_j}{\gamma_j+1}\overline{N}^{\gamma_j)}(r,\frac{1}{w-a_j})/\sum_{j=1}^{p}\frac{\gamma_j}{\gamma_j+1}\overline{N}^{\gamma_j)}(r,\frac{1}{\hat{w}-a_j})>\frac{\mu}{\sum_{j=1}^{p}\frac{\gamma_j}{\gamma_j+1}-2\nu-\mu},$$

则 $w(z)\equiv\hat{w}(z)$.

证明 从 (11) 式出发, 类似定理 2 证明即可证得.

参考文献:

[1] 何育赞, 肖修治. 代数体函数与常微分方程 [M]. 北京: 科学出版社, 1988.
HE Yu-zan, XIAO Xiu-zhi. *Algebroid Functions and Ordinary Equations* [M]. Beijing: Science Press, 1988. (in Chinese)

[2] LI Chun-hong. *The unique problem of algebroidal function* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1996, **16**(2): 179–184.

[3] 涂振汉, 肖修治. 关于一类一般型代数体函数的唯一性定理 [J]. 应用数学, 1997, **10**(1): 13–16.
TU Zhen-han, XIAO Xiu-zhi. *A unicity theorem for a class of algebroid functions of general type* [J]. Math. Appl. (Wuhan), 1997, **10**(1): 13–16. (in Chinese)

[4] 方明亮. 代数体函数的唯一性定理 [J]. 数学学报, 1993, **36**(2): 217–222.
FANG Ming-liang. *Unicity theorems for algebroid functions* [J]. Acta Math. Sinica, 1993, **36**(2): 217–222. (in Chinese)

A Uniqueness Theorem of Algebroid Functions

GAN Hui-lin[1], *SUN Dao-chun*[2]

(1. Dept. of Math. & Comput. Sci., Guangdong University of Business Studies, Guangdong 510320, China;
2. School of Mathematical Science, South China Normal University, Guangdong 510631, China)

Abstract: In this paper we investigate the uniqueness problem of algebroid functions, and generalize some results in Ref. [1].

Key words: algebroid function; unicity theorem; common value.