文章编号: 1000-341X(2007)04-0819-07 **文献标识码**: **A**

一类微分方程系统正平衡解的存在性与全局稳定性

刘婧， 马雁
(大连海事大学数学系，辽宁 大连 116026)
(E-mail: Lj650720@sina.com)

摘 要: 本文研究了一个自治的非线性微分方程系统，得到了系统正平衡点存在唯一的充分条件，通过伸缩变换法讨论了正平衡点局部稳定性，并运用构造 Liapunov 函数方法得到了它的全局渐近稳定性.

关键词: 食物链模型；正平衡点；伸缩变换； Liapunov 函数；全局渐近稳定.
MSC(2000): 34D23
中图分类: O175.14

1 引 言

自然环境中存在着大量食物链模型的生态系统，对其进行研究具有很强的现实意义和生物意义. 密度均匀的食物链模型通常可由一个自治的常微分方程组描述 [1].

本文讨论一个由三种群组成的单食物链模型，特别地对食饵种群和被捕食种群加入了线性密度制约项，使得这两种群的相对增长受环境的制约，其数学模型 (无量纲化后) 为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx(1-x) - \dfrac{b_1 x}{1+a_1 x} y_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_1(-d_1 - y_1 + \dfrac{c_1 b_1 x}{1+a_1 x} - \dfrac{b_2 y_2}{1+a_2 y_1}), \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = y_2(-d_2 + \dfrac{c_2 b_2 y_1}{1+a_2 y_1}). \end{cases} \tag{1}$$

且初值为 $x(0) \geq 0$, $y_1(0) \geq 0$, $y_2(0) \geq 0$. 其中 $x(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ 分别代表食饵种群，被捕食种群及捕食种群的密度. $1-x$ 为食饵种群 x 的增长率. $b_1x/(1+a_1x)$ 和 $b_2y_1/(1+a_2y_1)$ 称为 Holling-II 型功能反应函数，分别表示被捕食种群 y_1 对食饵种群 x 的捕食能力和捕食种群 y_2 对被捕食种群 y_1 的捕食能力. r 表示食饵种群 x 的内禀增长率, c_1, d_1 和 c_2, d_2 分别表示 y_1, y_2 的消耗率和死亡率. $r, a_1, a_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ 均为正常数.

运用定性分析的方法研究生态系统解的性质是一个热门课题. 文献 [2] 通过构造 Liapunov 函数的方法研究了由三种群组成的竞争模型的解的全局性质，得出了该竞争系统全局稳定的充分条件. 文献 [3] 研究了时变环境下 Chemostat 中微生物连续培养单食物链模型，用单特征值分歧定理得到了模型共存周期解存在的条件并运用 Crandall-Rabinowitz 定理证明了单种群分歧解的局部稳定性. 文献 [4] 研究了具有线性密度制约项的捕食 - 被捕食模型，建立了系统解的渐近行为与参数之间的关系. 文献 [5] 用常微分方程的定性理论分析了一类变消耗率的单食物链模

收稿日期: 2006-11-07; **接受日期**: 2007-03-23
基金项目: 辽宁省教育厅高等学校科学研究项目 (2005078).

型，研究了微生物共存与环境参数之间的关系．文献 [6] 提出具有比率依赖的单食物链模型，讨论了系统解的渐近行为．本文对系统 (1) 进行定性分析，得到了系统解的有界性及正平衡点存在唯一的充分条件；利用伸缩变换法讨论了正平衡点的局部渐近稳定性，并通过构造 Liapunov 函数方法得到了正平衡点全局渐近稳定的结论．

2 基本结果

由模型的实际生物意义，下面我们只在区域 $R_+^3=\{(x,y_1,y_2)|x\ge 0,y_1\ge 0,y_2\ge 0\}$ 上讨论系统 (1)．

引理 2.1 当 t 充分大时系统 (1) 的任一从 R_+^3 出发的解是有界的．

证明 由系统 (1) 的第一个方程知 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\le rx(1-x)$，所以对 $\forall\varepsilon>0$，当 t 充分大时，有 $x(t)\le 1+\varepsilon$．又因为

$$\begin{aligned}(c_1x+y_1+\frac{y_2}{c_2})'&\le c_1rx-d_1y_1-\frac{d_2y_2}{c_2}\le c_1rx-\min\{d_1,d_2\}(y_1+\frac{y_2}{c_2})\\&\le\xi-\min\{d_1,d_2\}(c_1x+y_1+\frac{y_2}{c_2}),\end{aligned}$$

其中 $\xi=c_1(r+\min\{d_1,d_2\})(1+\varepsilon)$．所以当 t 充分大时，有 $c_1x+y_1+\frac{y_2}{c_2}\le\frac{\xi}{\min\{d_1,d_2\}}+\varepsilon$．即系统 (1) 的任一从 R_+^3 出发的解是有界的． □

该引理表明，当食饵种群和被捕食种群受密度制约时，它们的密度始终保持有限数，显然能养活的捕食者种群的密度必将是有限的．由该引理知食饵 x 的环境容纳量为 1．

引理 2.2 如果 $c_1b_1-a_1d_1\le 0$，则 $\lim_{t\to\infty}y_1(t)=0$，于是 $\lim_{t\to\infty}y_2(t)=0$．如果 $c_2b_2-a_2d_2\le 0$，则 $\lim_{t\to\infty}y_2(t)=0$．

证明 将系统 (1) 的第二个方程改写为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=\frac{y_1}{(1+a_1x)(1+a_2y_1)}\{&-a_2(1+a_1x)y_1^2-[(a_1-a_2(c_1b_1-a_1d_1))x+(a_2d_1+1)]y_1-\\&b_2(1+a_1x)y_2+((c_1b_1-a_1d_1)x-d_1)\}.\end{aligned}\tag{2}$$

当 $c_1b_1-a_1d_1\le 0$ 时，由 (2) 式得 $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}\le 0$，因此 $\lim_{t\to\infty}y_1(t)=0$；进而由第三个方程知 $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\le 0$，于是 $\lim_{t\to\infty}y_2(t)=0$．

将系统 (1) 的第三个方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=\frac{y_2}{1+a_2y_1}((c_2b_2-a_2d_2)y_1-d_2).\tag{3}$$

当 $c_2b_2-a_2d_2\le 0$ 时，由式 (3) 得 $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\le 0$，于是 $\lim_{t\to\infty}y_2(t)=0$． □

该引理表明，若 $c_1b_1-a_1d_1\le 0$，则 y_1 种群灭绝，从而导致 y_2 种群灭绝．这一条件恰好体现了单食物链模型的特点．若 $c_2b_2-a_2d_2\le 0$，则 $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\le 0$，于是 y_2 种群灭绝，这与 y_1 存活与否无关．由该引理知，为使捕食种群得以存活，在以后的讨论中我们均假设 $c_ib_i-a_id_i>0$，$i=1,2$．

系统 (1) 显然有平衡点 $O(0,0,0),E_0(1,0,0)$．其中 $O(0,0,0)$ 是一个双曲鞍点，不稳定．平衡点 $E_0(1,0,0)$ 的稳定性由下面引理得到．

引理 2.3 如果 $\frac{d_1}{c_1b_1-a_1d_1}<1$, 则平衡点 $E_0(1,0,0)$ 是双曲鞍点, 不稳定. 如果 $\frac{d_1}{c_1b_1-a_1d_1}>1$, 则平衡点 $E_0(1,0,0)$ 是局部渐近稳定的，且在 R^3_+ 上是全局渐近稳定的.

证明 经计算，系统 (1) 在平衡点 $E_0(1,0,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_0)=\begin{pmatrix} -r & -\frac{b_1}{1+a_1} & 0 \\ 0 & -d_1+\frac{c_1b_1}{1+a_1} & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 \end{pmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1=-r<0,\ \lambda_2=-d_2<0,\ \lambda_3=-d_1+\frac{c_1b_1}{1+a_1}$. 当 $\frac{d_1}{c_1b_1-a_1d_1}<1$ 时， $\lambda_3>0$, 此时平衡点 E_0 不稳定. 而当 $\frac{d_1}{c_1b_1-a_1d_1}>1$ 时， $\lambda_3<0$, 此时平衡点 E_0 是局部渐近稳定的.

构造 Liapunov 函数 $V(x,y_1,y_2)=x-1-\ln x+c(c_2y_1+y_2)$, 其中 c 是待定的正常数. 当 $0<x\le 1,\ y_1\ge 0,\ y_2\ge 0$ 时，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&\le -r(1-x)^2+\frac{b_1+cc_2(c_1b_1-a_1d_1)x-cc_2d_1}{1+a_1x}y_1+cy_2(-d_2)\\&\le -r(1-x)^2+\frac{b_1-cc_2(d_1-(c_1b_1-a_1d_1))}{1+a_1x}y_1-cd_2y_2.\end{aligned}$$

取 $c>\frac{b_1}{c_2(d_1-(c_1b_1-a_1d_1))}$, 则由上式 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\le 0$; 并且 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 当且仅当 $x=1,\ y_1=0,\ y_2=0$. 因此平衡点 $E_0(1,0,0)$ 在 R^3_+ 上是全局渐近稳定的. □

经简单计算知，当 $\frac{d_1}{c_1b_1-a_1d_1}<1$ 时，系统 (1) 有平衡点 $E_1(x_1,w_1,0)$, $x_1<1$. 其中 x_1,w_1 分别满足

$$\frac{r}{b_1}(1-x)(1+a_1x)-\frac{c_1b_1x}{1+a_1x}+d_1=0,$$

$$w_1=\frac{r}{b_1}(1-x_1)(1+a_1x_1)=-d_1+\frac{c_1b_1x_1}{1+a_1x_1}.$$

关于平衡点 $E_1(x_1,w_1,0)$ 的稳定性由下面引理给出.

引理 2.4 设 $w_1<\frac{d_2}{c_2b_2-a_2d_2}$. 若 $a_1\le 1$, 那么存在一个正数 u_0, 使得当 $x_1<u_0$ 时，平衡点 $E_1(x_1,w_1,0)$ 是不稳定的；当 $x_1>u_0$ 时，平衡点 $E_1(x_1,w_1,0)$ 是局部渐近稳定的，此时它在 R^3_+ 上是全局渐近稳定的.

证明 系统 (1) 在平衡点 $E_1(x_1,w_1,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_1)=\begin{pmatrix} r-2rx_1-\frac{b_1w_1}{(1+a_1x_1)^2} & -\frac{b_1x_1}{1+a_1x_1} & 0 \\ \frac{c_1b_1w_1}{(1+a_1x_1)^2} & -w_1 & -\frac{b_2w_1}{1+a_2w_1} \\ 0 & 0 & -d_2+\frac{c_2b_2w_1}{1+a_2w_1} \end{pmatrix},$$

其特征方程为 $(\lambda-(-d_2+\frac{c_2b_2w_1}{1+a_2w_1}))(\lambda^2-A_1\lambda+B_1)=0$. 这里 $A_1=\frac{f(x_1)}{1+a_1x_1}$, 而

$$f(x)=-2ra_1x^2+(r(a_1-1)-(c_1b_1-a_1d_1))x+d_1, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}B_1&=-x_1w_1(-r+\frac{a_1b_1w_1}{(1+a_1x_1)^2})+\frac{c_1b_1^2x_1w_1}{(1+a_1x_1)^3}\\&=\frac{rx_1w_1}{(1+a_1x_1)^3}(2a_1^3x_1^3+a_1^2(5-a_1)x_1^2+2a_1(2-a_1)x_1+(1-a_1+\frac{c_1b_1^2}{r})).\end{aligned}\tag{5}$$

由 (5) 式，当 $a_1\le 1$ 时，对一切 $x_1>0,\ w_1>0$ 均有 $B_1>0$. 由 (4) 式，对一切 $x>0$, 均有 $f'(x)<0$, 所以仅存在一个正数 u_0, 使得 $f(u_0)=0$, 且对 $\forall x<u_0,\ f(x)<0$; $\forall x>u_0,\ f(x)>0$.

于是当 $x_1 < u_0$ 时， $A_1 > 0$, 所以特征值 λ_2, λ_3 的实部大于零，由文献 [7] 知，此时平衡点 E_1 是不稳定的；而当 $x_1 > u_0$ 时， $A_1 < 0$, 于是特征值 λ_2, λ_3 的实部小于零. 又因为特征方程有特征根 $\lambda_1 = -d_2 + \frac{c_2 b_2 w_1}{1+a_2 w_1}$, 且当 $w_1 < \frac{d_2}{c_2 b_2 - a_2 d_2}$ 时， $\lambda_1 < 0$. 因此平衡点 E_1 是局部渐近稳定的.

下面证明 E_1 的全局渐近稳定性. 令 $s_1 = \frac{1}{(1+a_1 x)(1+a_1 x_1)}$, 显然 $s_1 < 1$. 构造 Liapunov 函数如下

$$V(x, y_1, y_2) = (x - x_1 - x_1 \ln \frac{x}{x_1}) + n_1(y_1 - w_1 - w_1 \ln \frac{y_1}{w_1}) + n_2 y_2, \tag{6}$$

其中 n_1, n_2 为待定的正常数. (6) 式关于 t 求导得 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = P_1 + Q_1 + R_1$, 其中

$$\begin{aligned}
P_1 &= (x - x_1)^2(-r + s_1 a_1 b_1 w_1) - s_1 b_1 (1 + a_1 x_1)(x - x_1)(y_1 - w_1), \\
Q_1 &= -n_1(y_1 - w_1)^2 + n_1 s_1 c_1 b_1 (x - x_1)(y_1 - w_1) - n_1 s_2 b_2 (1 + a_2 w_1)(y_1 - w_1) y_2, \\
R_1 &= n_2 s_2 c_2 b_2 (y_1 - w_1) y_2.
\end{aligned}$$

取 $n_1 = \frac{1}{c_1}(1 + a_1 x_1)$, $n_2 = \frac{1}{c_1 c_2}(1 + a_1 x_1)(1 + a_2 w_1)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = (x - x_1)^2(-r + s_1 a_1 b_1 w_1) - n_1(y_1 - w_1)^2 \le (x - x_1)^2(-r + s_1 a_1 b_1 w_1).$$

由 $s_1 < 1$, $a_1 \le 1$ 及 $w_1 = \frac{r}{b_1}(1 - x_1)(1 + a_1 x_1)$, 有 $s_1 a_1 b_1 w_1 \le r(1 - x_1)(1 + a_1 x_1)$. 又因为 $(1 - x_1)(1 + a_1 x_1) < 1$, 所以有 $s_1 a_1 b_1 w_1 < r$, 于是 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < 0$ 并且 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$ 当且仅当 $x = x_1$, $y_1 = w_1$, $y_2 = 0$. 因此系统 (1) 的平衡点 E_1 在 R_+^3 上是全局渐近稳定的. □

3 正平衡点的存在性及稳定性分析

定理 3.1 若 $a_1 \le 1$ 且 $\frac{d_2}{c_2 b_2 - a_2 d_2} < \min\{\frac{r}{b_1}, \frac{(c_1 b_1 - a_1 d_1)(\Delta - r(1 - a_1)) - 2 r a_1 d_1}{a_1 (c_1 b_1 - a_1 d_1)((\Delta + r a_1)^2 - r^2)}\}$, 则系统 (1) 存在唯一的正平衡点 $E^*(x^*, y_1^*, y_2^*)$, 其中 $\Delta = \sqrt{r^2(1 - a_1)^2 - 4 r a_1 (\frac{b_1 d_2}{c_2 b_2 - a_2 d_2} - r)} > 0$.

证明 由系统 (1) 的第三个方程得 $y_1^* = \frac{d_2}{c_2 b_2 - a_2 d_2}$, 将其代入系统 (1) 的第一个方程整理后得

$$r a_1 x^2 + r(1 - a_1) x + \frac{b_1 d_2}{c_2 b_2 - a_2 d_2} - r = 0.$$

令 $y(x) = r a_1 x^2 + r(1 - a_1) x + \frac{b_1 d_2}{c_2 b_2 - a_2 d_2} - r$, 则当 $a_1 \le 1$ 时，对一切 $x > 0$, 有 $y'(x) > 0$; 且当 $\frac{d_2}{c_2 b_2 - a_2 d_2} < \frac{r}{b_1}$ 时， $y(x)$ 与 x 轴有唯一正交点 $x^* = \frac{r(a_1 - 1) + \sqrt{\Delta}}{2 r a_1} < 1$. 其中

$$\Delta = \sqrt{r^2(1 - a_1)^2 - 4 r a_1 (\frac{b_1 d_2}{c_2 b_2 - a_2 d_2} - r)} > 0.$$

显然 $\Delta > r(1 - a_1)$.

下面将 x^*, y_1^* 代入系统 (1) 的第二个方程，得

$$y_2 = (-d_1 - \frac{d_2}{c_2 b_2 - a_2 d_2} + \frac{c_1 b_1 (\Delta - r(1 - a_1))}{a_1 (\Delta + r(1 + a_1))}) \frac{c_2}{c_2 b_2 - a_2 d_2} = \frac{M - N}{a_1 (\Delta + r(1 + a_1))(c_2 b_2 - a_2 d_2)^2},$$

其中

$$M = c_2 (\Delta - r(1 - a_1))(c_1 b_1 - a_1 d_1)(c_2 b_2 - a_2 d_2),$$

$$N = 2ra_1c_2d_1(c_2b_2 - a_2d_2) + a_1c_2d_2(c_1b_1 - a_1d_1)((\Delta + ra_1)^2 - r^2).$$

当 $M > N$, 即 $\frac{d_2}{c_2b_2-a_2d_2} < \frac{(c_1b_1-a_1d_1)(\Delta-r(1-a_1))-2ra_1d_1}{a_1(c_1b_1-a_1d_1)((\Delta+ra_1)^2-r^2)}$ 时，存在 $y_2^* = y_2 > 0$.

综上所述，当 $a_1 \le 1$ 且 $\frac{d_2}{c_2b_2-a_2d_2} < \min\{\frac{r}{b_1}, \frac{(c_1b_1-a_1d_1)(\Delta-r(1-a_1))-2ra_1d_1}{a_1(c_1b_1-a_1d_1)((\Delta+ra_1)^2-r^2)}\}$ 时，系统 (1) 存在唯一的正平衡点 $E^*(x^*, y_1^*, y_2^*)$. □

该定理表明三种群单食物链系统在受环境因素制约的情况下，当系统参数满足一定条件的时候三种群仍能共存.

注 正平衡点的存在条件是由直接计算得到的，尤其条件

$$\frac{d_2}{c_2b_2 - a_2d_2} < \min\{\frac{r}{b_1}, \frac{(c_1b_1 - a_1d_1)(\Delta - r(1-a_1)) - 2ra_1d_1}{a_1(c_1b_1 - a_1d_1)((\Delta + ra_1)^2 - r^2)}\}$$

还保证了平衡点 $E_1(x_1, w_1, 0)$ 的存在.

下面我们利用伸缩变换法 [8] 讨论 E^* 的局部稳定性.

记系统 (1) 的正平衡点为 $E^*(A, B, C)$, 作变换 $x = A\overline{x}$, $y_1 = B\overline{y}_1$, $y_2 = C\overline{y}_2$, 得到下面的系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}t} = r\overline{x} - \overline{r}\overline{x}^2 - \dfrac{\overline{b}_1\overline{x}}{1+\overline{a}_1\overline{x}}\overline{y}_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}\overline{y}_1}{\mathrm{d}t} = \overline{y}_1(-d_1 - B\overline{y}_1 + \dfrac{\overline{c}_1\overline{b}_1\overline{x}}{1+\overline{a}_1\overline{x}} - \dfrac{\overline{b}_2\overline{y}_2}{1+\overline{a}_2\overline{y}_1}), \\ \dfrac{\mathrm{d}\overline{y}_2}{\mathrm{d}t} = \overline{y}_2(-d_2 + \dfrac{\overline{c}_2\overline{b}_2\overline{y}_1}{1+\overline{a}_2\overline{y}_1}). \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\overline{r} = rA$, $\overline{a}_1 = a_1A$, $\overline{a}_2 = a_2B$, $\overline{b}_1 = b_1B$, $\overline{b}_2 = b_2C$, $\overline{c}_1\overline{b}_1 = c_1b_1A$, $\overline{c}_2\overline{b}_2 = c_2b_2B$. 于是系统 (7) 有正平衡点 $\overline{E}^*(1,1,1)$ 且 $r > \overline{r}$.

定理 3.2 设 $a_1 \le 1$, $\frac{d_2}{c_2b_2-a_2d_2} < \frac{r}{b_1}$ 且 $a_2b_2y_2^* < 1$, 则正平衡点 $E^*(x^*, y_1^*, y_2^*)$ 是局部渐近稳定的且它在 R_+^3 上是全局渐近稳定的.

证明 若令 $\frac{\overline{b}_1}{(1+\overline{a}_1)^2} = \overline{m}_1$, $\frac{\overline{b}_2}{(1+\overline{a}_2)^2} = \overline{m}_2$, 则系统 (7) 在 $\overline{E}^*(1,1,1)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(\overline{E}^*) = \begin{pmatrix} \overline{a}_1\overline{m}_1 - \overline{r} & \overline{r} - r & 0 \\ \overline{c}_1\overline{m}_1 & \overline{a}_2\overline{m}_2 - B & -\overline{m}_2(1+\overline{a}_2) \\ 0 & \overline{c}_2\overline{m}_2 & 0 \end{pmatrix},$$

其对应的特征方程为 $p_0\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0$. 其中

$$\begin{aligned} &p_0 = 1,\ p_1 = -(\overline{a}_1\overline{m}_1 - \overline{r} + \overline{a}_2\overline{m}_2 - B), \\ &p_2 = (\overline{a}_1\overline{m}_1 - \overline{r})(\overline{a}_2\overline{m}_2 - B) + \overline{c}_2\overline{m}_2^2(1+\overline{a}_2) + \overline{c}_1\overline{m}_1(r - \overline{r}),\ p_3 = -\overline{c}_2\overline{m}_2^2(1+\overline{a}_2)(\overline{a}_1\overline{m}_1 - \overline{r}). \end{aligned}$$

当 $\overline{a}_1\overline{m}_1 - \overline{r} < 0$ 且 $\overline{a}_2\overline{m}_2 - B < 0$ 时，由上述的表达式知 $p_1 > 0$, 进而 $p_3 > 0$, 于是

$$p_1p_2 - p_3 = ((\overline{r} - \overline{a}_1\overline{m}_1) + (B - \overline{a}_2\overline{m}_2))((\overline{r} - \overline{a}_1\overline{m}_1)(B - \overline{a}_2\overline{m}_2) + \overline{c}_1\overline{m}_1(r - \overline{r})) > 0.$$

根据 Hurwitz 判别准则 [7], 特征方程的根均具有负实部. 而条件 $\overline{a}_1\overline{m}_1 - \overline{r} < 0$ 等价于 $a_1 \le 1$, $\frac{d_2}{c_2b_2-a_2d_2} < \frac{r}{b_1}$, 后者正是正平衡点 $E^*(x^*, y_1^*, y_2^*)$ 存在的条件; 而 $\overline{a}_2\overline{m}_2 - B < 0$ 等价于 $a_2b_2y_2^* < 1$, 于是定理的前半部分得证.

下面我们通过构造 Liapunov 函数的方法 [9] 证明 $E^*(x^*, y_1^*, y_2^*)$ 的全局渐近稳定性.

记 $s_1=\frac{1}{(1+a_1x)(1+a_1x^*)}$, $s_2=\frac{1}{(1+a_2y_1)(1+a_2y_1^*)}$). 显然 $s_1<1$, $s_2<1$. 与系统 (1) 等价的系统为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(r((1-x)-(1-x^*))-(\frac{b_1y_1}{1+a_1x}-\frac{b_1y_1^*}{1+a_1x^*})), \\ \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_1(-(y_1-y_1^*)+\frac{c_1b_1x}{1+a_1x}-\frac{c_1b_1x^*}{1+a_1x^*}-\frac{b_2y_2}{1+a_2y_1}+\frac{b_2y_2^*}{1+a_2y_1^*}), \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=y_2(\frac{c_2b_2y_1}{1+a_2y_1}-\frac{c_2b_2y_1*}{1+a_2y_1*}). \end{cases} \tag{8}$$

构造 Liapunov 函数:

$$V(x,y_1,y_2)=(x-x^*-x^*\ln\frac{x}{x^*})+m_1(y_1-y_1^*-y_1^*\ln\frac{y_1}{y_1^*})+m_2(y_2-y_2^*-y_2^*\ln\frac{y_2}{y_2^*}),$$

其中 m_1,m_2 为待定的正常数. 对上式求导, 令

$$\begin{aligned} P&=(x-x^*)^2(-r+s_1a_1b_1y_1^*)-s_1b_1(1+a_1x^*)(x-x^*)(y_1-y_1^*), \\ Q&=-m_1(y_1-y_1^*)^2(1-s_2a_2b_2y_2^*)+m_1s_1c_1b_1(x-x^*)(y_1-y_1^*)- \\ &\quad m_1s_2b_2(1+a_2y_1^*)(y_1-y_1^*)(y_2-y_2^*), \\ R&=m_2s_2c_2b_2(y_1-y_1^*)(y_2-y_2^*). \end{aligned}$$

则 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=P+Q+R$. 取 $m_1=\frac{1}{c_1}(1+a_1x^*)$, $m_2=\frac{1}{c_1c_2}(1+a_1x^*)(1+a_2y_1^*)$, 有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=(x-x^*)^2(-r+s_1a_1b_1y_1^*)-m_1(y_1-y_1^*)^2(1-s_2a_2b_2y_2^*).$$

由 $a_1\le 1$, $a_2b_2y_2^*<1$, 则 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<(x-x^*)^2(-r+s_1a_1b_1y_1^*)$. 再由 $\frac{d_2}{c_2b_2-a_2d_2}<\frac{r}{b_1}$, 有 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$. 并且 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 当且仅当 $x=x^*$, $y_1=y_1^*$, $y_2=y_2^*$. 因此系统 (1) 的正平衡点 $E^*(x^*,y_1^*,y_2^*)$ 在 R_+^3 上全局渐近稳定. □

4 结 论

我们讨论了一类微分方程系统正平衡解的存在性与全局稳定性. 该系统模拟的是食饵种群和被捕食种群的相对增长率因环境的变化受到影响 (具有线性密度制约项) 的单食物链模型. 研究了三种群共存与环境参数之间的关系, 得到了系统在正平衡点处全局渐近稳定的充分条件. 该条件表明: 如果正平衡点是局部渐近稳定的, 那么它必是全局渐近稳定的. 系统正平衡点的全局渐进稳定性, 保证了当充分大以后三种群的密度将接近于正平衡点位置, 也就是说这个生态系统中各种群将长期生存下去, 不会导致任何一种群的灭绝.

参考文献:

[1] 陈兰荪, 陈健. 非线性生物动力系统 [M]. 北京: 科学出版社, 1993.
CHEN Lan-sun, CHEN Jian. *Nonlinear Dynamic System in Biology* [M]. Beijing: Science Press, 1993. (in Chinese)

[2] CHIU C H. *Lyapunov functions for the global stability of competing predators* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1999, **230**(1): 232–241.

[3] 刘婧, 郑斯宁. 时变环境下 Chemostat 中微生物连续培养食物链模型的分歧分析 [J]. 生物数学学报, 2006, **21**(1): 89–96.

LIU Jing, ZHENG Si-ning. *Bifurcation analysis of a food chain chemostat model with time varying environment* [J]. J. Biomath., 2006, **21**(1): 89–96. (in Chinese)

[4] HAINZL J. *Stability and Hopf bifurcation in a predator-prey system with several parameters* [J]. SIAM J. Appl. Math., 1988, **48**(1): 170–190.

[5] 刘婧，杨淑芹．恒化器中微生物连续培养单食物链模型的定性分析 [J]. 大连海事大学学报，2004, **30**(3): 89–91.
LIU Jing, YANG Shu-qin. *Qualitative analysis for the single food chain model of microorganism continuous culture in chemostat* [J]. J. Dalian Maritime University, 2004, **30**(3): 89–91. (in Chinese)

[6] HSU S B, HWANG T W, KUANG Y. *A ratio-dependent food chain model and its applications to biological control* [J]. Math. Biosci., 2003, **181**(1): 55–83.

[7] 马知恩，周义仓．常微分方程定性与稳定性方法 [M]. 北京：科学出版社，2001.
MA Zhi-en, ZHOU Yi-cang. *Qualitative Method and Stability Method of Ordinary Differential Equations* [M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese)

[8] 司成斌，沈伯骞．一类具有 II 类功能反应的捕食系统的全局性态 [J]. 应用数学学报，2004, **27**(2): 193–200.
SI Cheng-bin, SHEN Bo-qian. *A global properties of a type II functional response predator-prey system* [J]. Acta Math. Appl. Sin., 2004, **27**(2): 193–200. (in Chinese)

[9] 陈兰荪．数学生态学模型与研究方法 [M]. 成都：四川科学技术出版社，2003.
CHEN Lan-sun. *Mathematical Models and Methods in Ecology* [M]. Chengdu: Sichuan Publishing House of Science & Technology, 2003. (in Chinese)

Existence and Global Stability of Positive Equilibrium Point to a System of Differential Equations

LIU Jing, MA Yan
(Department of Mathematics, Dalian Maritime University, Liaoning 116026, China)

Abstract: This paper deals with an autonomous nonlinear system of differential equations. We obtain the existence-uniqueness of positive equilibrium point to the problem, and then establish the local stability and the global asymptotic stability of the positive equilibrium point by means of the stretching method and the Liapunove function method, respectively.

Key words: food chain model; positive steady-state; stretching; Liapunov function; global asymptotical stability.