文章编号: 1000-341X(2007)04-0833-06 **文献标识码**: **A**

负系数单叶函数的一个新子族

邓 琴
(杭州电子科技大学理学院，浙江 杭州 310018)
(E-mail: Dqsx123@126.com)

摘 要: 本文引入了一类具有负系数的单叶函数族 $C_n(\alpha)$, 并且讨论了这类函数族精确的系数估计，偏差定理及闭包定理，推广了一些已有结果.

关键词: 单叶函数；解析函数；负系数.
MSC(2000): 30C45
中图分类: O174.51

1 引 言

设 S 表示在单位圆 $\Delta: |z|<1$ 内解析单叶且具有展开式 $f(z)=z+\sum_{j=2}^{\infty}a_jz^j$ 的函数族. T 表示在 S 中具有形式:

$$f(z)=z-\sum_{j=2}^{\infty}a_jz^j \quad (a_j\geq 0) \tag{1.1}$$

的函数族. 又记 $T^*(\alpha)=\{f(z)|f(z)\in T$, 且 $\mathrm{Re}(zf'(z))/f(z)>\alpha, 0\leq\alpha<1\}$, $C(\alpha)=\{f(z)|f(z)\in T$, 且存在 $g(z)\in T^*(\alpha)$, 使得 $\mathrm{Re}(zf'(z))/g(z)>\alpha, 0\leq\alpha<1\}$.

对 $f(z)\in S$, Salagean[1] 引入了下列算子:

$$D^0f(z)=f(z), \quad D^1f(z)=zf'(z) \tag{1.2}$$

和

$$D^nf(z)=D(D^{n-1}f(z)). \tag{1.3}$$

注意到 $D^nf(z)=z+\sum_{j=2}^{\infty}j^na_jz^j$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

Ekrem[2] 研究了函数族 $T_n(\alpha)=\{f(z)|f(z)\in T$, 且 $\mathrm{Re}(D^{n+1}f(z))/(D^nf(z))>\alpha\}$ $(n=0,1,2,\ldots;\ 0\leq\alpha<1)$ 的一些性质.

本文定义了一个新的函数族： $C_n(\alpha)=\{f(z)|f(z)\in T$, 且存在 $g(z)\in T_n(\alpha)$, 使

$$\mathrm{Re}(D^{n+1}f(z))/(D^ng(z))>\alpha\}, \quad n=0,1,2,\ldots;\ 0\leq\alpha<1.$$

注意到 $T_n(\alpha)\subset C_n(\alpha)$, 且 $T_0(\alpha)=T^*(\alpha)$, $C_0(\alpha)=C(\alpha)$. 本文主要研究了 $C_n(\alpha)$ 的系数估计，偏差定理及闭包定理，得到了一些精确的结果.

2 系数估计

定理 1 设 $g(z)=z-\sum_{j=2}^{\infty}b_jz^j\in T_n(\alpha)$, 形如式 (1.1) 的函数 $f(z)\in C_n(\alpha)$ 的充分必要

收稿日期: 2005-07-04; **接受日期**: 2005-11-26
基金项目: 杭州电子科技大学科研基金 (KYF091506020).

条件为:

$$\sum_{j=2}^{\infty}(j^{n+1}a_j - j^n\alpha b_j) \le 1-\alpha. \tag{2.1}$$

证明 若 $f(z)\in C_n(\alpha)$, 则有

$$\mathrm{Re}\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n g(z)} = Re\frac{z-\sum_{j=2}^{\infty} j^{n+1}a_j z^j}{z-\sum_{j=2}^{\infty} j^n b_j z^j} > \alpha. \tag{2.2}$$

注意到 z 取实值时, $(D^{n+1}f(z))/(D^n g(z))$ 也为实值. 令 $z\to\overline{1}$, 则有

$$\sum_{j=2}^{\infty}(j^{n+1}a_j - j^n\alpha b_j) \le 1-\alpha. \tag{2.3}$$

反之, 若 (2.1) 式成立, 则有

$$\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n g(z)} = \frac{z-\sum_{j=2}^{\infty} j^{n+1}a_j z^j}{z-\sum_{j=2}^{\infty} j^n b_j z^j} = \frac{1-\sum_{j=2}^{\infty} j^{n+1}a_j z^{j-1}}{1-\sum_{j=2}^{\infty} j^n b_j z^{j-1}} \quad (|z|<1). \tag{2.4}$$

当到 z 取实值时, $(D^{n+1}f(z))/(D^n g(z))$ 也为实值. 令 $z\to\overline{1}$, 则有

$$\mathrm{Re}\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n g(z)} = \frac{1-\sum_{j=2}^{\infty} j^{n+1}a_j}{1-\sum_{j=2}^{\infty} j^n b_j}. \tag{2.5}$$

由 (2.1) 式有

$$\sum_{j=2}^{\infty} j^{n+1}a_j \le 1-\alpha+\sum_{j=2}^{\infty} j^n\alpha b_j.$$

则有

$$\mathrm{Re}\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n g(z)} \ge \frac{1-(1-\alpha+\sum_{j=2}^{\infty} j^n\alpha b_j)}{1-\sum_{j=2}^{\infty} j^n b_j} = \alpha. \tag{2.6}$$

所以 $f(z)\in C_n(\alpha)$.

推论 1[2, 定理 2] 函数 $g(z)=z-\sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j \in T_n(\alpha)$ 的充分必要条件为:

$$\sum_{j=2}^{\infty}(j^{n+1} - j^n\alpha) b_j \le 1-\alpha. \tag{2.7}$$

证明 在定理 1 中令 $f(z)=g(z)$ 即可得 (2.7) 式.

推论 2 函数 $f(z)=z-\sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j \in C(\alpha)$ 的充分必要条件为:

$$\sum_{j=2}^{\infty}(ja_j - \alpha b_j) \le 1-\alpha. \tag{2.8}$$

证明 在定理 1 中令 $n=0$ 即可得 (2.8) 式.

3 偏差定理

定理 2 由 (1.1) 式所确定的函数 $f(z)\in C_n(\alpha)$, 则有

$$r-\frac{1-\alpha}{2^{n+1}-2^n\alpha}r^2 \le |f(z)| \le r+\frac{1-\alpha}{2^{n+1}-2^n\alpha}r^2 \quad (|z|=r), \tag{3.1}$$

是精确的，极值函数为

$$f(z)=z-\frac{1-\alpha}{2^{n+1}-2^n\alpha}z^2 \quad (z=\mp r).$$

证明 由定理 1, 有

$$2^{n+1}\sum_{j=2}^{\infty}a_j \le \sum_{j=2}^{\infty}j^{n+1}a_j \le 1-\alpha+\alpha\sum_{j=2}^{\infty}j^n b_j. \tag{3.2}$$

由文献 [2] 知

$$\sum_{j=2}^{\infty}j^n b_j \le \frac{1-\alpha}{2-\alpha}. \tag{3.3}$$

则有

$$2^{n+1}\sum_{j=2}^{\infty}a_j \le 1-\alpha+\alpha\frac{1-\alpha}{2-\alpha}=\frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}. \tag{3.4}$$

因此

$$|f(z)|\le r+\sum_{j=2}^{\infty}a_j r^j \le r+r^2\sum_{j=2}^{\infty}a_j \le r+\frac{1-\alpha}{2^{n+1}-2^n\alpha}r^2, \tag{3.5}$$

$$|f(z)|\ge r-\sum_{j=2}^{\infty}a_j r^j \ge r-r^2\sum_{j=2}^{\infty}a_j \ge r-\frac{1-\alpha}{2^{n+1}-2^n\alpha}r^2. \tag{3.6}$$

即

$$r-\frac{1-\alpha}{2^{n+1}-2^n\alpha}r^2 \le |f(z)| \le r+\frac{1-\alpha}{2^{n+1}-2^n\alpha}r^2.$$

推论 3[2, 定理 3] 函数 $g(z)=z-\sum_{j=2}^{\infty}b_j z^j \in T_n(\alpha)$, 则有

$$r-\frac{1-\alpha}{2^{n+1}-2^n\alpha}r^2 \le |g(z)| \le r+\frac{1-\alpha}{2^{n+1}-2^n\alpha}r^2 \quad (|z|=r). \tag{3.7}$$

(3.7) 式是精确的，极值函数为

$$g(z)=z-\frac{1-\alpha}{2^{n+1}-2^n\alpha}z^2 \quad (z=\mp r).$$

证明 在定理 2 中令 $f(z)=g(z)$ 即可得 (3.7) 式.

推论 4 由 (1.1) 式所确定的函数 $f(z)\in C(\alpha)$, 则有

$$r-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2 \le |f(z)| \le r+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2 \quad (|z|=r). \tag{3.8}$$

(3.8) 式是精确的，极值函数为：

$$f(z)=z-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}z^2, \qquad (z=\mp r).$$

证明 在定理 2 中令 $n=0$ 即可得 (3.8) 式.

定理 3 在定理 2 的假设下，函数 $f(z)$ 包含在中心在原点，半径为 r 的圆内，这里

$$r < 1 - \frac{1-\alpha}{2^{n+1} - 2^n\alpha}. \tag{3.9}$$

推论 5[2, 定理 4] 在推论 3 的假设下，函数 $g(z)$ 包含在中心在原点，半径为 r 的圆内，这里

$$r < 1 - \frac{1-\alpha}{2^{n+1} - 2^n\alpha}. \tag{3.10}$$

推论 6 在推论 4 的假设下，函数 $f(z)$ 包含在中心在原点，半径为 r 的圆内，这里

$$r < \frac{1}{2-\alpha}. \tag{3.11}$$

定理 4 由 (1.1) 式所确定的函数 $f(z) \in C_n(\alpha)$, 则有

$$1 - \frac{1-\alpha}{2^n - 2^{n-1}\alpha} r \le |f'(z)| \le 1 + \frac{1-\alpha}{2^n - 2^{n-1}\alpha} r \quad (|z| = r). \tag{3.12}$$

(3.12) 式是精确的，极值函数为

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2^{n+1} - 2^n\alpha} z^2 \quad (z = \mp r).$$

证明 由定理 1, 有

$$|f'(z)| \le 1 + \sum_{j=2}^{\infty} j a_j |z|^{j-1} \le 1 + r\sum_{j=2}^{\infty} j a_j, \tag{3.13}$$

$$2^n \sum_{j=2}^{\infty} j a_j \le \sum_{j=2}^{\infty} j^{n+1} a_j \le 1 - \alpha + \alpha \sum_{j=2}^{\infty} j^n b_j \le 1 - \alpha + \alpha \frac{1-\alpha}{2-\alpha} = \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}. \tag{3.14}$$

所以

$$|f'(z)| \le 1 + \frac{1-\alpha}{2^n - 2^{n-1}\alpha} r. \tag{3.15}$$

类似地有

$$|f'(z)| \ge 1 - \frac{1-\alpha}{2^n - 2^{n-1}\alpha} r. \tag{3.16}$$

推论 7[2, 定理 5] 函数 $g(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j \in T_n(\alpha)$, 则有

$$1 - \frac{1-\alpha}{2^n - 2^{n-1}\alpha} r \le |g'(z)| \le 1 + \frac{1-\alpha}{2^n - 2^{n-1}\alpha} r \quad (|z| = r). \tag{3.17}$$

是精确的，极值函数为

$$g(z) = z - \frac{1-\alpha}{2^{n+1} - 2^n\alpha} z^2 \quad (z = \mp r).$$

证明 在定理 4 中令 $f(z) = g(z)$ 即可得 (3.17) 式.

推论 8 由 (1.1) 式所确定的函数 $f(z) \in C(\alpha)$, 则有

$$1 - \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r \le |f'(z)| \le 1 + \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r \quad (|z| = r). \tag{3.18}$$

(3.18) 式是精确的，极值函数为

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} z^2 \quad (z = \mp r).$$

证明 在定理 4 中令 $n = 0$ 即可得 (3.18) 式.

4 闭包定理

定理 5 设 $g_m(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} b_{j,m} z^j \in T_n(\alpha), m = 1, 2$, 则对 $0 \le \xi \le 1$, 有

$$g(z) = (1-\xi) g_1(z) + \xi g_2(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j \in T_n(\alpha). \tag{4.1}$$

证明略.

定理 6 设 $f_m(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_{j,m} z^j \in C_n(\alpha), m = 1, 2$, 则对 $0 \le \xi \le 1$, 有

$$f(z) = (1-\xi) f_1(z) + \xi f_2(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j \in C_n(\alpha). \tag{4.2}$$

证明 设 $f_1(z), f_2(z) \in C_n(\alpha)$, 则由定理 1 有

$$\sum_{j=2}^{\infty} (j^{n+1} a_{j,1} - j^n \alpha b_{j,1}) \le 1 - \alpha \tag{4.3}$$

和

$$\sum_{j=2}^{\infty} (j^{n+1} a_{j,2} - j^n \alpha b_{j,2}) \le 1 - \alpha. \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{\infty} (j^{n+1} a_j - j^n \alpha b_j) &= \sum_{j=2}^{\infty} \{ j^{n+1} [(1-\xi) a_{j,1} + \xi a_{j,2}] - j^n \alpha [(1-\xi) b_{j,1} + \xi b_{j,2}] \} \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} (1-\xi)(j^{n+1} a_{j,1} - j^n \alpha b_{j,1}) + \sum_{j=2}^{\infty} \xi (j^{n+1} a_{j,2} - j^n \alpha b_{j,2}) \\
&\le (1-\xi)(1-\alpha) + \xi(1-\alpha) = 1 - \alpha.
\end{aligned}$$

由定理 1 知 $f(z) \in C_n(\alpha)$.

推论 9 设 $g_m(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} b_{j,m} z^j \in T^*(\alpha), m = 1, 2$, 则对 $0 \le \xi \le 1$, 有

$$g(z) = (1-\xi) g_1(z) + \xi g_2(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j \in T^*(\alpha). \tag{4.5}$$

证明 在定理 6 中令 $f(z) = g(z)$ 即可得 (4.5) 式.

推论 10 设 $f_m(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_{j,m} z^j \in C(\alpha), m = 1, 2$, 则对 $0 \le \xi \le 1$, 有

$$f(z) = (1-\xi) f_1(z) + \xi f_2(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j \in C(\alpha). \tag{4.6}$$

证明 在定理 6 中令 $n=0$ 即可得 (4.6) 式.

参考文献:

[1] SALAGEAN G S. *Subclass of univalent functions* [C]. Lecture Notes in Mathematic 1010, Springer Verlag Berlin, 1983, 362–372.
[2] KADIOGLU E. *On subclass of univalent functions with negative coefficients* [J]. Appl. Math. Comput., 2003, **146**(2-3): 351–358.
[3] SILVERMAN H. *Univalent functions with negative coefficients* [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **51**: 109–116.
[4] ORHAN H. *A new class of analytic functions with negative coefficients* [J]. Appl. Math. Comput., 2003, **138**(2-3): 531–543.
[5] KAMALI M, AKBULUT S. *On a subclass of certain convex functions with negative coefficients* [J]. Appl. Math. Comput., 2003, **145**(2-3): 341–350.

A New Subclass of Univalent Functions with Negative Coefficients

DENG Qin
(School of Science, Hangzhou Dianzi University, Zhejiang 310018, China)

Abstract: Sharp results concerning coefficients, distortion, closure theorem for the class $C_n(\alpha)$ are investigated. These results extend some known theorems.

Key words: univalent functions; analytic function; negative coefficients.